

# Ein alternierendes Verfahren auf Riemannschen Flächen.

Autor(en): **Pfluger, Albert**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **30 (1956)**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-23915>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Ein alternierendes Verfahren auf Riemannschen Flächen

VON ALBERT PFLUGER, Zürich

## 1. Einleitung

Eine fundamentale Aufgabe zur Konstruktion Abelscher Integrale auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche  $R$  ist die folgende: *Zu einer orientierten nicht zerlegenden Jordankurve  $\Gamma$  auf  $R$  ist eine im Gebiet  $R - \Gamma$  eindeutige harmonische Funktion  $u$  gesucht, die auf  $R$  unbegrenzt harmonisch fortgesetzt werden kann und dabei längs jeden geschlossenen Weges  $\Gamma'$  die Periode 1 hat, der in  $R - \Gamma$  das linke mit dem rechten Ufer von  $\Gamma$  verbindet.* Die Existenz einer solchen Funktion  $u$  kann etwa mit der Ahlfors'schen Formulierung des Dirichletschen Prinzips [1] bewiesen werden, indem man zeigt, daß unter den eindeutigen exakten Differentialen  $\omega$  auf  $R$  mit  $\int_{\Gamma'} \omega = \Gamma \times \Gamma'$  (d. i. die Schnittzahl von  $\Gamma$  mit  $\Gamma'$ ) genau eines mit minimaler Norm existiert; dieses ist harmonisch und sein Integral die gesuchte Funktion  $u$ . Diese Methode ist nicht konstruktiv. Der klassische Weg führt über Elementarintegrale dritter Gattung  $\chi_{ab}$  mit den logarithmischen Singularitäten und Residuen  $+1$  und  $-1$  in den «benachbarten» Punkten  $a$  und  $b$ . Ihre Superposition entlang einer Punktreihe  $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} = a_1$  längs  $\Gamma$ , d. i.  $\sum_{i=1}^{i=n} \chi_{a_i a_{i+1}}$  liefert die gewünschte Funktion  $u$ . Diese Methode ist nicht direkt.

Nun hat *H. A. Schwarz* [2], nachdem er sein alternierendes Verfahren zur Lösung des Dirichletschen Randwertproblems entwickelt und vielseitig angewendet hatte, auch zur direkten Konstruktion der obgenannten Funktion  $u$  ein alternierendes Verfahren vorgeschlagen, bei dessen Konvergenzbeweis er aber dann auf Schwierigkeiten gestoßen ist und sich durch Heranziehung von berandeten kompakten Flächen auf andere Weise behelfen mußte. Das Problem einer direkten Konstruktion der Potentiale erster Gattung durch Verwendung eines alternierenden Verfahrens ist erst durch Herrn *A. Steiner* [3] erfolgreich behandelt worden. Er hat die Schwierigkeit dadurch überwunden, daß er das Verfahren von Schwarz zunächst so modifizierte, daß die Konvergenz sichergestellt werden konnte. Diese Modifikation bedingte aber das Auftreten einer addi-

tiven Konstanten, von der dann noch bewiesen werden mußte, daß sie verschwindet.

Angeregt durch diese Arbeit von Herrn Steiner werde ich im folgenden unter Verwendung des Kalküls mit der Dirichletschen Bilinearform

$$D_F(u, v) = \iint_F (u_x v_x + u_y v_y) dx dy \quad (1.1)$$

zeigen, daß das ursprüngliche, von H. A. Schwarz in natürlicher Weise angesetzte Verfahren in bezug auf die durch (1.1) definierte Metrik konvergiert. Ausschlaggebend ist die bekannte Tatsache, daß die auf  $F$  eindeutigen harmonischen Funktionen mit endlichem Dirichletintegral in bezug auf das Skalarprodukt (1.1) einen Hilbertraum bilden, wenn Funktionen, die sich nur um eine Konstante unterscheiden, als äquivalent betrachtet werden<sup>1)</sup>. Die Methode läßt sich verwenden, um direkt, ohne eine kanonische Homologiebasis heranzuziehen, zu jedem singularitätenfreien exakten Differential auf  $R$  ein dazu kohomologes harmonisches Differential zu konstruieren. Sie gibt also in diesem Falle eine konstruktive Variante zum Dirichletschen Prinzip. Zum Schluß wird noch gezeigt, daß dieselbe Methode auch einen Konvergenzbeweis für das sogenannte Neumannsche alternierende Verfahren liefert. Sie kann auch auf offenen Flächen verwendet werden.

## 2. Das Schwarzsche Verfahren

Um unnötige Komplikationen zu vermeiden, setzen wir voraus, daß  $\Gamma$  analytisch sei. Wir bezeichnen  $\Gamma$  mit  $\Gamma_0$  und wählen einen zweiten einfach geschlossenen analytischen Weg  $\Gamma_1$ , so daß  $\Gamma_1 - \Gamma_0$  auf  $R$  genau zwei Teilgebiete berandet. Das im positiven Sinne umlaufene Gebiet bezeichnen wir mit  $R_0$ , das andere mit  $R_1$ . Wird  $R$  längs einem  $\Gamma_i$  ( $i = 0, 1$ ) aufgeschnitten, so entsteht eine berandete Fläche  $F_i$  mit den beiden Randkomponenten (rechtes und linkes Schnittufer)  $\Gamma_i^+$  und  $\Gamma_i^-$  ( $i = 0, 1$ ).

Nun konstruiert Schwarz eine Doppelfolge von harmonischen Funktionen  $u_n^{(i)}$  ( $i = 0, 1; n = 0, 1, 2, \dots$ ). Die  $u_n^{(i)}$  sind auf  $F_i$  harmonisch und alternierend durch folgende Randbedingungen festgelegt:

$$\begin{aligned} u_n^{(1)} &= \begin{cases} u_n^{(0)} + 1 & \text{auf } \Gamma_1^+ \\ u_n^{(0)} & \text{auf } \Gamma_1^- \end{cases} \\ u_{n+1}^{(0)} &= \begin{cases} u_n^{(1)} & \text{auf } \Gamma_0^+ \\ u_n^{(1)} - 1 & \text{auf } \Gamma_0^- \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

für  $n = 0, 1, 2, \dots$  und  $u_0^{(0)} \equiv 0$ .

---

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. [4], S. 339–342.

Wenn das Verfahren konvergiert, d. h. die  $u_n^{(i)}$  auf  $F_i$  lokal gleichmäßig konvergieren, so sind die Grenzfunktionen  $u^{(i)}$  auf  $F_i$  ( $i = 0, 1$ ) harmonisch mit  $u^{(0)} = u^{(1)}$  auf  $R_0$  und  $u^{(0)} + 1 = u^{(1)}$  auf  $R_1$ . Damit wäre dann offenbar die Aufgabe gelöst. Es genügt aber, die Konvergenz der Differentiale  $du_n^{(i)}$  nachzuweisen. Hierzu setzen wir

$$f_n^{(1)} = \begin{cases} u_n^{(0)} + 1 & \text{auf } R_1 \\ u_n^{(0)} & \text{auf } R_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$f_n^{(0)} = \begin{cases} u_{n-1}^{(1)} - 1 & \text{auf } R_1 \\ u_{n-1}^{(1)} & \text{auf } R_0 \end{cases}$$

für  $n = 1, 2, \dots$ . Die  $f_n^{(i)} - u_n^{(i)}$  sind auf  $F_i$  eindeutig, stetig und stückweise stetig differenzierbar und verschwinden auf den beiden Randkomponenten  $\Gamma_i^+$  und  $\Gamma_i^-$  ( $i = 0, 1$ ). Überdies sind die  $u_n^{(i)}$  auch auf dem Rande von  $F_i$  harmonisch, da  $\Gamma_i$  analytisch ist. Unter Verwendung der Bilinearform (1.1) folgt aus der Greenschen Formel, angewandt auf  $F_i$ ,

$$D_{F_i}(u_m^{(i)}, f_n^{(i)} - u_n^{(i)}) = \int_{\Gamma_i^- - \Gamma_i^+} (f_n^{(i)} - u_n^{(i)}) du_m^{*(i)} = 0 \quad ^2),$$

oder wegen (2.2)

$$D_R(u_m^{(1)}, u_n^{(1)} - u_n^{(0)}) = 0, \quad D_R(u_m^{(0)}, u_n^{(0)} - u_{n-1}^{(1)}) = 0 \quad (2.3)$$

für  $m, n = 1, 2, \dots$ . Diese Relationen (2.3) ergeben die Konvergenz der  $du_n^{(i)}$  in folgender Weise.

Zunächst folgt aus (2.3) für  $m = n$

$$D(u_n^{(1)} - u_n^{(0)}) = D(u_n^{(0)}) - D(u_n^{(1)}) \quad (2.4)$$

und

$$D(u_n^{(0)} - u_{n-1}^{(1)}) = D(u_{n-1}^{(1)}) - D(u_n^{(0)}) . \quad (2.5)$$

Dies liefert die monotone Sequenz

$$\dots \geq D(u_n^{(0)}) \geq D(u_n^{(1)}) \geq D(u_{n+1}^{(0)}) \geq \dots .$$

Es ist also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(u_n^{(0)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} D(u_n^{(1)}) = d \quad (2.6)$$

und wegen (2.4) und (2.5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(u_n^{(1)} - u_n^{(0)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} D(u_n^{(0)} - u_{n-1}^{(1)}) = 0 . \quad (2.7)$$

---

<sup>2</sup>)  $du^*$  ist das konjugierte Differential zu  $du$ .

Das Ziel ist der Beweis von (2.10). Würden neben (2.3) auch die Relationen  $D(u_m^{(0)}, u_n^{(1)} - u_n^{(0)}) = 0$  und  $D(u_m^{(1)}, u_n^{(0)} - u_{n-1}^{(1)}) = 0$  gelten, so könnte dieser nach bekannten Verfahren sofort erbracht werden. Aber hier ist noch eine weitere Rechnung nötig. Die Relationen (2.3) liefern zusammen mit der Symmetrieeigenschaft  $D(u, v) = D(v, u)$  nacheinander  $D(u_m^{(0)}, u_n^{(0)}) = D(u_m^{(0)}, u_{n-1}^{(1)}) = D(u_m^{(1)}, u_{n-1}^{(1)})$  und analog  $D(u_m^{(1)}, u_n^{(1)}) = D(u_{m+1}^{(0)}, u_n^{(0)})$ . Beides zusammen ergibt

$$D(u_m^{(i)}, u_n^{(i)}) = D(u_{m+1}^{(i)}, u_{n-1}^{(i)})$$

und daraus folgt durch Iteration

$$D(u_{m+2p}^{(i)}, u_m^{(i)}) = D(u_{m+p}^{(i)}) \quad (2.8)$$

für  $m, p = 1, 2, 3, \dots; i = 0, 1$ .

Daher ist  $D(u_{m+2p}^{(i)} - u_m^{(i)}) = D(u_{m+2p}^{(i)}) + D(u_m^{(i)}) - 2D(u_{m+2p}^{(i)}, u_m^{(i)}) = D(u_{m+2p}^{(i)}) + D(u_m^{(i)}) - 2D(u_{m+p}^{(i)})$  und wegen (2.6) für beliebige  $p$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D(u_{m+2p}^{(i)} - u_m^{(i)}) = 0. \quad (2.9)$$

Mit der Dreiecksungleichung  $\sqrt{D(u+v)} \leq \sqrt{D(u)} + \sqrt{D(v)}$  folgt daraus zusammen mit (2.7)

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} D(u_m^{(i)} - u_n^{(i)}) = 0, \quad i = 0, 1. \quad (2.10)$$

Dies bedeutet, daß die  $u_n^{(i)}$  in bezug auf den Distanzbegriff

$$d(u, v) = \sqrt{D(u - v)}$$

eine Cauchy-Folge bilden. Nun sind die  $u_n^{(i)}$  wegen der Randbedingungen (2.1) und des analytischen Charakters der Randkurven  $\Gamma_i$  auf  $\bar{F}_i$  harmonisch, und deshalb konvergieren die Differentiale  $du_n^{(i)}$  auf  $\bar{F}_i$  gleichmäßig gegen ein harmonisches Differential  $\omega_i$ . Wegen (2.7) ist aber  $\omega_0 = \omega_1$  in  $F_0 \cap F_1$ , d. h. es ist ein einziges auf  $R$  harmonisches Differential  $\omega$  konstruiert worden. Für ein festes  $p_0 \in F_0$  konvergiert

$$u_n^{(0)}(p) - u_n^{(0)}(p_0)$$

auf  $F_0$  gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion  $U$  mit  $dU = \omega$ , die beim Übergang von  $\Gamma_0^+$  zu  $\Gamma_0^-$  den Sprung  $-1$  erfährt: Dieses  $u$  hat also die in Nr. 1 geforderten Eigenschaften.

Die Methode ist auch auf beliebige offene Flächen anwendbar, sofern 1.)  $\Gamma$  wiederum die Fläche nicht zerlegt, auch nicht in nichtkompakte

Teile, und 2.) zu den Randbedingungen (2.1) eine zusätzliche Bedingung für den «idealen Rand» gestellt wird. Ist  $F$  irgendein in der Riemannschen Fläche  $R$  kompaktes Teilgebiet mit dem Rand  $\gamma$  und ist

$$\omega = \omega(p, \gamma, R - \bar{F})$$

das harmonische Maß von  $\gamma$  in bezug auf  $R - \bar{F}$ , so kann diese Zusatzbedingung so formuliert werden: Für geeignete positive Konstanten  $K_n$  soll in einer Umgebung des «idealen Randes»

$$|u_n^{(i)}| < K_n \cdot \omega \tag{2.1'}$$

sein. Dann sind die  $u_n^{(i)}$  eindeutig konstruierbar, und man kann zeigen, daß dann auch die Relationen (2.3) gültig sind.

### 3. Verallgemeinerung

Es sei  $R$  wieder eine geschlossene Riemannsche Fläche und  $z = x + iy$  irgendein zulässiger lokaler Parameter. Zufolge der konformen Struktur ist jedem (reellen) Differential  $\omega = p dx + q dy$  ein konjugiertes Differential  $\omega^* = -q dx + p dy$  zugeordnet.  $\omega$  ist exakt, wenn seine äußere Ableitung  $d\omega = (q_x - p_y) dx dy$  überall auf  $R$  verschwindet. Sind  $\omega$  und  $\omega^*$  exakt, so heißt  $\omega$  harmonisch, d. h. es gibt lokal eine harmonische Funktion  $h$  mit  $\omega = dh = h_x dx + h_y dy$ .  $\omega$  heißt total, wenn eine eindeutige Funktion  $f$  mit  $df = \omega$  existiert. Ist  $\omega_1 = p_1 dx + q_1 dy$  und  $\omega_2 = p_2 dx + q_2 dy$ , so wird ihr inneres Produkt  $(\omega_1, \omega_2)$  durch

$$(\omega_1, \omega_2) = \iint_R (p_1 p_2 + q_1 q_2) dx dy$$

definiert. Die positive Quadratwurzel aus  $(\omega, \omega)$  ist die Norm  $\|\omega\|$  von  $\omega$ .

Es ist eine fundamentale Tatsache in der Theorie der harmonischen Differentiale auf geschlossenen Flächen, daß zu jedem singularitätenfreien exakten Differential  $\omega_0$  auf  $R$  ein harmonisches Differential  $\varphi$  existiert, so daß  $\varphi - \omega_0$  total ist. Dieses  $\varphi$  kann etwa auf Grund einer kanonischen Homologiebasis aus den Potentialen  $u$  der Nr. 1 gewonnen werden. Einen andern, besonders eleganten Zugang liefert das Dirichletsche Prinzip in der Ahlfors'schen Begründung [1]: Man betrachte die Kohomologiekategorie  $\Omega$  in der  $\omega_0$  liegt, d. h. sämtliche singularitätenfreien exakten Differentiale  $\omega$ , wo  $\omega - \omega_0$  total ist. Dann existiert eine

Folge  $\{\omega_n\}$  aus  $\Omega$  mit  $\|\omega_n\| \rightarrow \inf_{\omega \in \Omega} \|\omega\|$  und man zeigt, daß diese

Minimalfolge stark gegen ein harmonisches Differential  $\varphi$  konvergiert und  $\varphi \in \Omega$  ist. Unsere Methode (Nr. 2) kann so modifiziert werden, daß sie eine direkte Konstruktion einer solchen Minimalfolge liefert. Wir setzen voraus, daß  $\omega_0$  stetig differenzierbar und exakt sei und bezeichnen mit  $\Omega$  die Klasse der Differentiale  $\omega$  von der Form  $\omega = \omega_0 + df$ , wo  $f$  eine stetige Funktion ist und stückweise glatt in folgendem Sinne: Abgesehen von der Vereinigungsmenge  $A$  endlichvieler analytischer Kurvenbogen, also auf der offenen Menge  $R - A$  ist  $f$  stetig differenzierbar und das über  $R - A$  erstreckte Dirichletintegral endlich.

Unter Parameterzelle verstehen wir eine Umgebung  $V$  und eine zugehörige konforme Abbildung  $\alpha$ , die in einer umfassenderen Umgebung, welche  $\bar{V}$  (abgeschlossene Hülle von  $V$ ) enthält, noch definiert ist und  $V$  in den Parameterkreis  $K = \{z \mid |z| < 1\}$  überführt. Da  $R$  kompakt ist, gibt es eine endliche Überdeckung mit Parameterzellen, die wir für das Folgende festgewählt und numeriert mit  $V_i, i = 0, 1, 2, \dots, k$  bezeichnen. Wir definieren für jede Parameterzelle  $V_i$  einen linearen Operator  $\Phi_i$ : Zu  $\omega \in \Omega$  gibt es in  $\bar{V}_i$  eine stetige Funktion  $f_i$  mit  $df_i = \omega$  in  $V_i$ . Da  $f_i$  auf dem Rande von  $V_i$  stetig ist, kann man die zugehörige erste Randwertaufgabe lösen, d. h. jene in  $V_i$  harmonische und auf  $\bar{V}_i$  noch stetige Funktion  $F_i$  konstruieren, die auf dem Rande von  $V_i$  mit  $f_i$  übereinstimmt.

Wir setzen

$$\Phi_i \omega = \begin{cases} \omega & \text{in } R - \bar{V}_i \\ dF_i & \text{in } V_i \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \dots, k .$$

$\Phi_i \omega$  ist durch  $\omega$  und den Index  $i$  eindeutig bestimmt und es gehört auch  $\Phi_i \omega$  zur Klasse  $\Omega$ . Es gilt der

**Hilfssatz:** Für jedes exakte Differential  $\varphi$  mit endlicher Norm, das in  $V_i$  harmonisch ist, gilt

$$(\varphi, \omega - \Phi_i \omega) = 0 . \quad (3.1)$$

*Beweis:* Da  $\omega = \Phi_i \omega$  ist in  $R - V_i$ , so bedeutet die Gleichung (3.1), daß bei Beschränkung auf  $V_i$  und Verpflanzung in den Parameterkreis  $K_i$   $(\varphi, \omega - \Phi_i \omega)_{V_i} = (\varphi, \omega - \Phi_i \omega)_{K_i} = 0$  ist. Nun gilt  $\omega = df_i, \Phi_i \omega = dF_i$  und  $F_i$  löst für den Kreis  $K_i$  in bezug auf die Randwerte von  $f_i$  das Dirichletsche Randwertproblem. Es ist also  $D(F_i) \leq D(f_i) < \infty$ . Ferner sieht man leicht, daß es eine Folge von stetigen und stückweise glatten

Funktionen  $g_n$  gibt, die im Kreisring  $\{z_i \mid 1 - 1/n < |z_i| < 1\}$  verschwinden und der Bedingung  $\lim_{n \rightarrow \infty} D(g_n - f_i - F_i) = 0$  genügen.

Offenbar ist  $(\varphi, dg_n) = 0$ , woraus sich durch Grenzübergang dann die gewünschte Gleichung ergibt.

Das angekündigte Konstruktionsverfahren verläuft nun folgendermaßen. Ausgehend von dem gegebenen Differential  $\omega_0$  wird eine Folge von Differentialen  $\omega_n$  aus  $\Omega$  gebildet, wo jedes aus dem Vorangehenden durch Anwenden des Operators  $\Phi_i$  hervorgeht, und der Index  $i$  ständig die Zahlenreihe  $0, 1, 2, \dots, k$  hin und her durchläuft. Wir setzen also

$$\Phi_1 \omega_0 = \omega_1, \Phi_2 \omega_1 = \omega_2, \dots, \Phi_k \omega_{k-1} = \omega_k, \Phi_{k-1} \omega_k = \omega_{k+1}, \\ \Phi_{k-2} \omega_{k+1} = \omega_{k+2}, \dots, \Phi_1 \omega_{2k-2} = \omega_{2k-1}, \Phi_0 \omega_{2k-1} = \omega_{2k}, \text{ usw., d. h.}$$

$$\Phi_i \omega_{2k\nu+i-1} = \omega_{2k\nu+i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k$$

und

$$\Phi_i \omega_{2k(\nu+1)-i-1} = \omega_{2k(\nu+1)-i}, \quad i = k-1, k-2, \dots, 2, 1.$$

Gemäß (3.1) ist daher  $(\varphi, \omega_n - \omega_{n-1}) = 0$  für jedes exakte  $\varphi$  endlicher Norm, das in  $V_i$  harmonisch ist, und  $n = 2k\nu \pm i$  mit  $\nu = 1, 2, \dots$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ . Nun ist  $\omega_m$  mit  $m = 2k\mu \pm i$  in  $V_i$  harmonisch und somit

$$(\omega_m, \omega_n - \omega_{n-1}) = 0 \quad \text{für} \quad m \equiv \pm n \pmod{2k}. \quad (3.2)$$

Daraus folgt zunächst mit  $m = n$

$$\|\omega_n - \omega_{n-1}\|^2 = \|\omega_{n-1}\|^2 - \|\omega_n\|^2.$$

Es sind also die Normen  $\|\omega_n\|$  monoton abnehmend, es existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n\| = d \quad (3.3)$$

und es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \omega_{n-1}\| = 0. \quad (3.4)$$

Weiter folgt aus (3.2)  $(\omega_m, \omega_n) = (\omega_{m+1}, \omega_{n-1})$  für  $m \equiv -n \pmod{2k}$ ; denn es ist in diesem Falle neben (3.2) auch  $(\omega_{n-1}, \omega_{m+1} - \omega_m) = 0$ .

Dies ergibt

$$(\omega_m, \omega_{m+2\nu}) = \|\omega_{m+\nu}\|^2$$

für alle  $m$  und  $\nu$ . Daher ist

$$\|\omega_{m+2\nu} - \omega_m\|^2 = \|\omega_{m+2\nu}\|^2 + \|\omega_m\|^2 - 2(\omega_{m+2\nu}, \omega_m) \\ = \|\omega_{m+2\nu}\|^2 + \|\omega_m\|^2 - 2\|\omega_{m+\nu}\|^2$$

und somit für beliebige  $\nu$   $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\omega_{m+2\nu} - \omega_m\| = 0$ . Zusammen mit (3.4)



und der Subadditivität der Norm folgt dann

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|\omega_m - \omega_n\| = 0 .$$

Die  $\omega_n$  bilden also eine Cauchy-Folge. Für ein festes  $i$  ist  $\varphi_\nu^{(i)} = \omega_{2k\nu+i}$  in  $V_i$  harmonisch, und es gilt bei Restriktion auf  $V_i$  a fortiori

$$\lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} \|\varphi_\mu^{(i)} - \varphi_\nu^{(i)}\|_{V_i} = 0 .$$

Daher konvergieren die  $\varphi_\nu^{(i)}$  in  $V_i$  lokal gleichmäßig gegen ein harmonisches Differential  $\varphi^{(i)}$  mit

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\varphi_\nu^{(i)} - \varphi^{(i)}\|_{V_i} = 0 . \quad (3.5)$$

Damit ist in jeder Parameterumgebung  $V_i$  ein harmonisches Differential  $\varphi^{(i)}$  konstruiert worden, das der Bedingung (3.5) genügt. Für zwei beliebige  $i$  und  $j$  aus der Indexmenge  $\{0, 1, 2, \dots, k\}$  gilt aber nun

$$\|\varphi_\nu^{(i)} - \varphi_\nu^{(j)}\| = \|\omega_{2k\nu+i} - \omega_{2k\nu+j}\| \rightarrow 0$$

für  $\nu \rightarrow \infty$  und daraus folgt bei Restriktion auf den Durchschnitt  $V_i \cap V_j$   $\|\varphi^{(i)} - \varphi^{(j)}\|_{V_i \cap V_j} = 0$ , d. h. die Differentiale  $\varphi^{(i)}$  und  $\varphi^{(j)}$  stimmen im Durchschnitt  $V_i \cap V_j$  überein, sind als harmonische Fortsetzungen voneinander und definieren ein einziges, auf  $R$  eindeutiges und harmonisches Differential  $\varphi$ . Da die  $\omega_n$  eine Cauchy-Folge bilden, ist wegen (3.5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \varphi\|_{V_i} = 0$  für  $i = 0, 1, 2, \dots, k$ , woraus sich unmittelbar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - \varphi\|_R = 0 \quad (3.6)$$

ergibt: Die  $\omega_n$  konvergieren stark gegen das harmonische Differential  $\varphi$ .

Es ist noch zu zeigen, daß  $\varphi - \omega_0$  total ist. Man kann leicht zu jedem geschlossenen Weg  $\Gamma$  auf  $R$  ein Differential  $\psi_\Gamma$  konstruieren, so daß  $\int_\Gamma \omega = (\psi_\Gamma, \omega)$  ist für jedes exakte Differential  $\omega$ <sup>3)</sup>. Nun ist  $\omega_{n+1} - \omega_n$  total, also auch  $\omega_n - \omega_0$  und daher  $(\psi_\Gamma, \omega_n - \omega_0) = 0$ . Aus (3.6) folgt dann  $(\psi_\Gamma, \varphi - \omega_0) = 0$  oder  $\int_\Gamma (\varphi - \omega_0) = 0$  für jeden geschlossenen Weg  $\Gamma$ . Also ist  $\varphi - \omega_0$  total und  $\varphi$  das gesuchte harmonische Differential.

Es ist mir nicht gelungen, dieses Verfahren direkt auf offene Flächen zu übertragen, da das periodische Hinundherlaufen des Operators  $\Phi_i$  auf den Parameterzellen  $V_i, i = 0, 1, 2, \dots, k$  sehr wesentlich ist. Dagegen ist es unmittelbar auf einen Kreisbereich  $B$  einer offenen Fläche, d. i. eine zusammenhängende Vereinigungsmenge von endlich vielen Para-

---

<sup>3)</sup> Vgl. etwa [5], § 11.

meterzellen, anwendbar. Man gewinnt dadurch ein in  $B$  harmonisches Differential  $\varphi$  mit  $\varphi - \omega_0 = df$  in  $B$  und  $f = 0$  auf dem Rande von  $B$ . Schöpft man die offene Fläche  $R$  durch Kreisbereiche aus, so erhält man dann ein auf  $R$  harmonisches Differential  $\varphi$ , so daß  $\varphi - \omega_0$  auf  $R$  total ist. Damit dieses Ausschöpfungsverfahren konvergiere, ist natürlich notwendig, daß das gegebene Differential  $\omega_0$  von endlicher Norm sei.

#### 4. Anwendung auf das Neumannsche alternierende Verfahren

Zum Schluß soll noch gezeigt werden, daß man mit unserer Methode auch die Konvergenz des Neumannschen Verfahrens beweisen kann. Es sei die Riemannsche Fläche  $R$  der Einfachheit halber wieder geschlossen,  $F_1$  eine Parameterzelle und  $\alpha$  die konforme Abbildung, die den Parameterkreis  $\{z \mid |z| < 1\}$  in  $F_1$  überführt. Wir bezeichnen mit  $R_1$  bzw.  $K$  das  $\alpha$ -Bild von  $\{z \mid |z| \leq 1/2\}$  bzw.  $\{z \mid 1/2 \leq |z| \leq 1\}$  und setzen  $R - R_1 = F_0$ ,  $R - F_1 = R_0$ .  $\Gamma_i$  sei der Rand von  $F_i$ ,  $i = 0, 1$ . Das Neumannsche Verfahren löst die Aufgabe, zu gegebener harmonischer Funktion  $H$  in  $K$  mit

$$\int_{\Gamma_0} dH^* = 0 \tag{4.1}$$

in  $F_0$  und  $F_1$  je eine harmonische Funktion  $H_0$  und  $H_1$  zu finden, so daß  $H_0 - H_1 = H$  ist in  $K$ . Hiefür wird eine Doppelfolge von harmonischen Funktionen  $u_n^{(i)}$  in  $F_i$ ,  $i = 0, 1$ , durch folgende alternierende Randbedingungen konstruiert:

$$\begin{aligned} u_n^{(0)} &= u_{n-1}^{(1)} + H & \text{auf } \Gamma_0 & \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ u_n^{(1)} &= u_n^{(0)} - H & \text{auf } \Gamma_1 & \quad u_0^{(1)} \equiv 0 . \end{aligned} \tag{4.2}$$

Man zeigt, daß die  $u_n^{(i)}$  in  $F_i$  lokal gleichmäßig gegen eine harmonische Grenzfunktion  $H_i$ ,  $i = 0, 1$ , konvergieren. Daher ist nach (4.2)  $H_0 - H_1 = H$  auf  $K$ .

Es genügt aber die Konvergenz der  $du_n^{(i)}$  und diese kann durch eine ähnliche Betrachtung wie in Nr. 2 bewiesen werden. Wegen (4.1) existiert in  $R_1$  eine harmonische Funktion  $h$  mit  $dh^* = dH^*$  längs  $\Gamma_0$ . Wir setzen

$$\bar{H} = \begin{cases} h \text{ im Innern von } R_1 \\ H \text{ auf } K . \end{cases} \tag{4.3}$$

$\bar{H}$  ist stückweise in  $R_1$  und  $K$  harmonisch, aber nicht stetig; dagegen sind die Normalableitungen von  $\bar{H}$  längs  $\Gamma_0$  stetig.

Wir setzen

$$f_n^{(0)} = \begin{cases} u_n^{(0)} & \text{auf } F_0 \\ u_{n-1}^{(1)} + \bar{H} & \text{auf } R_1 \end{cases} \quad (4.4)$$

$$f_n^{(1)} = \begin{cases} u_n^{(0)} & \text{auf } R_0 \\ u_n^{(1)} + \bar{H} & \text{auf } F_1. \end{cases}$$

Die  $f_n^{(i)}$  haben längs  $\Gamma_0$  eine Unstetigkeitslinie. Dagegen sind die Differenzen  $f_n^{(0)} - f_n^{(1)}$  und  $f_n^{(0)} - f_{n-1}^{(1)}$  auf  $R$  stetig, sowie  $f_n^{(0)} - f_n^{(1)} = 0$  auf  $R_0$  und  $f_n^{(0)} - f_{n-1}^{(1)} = 0$  auf  $R_1$ . Daher ist  $D_R(f_m^{(1)}, f_n^{(0)} - f_n^{(1)}) = D_{F_1}(f_m^{(1)}, f_n^{(0)} - f_n^{(1)})$  und  $D_R(f_m^{(0)}, f_n^{(0)} - f_{n-1}^{(1)}) = D_{F_0}(f_m^{(0)}, f_n^{(0)} - f_{n-1}^{(1)})$ . Nach der Greenschen Formel verschwinden aber diese beiden Ausdrücke, da gemäß (4.4)  $f_m^{(0)}$  auf  $F_0$  harmonisch und  $f_m^{(1)}$  stückweise auf  $K$  und  $R_1$  harmonisch ist mit stetiger Normalkomponente längs  $\Gamma_0$ . Es gelten also die Relationen

$$D_R(f_m^{(0)}, f_n^{(0)} - f_{n-1}^{(1)}) = D_R(f_m^{(1)}, f_n^{(0)} - f_n^{(1)}) = 0 \quad (4.5)$$

für  $m, n = 1, 2, \dots$ , die mit  $f_n^{(i)}$  an Stelle von  $u_n^{(i)}$  mit (2.3) identisch sind. Gleich wie dort folgt aus (4.5)

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} D_R(f_m^{(i)} - f_n^{(i)}) = 0.$$

Nun sind die Differentiale  $df_n^{(0)} = du_n^{(0)}$  und  $df_n^{(1)} = du_n^{(1)} + d\bar{H}$  auf  $F_0$  bzw.  $F_1$  harmonisch und konvergieren daher lokal gleichmäßig gegen ein harmonisches Differential  $\varphi_0$  bzw.  $\varphi_1 + d\bar{H}$ . Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} D(f_n^{(0)} - f_n^{(1)}) = 0$

[entspricht (2.7)] ist  $\varphi_0 = \varphi_1 + d\bar{H}$  in  $F_0 \cap F_1 = K$ . Die Integrale  $H_i$  der  $\varphi_i$  sind also in  $F_i$  harmonisch und erfüllen bei geeigneter Wahl der Integrationskonstanten in  $K$  die Gleichung  $H_0 - H_1 = H$ .

Ist die Fläche offen, so muß den Randbedingungen (4.2) die am Schluß von Nr. 2 angegebene Zusatzbedingung (2.1') für den «idealen Rand» beigefügt werden.

#### LITERATURHINWEISE:

- [1] *L. V. Ahlfors*: Die Begründung des Dirichletschen Prinzips, Soc. Sci. Fennicae, Comment. Phys.-Math. XI. 15. (1943).
- [2] *H. A. Schwarz*: Auszug aus einem Brief an Herrn F. Klein, 1882, in den Ges. Math. Abh. von Schwarz, Springer 1890, 2. Bd. S. 303–306.
- [3] *Antonio Steiner*: Eine direkte Konstruktion der Abelschen Integrale erster Gattung, Inaugural-Dissertation an der Universität Zürich, 1950, Orell-Füssli Verlag, Zürich.
- [4] *R. Nevanlinna*: Uniformisierung, Springer-Verlag, 1953.
- [5] *H. Weyl*: Die Idee der Riemannschen Fläche, 3. Auflage, 1955.

(Eingegangen den 22. August 1955.)