Über die Riemannsche Periodenrelation auf transzendenten hyperelliptischen Flächen

Herrn R. Nevanlinna zu seinem 60. Geburtstag in Verehrung gewidmet

von A. PFLUGER, Zürich

Nachdem *R. Nevanlinna*[1]) durch seine Theorie der quadratisch integrierbaren Differentiale auf nullberandeten Flächen ein wesentliches Stück der klassischen Theorie der Abelschen Integrale verallgemeinert hatte, war es natürlich zu fragen, ob auch die von Riemann bewiesene bilineare Periodenrelation für Abelsche Integrale erster Gattung sich auf nullberandete Flächen (Flächenklasse O_G) übertragen ließe. Für spezielle zweiblättrige Riemannsche Flächen unendlichen Geschlechtes ist diese Frage von *P. J. Myrberg*[2]) und *K. I. Virtanen*[3]) und allgemein für die Flächenklasse O_G von letzterem[3]) und von *L. V. Ahlfors*[4]) untersucht worden. Hier wird diese Frage für transzendente hyperelliptische Flächen wieder aufgegriffen und gezeigt, daß in Abhängigkeit von der metrischen Struktur der Fläche immer ein harmonisches Schnittsystem angegeben werden kann, für welches die Riemannsche Relation noch gültig bleibt, wenigstens in dem Sinne, daß bei der auftretenden unendlichen Reihe eine gewisse Teilfolge der Partialsummen zu dem verlangten Wert konvergiert.

1. Zur Konstruktion der Riemannschen Fläche R bringen wir mit *P. J. Myrberg* auf der positiven reellen Achse der komplexen z-Ebene unendlich viele Schlitze I_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ an, die sich nur im Unendlichen häufen. Dieses Schlitzgebiet bezeichnen wir mit π und verheften zwei Exemplare davon, π_+ und π_- kreuzweise längs der Schlitze I_n. Diese zweiblättrige Überlagerungsfläche der z-Ebene ist die Riemannsche Fläche R; sie ist von unendlichem Geschlecht und offenbar im Sinne von *R. Nevanlinna* nullberandet.

---

[1]) *Quadratisch integrierbare Differentiale auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.* Ann. Acad. Sci. Fennicae, A I, Nr. 1 (1941).

[2]) *Über transzendente hyperelliptische Integrale erster Gattung.* Ebenda, Nr. 14 (1943).

[3]) *Über Abelsche Integrale auf nullberandeten Riemannschen Flächen von unendlichem Geschlecht.* Ebenda, Nr. 56 (1949).

[4]) *Normalintegrale auf offenen Riemannschen Flächen.* Ebenda, Nr. 35 (1947).

Auf dieser Fläche betrachten wir zwei verschiedene kanonische Schnittsysteme. Die A- und B-Schnitte des ersten Systems, A_n, B_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, sind folgendermaßen definiert: B_n ist ein im positiven Sinne durchlaufener Kreis $|z| = r$ des obern Blattes π_+, der zwischen den beiden Schlitzen I_{n-1} und I_n hindurchgeht; A_n ist der Weg, der im obern Blatt π_+ auf der reellen Achse von I_{n-1} nach I_n und von dort im untern Blatt nach I_{n-1} zurückführt.

Die A- und B-Schnitte des zweiten Systems bezeichnen wir mit A'_n, B'_n, $n = 1, 2, \ldots$. Der Schlitz I_n auf π_+, im positiven Sinn durchlaufen, ist B'_n; ein Weg von I_0 in der obern Halbebene des obern Blattes nach I_n und von dort in der untern Halbebene des untern Blattes zurück nach I_0 liefert den Schnitt A'_n.

Die beiden Schnittsysteme beziehen sich auf zwei verschiedene Arten, die Fläche R auszuschöpfen. R_t bezeichne die über der Kreisscheibe $|z| \leqq t$ gelegene kompakte Teilfläche von R. Trifft die Linie $|z| = t$ den Schlitz I_n, so ist der Rand von R_t zusammenhängend und die Wege A_i, B_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sind dann die Repräsentanten einer Homologiebasis der geschlossenen Wege auf R_t. Geht der Kreis $|z| = t$ zwischen den Schlitzen I_n und I_{n+1} hindurch, so zerfällt der Rand von R_t in zwei Kreise; einer davon, und die A'_i, B'_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, repräsentieren dann eine Basis der eindimensionalen Homologiegruppe auf R_t.

2. Wir betrachten auf R harmonische Differentiale von endlicher Norm. Ein Differential $\omega = a\,dx + b\,dy$ heißt geschlossen, wenn $a_y = b_x$ ist; es heißt harmonisch, wenn es mitsamt seinem konjugierten Differential $\omega^* = -b\,dx + a\,dy$ geschlossen ist. Die positive Quadratwurzel aus $\iint_R (a^2 + b^2)\,dx\,dy$ ist die Norm $\|\omega\|$. Die Gesamtheit der auf R harmonischen Differentiale von endlicher Norm bildet einen Hilbertraum H mit dem innern Produkt

$$(\omega_1, \omega_2) = \iint_R (a_1 a_2 + b_1 b_2)\,dx\,dy\,.$$

Ist C ein geschlossener Weg auf R, so setzen wir $\int_C \omega = \omega(C)$, d. i. die Periode des Integrals $\int \omega$ längs C. Wir haben die Aufgabe, die Norm $\|\omega\|$ bzw. das innere Produkt (ω_1, ω_2) durch die A- und B-Perioden von ω und ω^* bzw. ω_i und ω_i^* $(i = 1, 2)$ darzustellen. Je nach der metrischen Struktur der Fläche ist hiefür das erste oder das zweite Schnittsystem geeignet.

Zur Beschreibung der in Frage stehenden Größe betrachten wir die Jordankurven der z-Ebene, welche einen festen Kreis $|z| = r_0$, auf dessen Größe es nicht ankommt, vom unendlich fernen Punkt trennen und mit der positiven reellen Achse genau einen Schnittpunkt haben. Diese Kurven zerfallen in zwei Klassen. Die Kurven der Klasse C^0 treffen keinen der Schlitze I_n und die Kurven der Klasse C^1 treffen genau einen Schlitz. λ_{C^i} sei die *Extremallänge*[5]) der Kurvenmenge C^i $(i = 0, 1)$. Die Vereinigungsmenge $C^0 \cup C^1$ enthält die Kreise $|z| = r$ mit $r > r_0$; es ist also $\lambda_{C^0 \cup C^1} = 0$ und wegen der Ungleichung von *Strebel-Hersch*[6]) $\lambda^{-1}_{C^0 \cup C^1} \leqq \lambda^{-1}_{C^0} + \lambda^{-1}_{C^1}$ *können* λ_{C^0} *und* λ_{C^1} *nicht gleichzeitig positiv sein.* Nun gilt

Satz 1. *Für beliebige* ω_1 *und* ω_2 *aus* H *und eine zugehörige Teilfolge* n_ν *der natürlichen Zahlen ist*

$$(\omega_1, \omega_2) = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{\kappa=1}^{n_\nu} (\omega_1(A_\kappa)\, \omega_2^*(B_\kappa) - \omega_1^*(A_\kappa)\, \omega_2(B_\kappa)) \tag{1}$$

im Falle $\lambda_{C^1} = 0$ *und*

$$(\omega_1, \omega_2) = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{\kappa=1}^{n_\nu} (\omega_1(A'_\kappa)\, \omega_2^*(B_\kappa) - \omega_1^*(A'_\kappa)\, \omega_2(B'_\kappa)) \tag{1'}$$

im Falle $\lambda_{C^0} = 0$.

3. Die besondere Symmetrie der Fläche R gestattet Satz 1 auf ein analoges Problem im Schlitzgebiet π zu reduzieren. Wir betrachten in π eindeutige harmonische Funktionen u mit endlichem Dirichletintegral $D(u)$, welche auf den Schlitzen I_n konstant sind. Die Werte von u auf den Schlitzen bezeichnen wir mit p_n und normieren die noch freie additive Konstante so, daß $p_0 = 0$ wird. Diese harmonischen Funktionen mit $D(u, u')$ als innerem Produkt bilden einen Hilbertraum H_0. Wir setzen $\Delta q_n = \int_{I_n} du^*$, $n = 0, 1, \ldots$, wo I_n in bezug auf π im positiven Sinne durchlaufen wird, $q_n = \sum_{\kappa=0}^{n-1} \Delta q_\kappa$ und $\Delta p_n = p_n - p_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Wegen $q_1 = \Delta q_0$ gilt dann

$$\begin{aligned} \Delta q_n &= q_{n+1} - q_n\,, & p_n &= \sum_{\kappa=1}^{n} \Delta p_\kappa\,, \\ q_n - q_1 &= \sum_{\kappa=1}^{n-1} \Delta q_\kappa\,, & \Delta p_n &= p_n - p_{n-1}\,, \end{aligned} \tag{2}$$

[5]) vgl. *L. Ahlfors und A. Beurling*, Acta math. Bd. 83 (1950) sowie, für die hier verwendete Modifikation, *J. Hersch, Longueurs extrémales et théorie des fonctions.* Comment. Math. Helv. vol. 29, p. 301—337.

[6]) vgl. *K. Strebel, Eine Ungleichung für extremale Längen.* Ann. Acad. Sci. Fenn., A I, Nr. 90 (1951) sowie J. Hersch, loc. citat., p. 306

für $n = 1, 2, \ldots$. Es ist ferner $q_n = du^*(B_n)$, $\Delta q_n = du^*(B'_n)$ und Δp_n bzw. p_n sind die Halbperioden von u entlang A_n bzw. A'_n.

Das Satz 1 entsprechende Resultat lautet:

Satz 2. *Für beliebige u_1 und u_2 aus H_0 und eine zugehörige Teilfolge n_ν der natürlichen Zahlen ist*

$$D(u_1, u_2) = -\lim_{\nu \to \infty} \sum_{\kappa=1}^{n_\nu} \Delta p_\kappa^{(1)} \cdot q_\kappa^{(2)} \quad \textit{im Falle } \lambda_{C1} = 0 \tag{3}$$

und

$$D(u_1, u_2) = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{\kappa=1}^{n_\nu} p_\kappa^{(1)} \Delta q_\kappa^{(2)} \quad \textit{im Falle } \lambda_{C0} = 0. \tag{3'}$$

Die beiden Formeln (3) und (3′) verallgemeinern wohlbekannte Beziehungen bei endlichvielfach zusammenhängenden Gebieten. In diesem Falle sind die beiden Formeln identisch, was man übrigens wegen $\sum_{\kappa=0}^{N-1} \Delta q_\kappa = 0$ beim Zusammenhangsgrad N aus (3) nachrechnen kann. Bei unendlichem Zusammenhang aber nimmt (3′) vermittels (2) die Gestalt

$$D(u_1, u_2) = -\lim_{\nu \to \infty} \sum_{\kappa=1}^{n_\nu} \Delta p_\kappa^{(1)} (q_\kappa^{(2)} - q_{n_\nu+1}^{(2)}) \tag{3''}$$

an. Es wird sich später ergeben, daß im Falle $\lambda_{C0} = 0$, wo also (3′) und (3″) gelten, $\lim_{\nu \to \infty} q_{n_\nu+1}^{(2)} = 0$ ist. Die Glieder $(q_\kappa^{(2)} - q_{n_\nu+1}^{(2)}) \Delta p_\kappa^{(1)}$ konvergieren also bei festem κ gegen die entsprechenden Glieder $q_\kappa^{(2)} \Delta p_\kappa^{(1)}$ in (3). Wenn man am ersten Schnittsystem festhalten will, so scheint im Falle $\lambda_{C1} > 0$ gegenüber (3) ein Summationsverfahren, wie es in (3″) zum Ausdruck kommt, nötig zu sein[7]). Wiederum im Falle $\lambda_{C0} = 0$ ist aus dem gleichen Grunde gemäß (2) $-q_1 = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{\kappa=1}^{n_\nu} \Delta q_\kappa$.

4. *Reduktion von Satz 1 auf Satz 2.* Wir definieren auf R eine antikonforme Selbstabbildung s: Zwei Punkte auf verschiedenen Blättern, deren Grundpunkte zur reellen Achse symmetrisch sind, heißen auf R symmetrisch; sp ist der zu p symmetrische Punkt auf R. Auf den Schlitzen ist $sp = p$; sie bilden die Symmetrielinien.

Die Spiegelung s bewirkt eine Abbildung von H in sich. Ist nämlich $\omega(p) = a(p)dx + b(p)dy$ ein Element aus H, so ist auch das vermittels s verpflanzte Differential $s\,\omega(p) = a(sp)dx - b(sp)dy$ ein Element aus H und es gilt

$$\| s\omega \| = \| \omega \|, \qquad s(s\omega) = \omega, \qquad s(\omega^*) = -(s\omega)^*. \tag{4}$$

[7]) *L. V. Ahlfors* (loc. cit.) hat die Existenz eines Summationsverfahrens für speziell konstruierte kanonische Homologiebasen auf Flächen der Klasse O_G allgemein nachgewiesen.

Setzen wir

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(\omega + s\,\omega), \qquad \tau = \tfrac{1}{2}(\omega - s\,\omega),$$

so ist $s\sigma = \sigma$ und $s\tau = -\tau$ und daher

$$\omega = \sigma + \tau$$

die Summe eines symmetrischen und antisymmetrischen Differentials aus H. Wegen (4) ist τ^* symmetrisch und σ^* antisymmetrisch.

Auf den Schlitzen I_n ist $\sigma = a\,dx$ und $\tau = b\,dy$. Es verschwindet also τ entlang der Schlitze und daher existiert ein Element u aus H_0 mit $du = \tau$ auf π_+ und in gleicher Weise ein Element $v \in H_0$ mit $dv = \sigma^*$ oder $\sigma = -dv^*$ auf π_+. Mit $\omega_\kappa = \sigma_\kappa + \tau_\kappa$, $\sigma_\kappa = -dv_\kappa^*$, $\tau_\kappa = du_\kappa^*$, $\kappa = 1, 2$, wird dann wegen $(\sigma, \tau) = 0$

$$(\omega_1, \omega_2)_R = (\sigma_1, \sigma_2)_R + (\tau_1, \tau_2)_R = 2D_\pi(u_1, u_2) + 2D_\pi(v_1, v_2).$$

Es ist ferner $\tau(A_n) = 2\Delta p_n$, $\tau^*(B_n) = -q_n$ und daher im Falle $\lambda_{C^1} = 0$ gemäß Satz 2

$$D(u_1, u_2) = \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty \tau_1(A_n)\,\tau_2^\kappa(B_n)$$

und entsprechend

$$D(v_1, v_2) = -\tfrac{1}{2}\sum_1^\infty \sigma_1^*(A_n)\,\sigma_2(B_n).$$

Daraus folgt wegen $\sigma(A_n) = 0$ und $\tau(B_n) = 0$ (B_n und $-sB_n$ beranden ein kompaktes Teilgebiet von R und $\tau(B_n)$ ist gleich $-\tau(sB_n)$) die Formel (1) des Satzes 1. Ganz analog wird der Fall $\lambda_{C^0} = 0$ behandelt.

5. *Beweis von Satz 2 im Falle* $\lambda_{C^1}=0$[8]. Es sei c_1 irgendeine Kurve aus C^1 (Nr. 2) und I_{n+1} der Schlitz, den c_1 trifft. c_1 berandet zusammen mit den Schlitzen $I_0, I_1, \ldots, I_n$ und einem Teil des Schlitzes I_{n+1} ein Teilgebiet π_n von π, das durch einen Schnitt entlang der positiven reellen Achse von I_0 bis I_{n+1} in ein einfachzusammenhängendes Gebiet π_n' verwandelt wird. Sind nun u_1 und u_2 zwei Funktionen aus H_0, so folgt aus der Konstanz von u auf den Schlitzen und aus der Eindeutigkeit von u^* (konjugiert harmonische Funktion zu u) in π_n' zusammen mit den in Nr. 3 getroffenen Bezeichnungen

$$\iint_{\pi_n} \operatorname{grad} u_1 \cdot \operatorname{grad} u_2 \cdot dx\,dy = \sum_{\kappa=1}^{n} q_\kappa^{(2)} \Delta p_\kappa^{(1)} + \int_{C_1} u_2^* du_1\,. \qquad (5)$$

[8]) Dies ist eine Modifikation des von *J. P. Myrberg* (loc. citat.) angewandten Verfahrens.

Die Differentiale $\varphi_\kappa = du_\kappa + i du_\kappa^* = f_\kappa(z)dz$, $\kappa = 1, 2$, sind analytisch. Wir setzen

$$\int_{C_1} (|\varphi_1| + |\varphi_2|) = \varepsilon \tag{6}$$

und wollen das Integral auf der rechten Seite von (5) abschätzen. Trivialerweise ist $\int_{C_1} |du_\kappa| < \varepsilon$ und $\int_{C_1} |du_\kappa^*| < \varepsilon$, $\kappa = 1, 2$. Anderseits ist u_2^* in (5) nur bis auf eine additive Konstante bestimmt; die linke Seite und das erste Glied auf der rechten Seite von (5) sind gegenüber solchen additiven Konstanten unempfindlich, also muß es auch das Integral auf der rechten Seite sein, was wegen $\int_{C_1} du_1 = 0$ auch direkt ersichtlich ist. Wählen wir also die noch freie Konstante so, daß u_2^* in einem Punkt auf c_1 verschwindet, so ist $|u_2^*| < \varepsilon$ auf c_1 und

$$\left| \int_{C_1} u_2^* du_1 \right| < \varepsilon^2 . \tag{7}$$

Es kommt also darauf an, eine wachsende Folge von Gebieten π_n von der obigen Art zu bestimmen, welche π ausschöpft, so daß die nach (6) zu den Rändern c_1 gehörigen ε gegen null konvergieren. Zu dem Zwecke soll kurz an den Begriff der Extremallänge[9]) erinnert werden. Wenn eine in π nicht-negative Funktion $\varrho(z)$ für alle $c_1 \in C^1$ die Ungleichung $\int_{C_1} \varrho(z) |dz| \geqq 1$ erfüllt, so heißt ϱ für die Kurvenmenge C^1 zulässig. Setzen wir $A(\varrho) = \iint_\pi \varrho^2(z) dx dy$, so ist $\lambda_{C^1}^{-1} = \operatorname*{Inf}_{(\varrho)} A(\varrho)$, für alle zulässigen ϱ, der reziproke Wert der Extremallänge von C^1. Wichtig ist für uns der Fall, wo es kein zulässiges ϱ mit $A(\varrho) < \infty$ gibt. Dann ist $\lambda_{C^1} = 0$. Bei gegebenen u_1, u_2 wählen wir $\varrho(z) = |f_1(z)| + |f_2(z)|$. Dann ist

$$A(\varrho) \leqq 2 \iint_\pi (|f_1|^2 + |f_2|^2) dx dy = 2D(u_1) + 2D(u_2) < \infty .$$

Es kann also die Größe ε in (6) nicht für alle $c_1 \in C^1$ eine positive Konstante η übersteigen, weil sonst u_1/η und u_2/η an Stelle von u_1 und u_2 ein zulässiges ϱ mit endlichem $A(\varrho)$ liefern würden. Es gilt also in C^1 eine Folge von Kurven c_1, deren zugehörige ε gegen null konvergieren.

Diese c_1 sollten aber gegen den unendlich fernen Punkt konvergieren. Um dies sicherzustellen, wählen wir irgendein $r > r_0$, bezeichnen mit C_r^1 jene Teilmenge von C^1, deren Elemente mit $|z| \leqq r$ keinen Punkt gemeinsam haben, und mit C^* die Komplementärmenge von C_r^1 in bezug auf C^1. Nun ist $\lambda_{C^*} > 0$ (man kann leicht ein zulässiges ϱ mit

---

[9]) vgl. *J. Hersch*, loc. citat., p. 306

endlichen $A(\varrho)$ angeben) und auf Grund der Ungleichung von *Strebel-Hersch* ist $\lambda_{C^1}^{-1} \leqq \lambda_{C^*}^{-1} + \lambda_{C_r^1}^{-1}$. Es verschwindet also mit λ_{C^1} auch $\lambda_{C_r^1}$. Also gibt es außerhalb jedes Kreises $|z| = r > r_0$ eine Kurve c_1 aus C^1, für welche die Größe ε in (6) eine beliebig vorgegebene positive Zahl nicht übersteigt. Daraus folgt in Verbindung mit (5) und (7) die Behauptung von Satz 2 im Falle $\lambda_{C^1} = 0$.

6. *Beweis von Satz 2 im Falle* $\lambda_{C^0} = 0$.

C_r^0 bezeichnet die Menge der Kurven aus C^0 (Nr. 2), die außerhalb des Kreises $|z| \leqq r$ verlaufen, C_{rR}^0 die Menge der Kurven aus C^0 im Kreisring $r < |z| < R$. Wir setzen voraus, daß die Kreise $|z| = r$ und $|z| = R$ die Schlitze I_n nicht treffen und bilden den Durchschnitt π_{rR} des Gebietes π mit dem Ring $r < |z| < R$ konform auf ein Kreisbogenschlitzgebiet ab, so daß der innere und äußere Kreis ($|z| = r$, $|z| = R$) von π_{rR} in die Kreise $|w| = 1$ und $|w| = a (> 1)$ übergehen. Die im Ring gelegenen Schlitze werden auf konzentrische Kreisbogenschlitze abgebildet. Es ist $2\pi/\log a = \lambda_{C_{rR}^0}$, d. i. die Extremallänge der Kurvenmenge C_{rR}^0, die wir kürzer mit λ_{rR} bezeichnen. Die Schar der Kurven, welche im Ringgebiet $1 < |w| < a$ die innere Kontur mit der äußern verbinden, hat die Extremallänge $\log a/2\pi$. Diesen entsprechen im Radialschlitzgebiet π_{rR} die Kurven und Kurvensysteme, die zusammen mit den Schlitzen die beiden ausgezeichneten Randkonturen $|z| = r$ und $|z| = R$ miteinander verbinden. Es wird also $|z| = r$ direkt mit $|z| = R$ verbunden oder zuerst mit einem Schlitz I_n, und dieser Schlitz dann direkt mit $|z| = R$ oder mit einem zweiten Schlitz I_n, usw. Wir bezeichnen diese Kurvenmenge mit $\overline{C}_{rR}$; es ist $\log a/2\pi = \lambda_{\overline{C}_{rR}}$, d. i. die Extremallänge der Menge $\overline{C}_{rR}$, die wir kurz mit $\overline{\lambda}_{rR}$ bezeichnen, und daher

$$\lambda_{rR} \cdot \overline{\lambda}_{rR} = 1 . \tag{8}$$

Nach Voraussetzung ist $\lambda_{C^0} = 0$; analog wie in Nr. 5 folgt, daß für jedes $r > r_0$ auch $\lambda_{C_r^0}$ verschwindet. Wie am Schluß (Nr. 7) noch bewiesen wird, ist für jedes feste $r > r_0$

$$\lim_{R \to \infty} \lambda_{rR} = \lambda_{C_r^0} = 0 . \tag{9}$$

Nun wählen wir ein u_1 und ein u_2 aus H_0 und setzen $\varphi_\kappa = du_\kappa + i\,du_\kappa^* = f_\kappa(z)dz$, $\kappa = 1, 2$, und $M(t) = \operatorname*{Max}_{|z|=t} |u_1|$. Zu jedem festen

$r > r_0$ gibt es wegen (9) ein R mit $\lambda_{rR} < \mathrm{Min}\,(1, M^{-2}(r))$. Dann ist wegen (8) $\bar{\lambda}_{rR} > M^2(r)$. Wir setzen $\varrho(z) = |f_1(z)| + |f_2(z)|$ in π_{rR} und $\varrho(z) = 0$ außerhalb. Dann ist

$$A(\varrho) \leqq 2\iint_{\pi_{rR}} (|f_1|^2 + |f_2|^2)\,dx\,dy = 2D_{\pi_{rR}}(u_1) + 2D_{\pi_{rR}}(u_2)\,. \tag{10}$$

Aus dem Begriff der Extremallänge folgt nun sofort, daß ein c_0 aus C^0_{rR} existiert mit

$$\int_{c_0} \left\{ \begin{matrix} |du_1| \\ |du_2^*| \end{matrix} \right\} < \int_{c_0} \varrho\,|dz| < \sqrt{2\lambda_{rR}\cdot A(\varrho)} \tag{11}$$

und ein $\bar{c}$ aus $\bar{C}_{rR}$ mit

$$\int_{\bar{c}} |du_1| < \int_{\bar{c}} \varrho\,|dz| < \sqrt{2\bar{\lambda}_{rR}\cdot A(\varrho)} \tag{12}$$

Diese c_0 und $\bar{c}$ haben sicher einen Schnittpunkt z'. Wegen (12) ist dort

$$|u_1(z')| < M(r) + \sqrt{2\bar{\lambda}_{rR}\cdot A(\varrho)} < \sqrt{\bar{\lambda}_{rR}}\,(1 + \sqrt{2A(\varrho)})$$

und aus (12) folgt dann

$$|u_1| < \sqrt{\bar{\lambda}_{rR}}\,(1 + \sqrt{2A(\varrho)}) + \sqrt{2\lambda_{rR}\cdot A(\varrho)}$$

auf c_0. In Verbindung mit (11) folgt weiter

$$\begin{aligned} \left|\int_{C_0} u_1\,du_2^*\right| &\leqq \int_{C_0} |u_1|\,|du_2^*| \\ &< [\bar{\lambda}_{rR}^{1/2}\,(1 + (2A(\varrho))^{1/2}) + (2\lambda_{xR}\cdot A(\varrho))^{1/2}]\,(2\lambda_{rR}\cdot A(\varrho))^{1/2} \\ &< (2A(\varrho))^{1/2}\,(1 + (2A(\varrho))^{1/2}) + 2A(\varrho)\,. \end{aligned}$$

Nun ergibt sich aus (10), daß $A(\varrho)$ mit unbegrenzt wachsendem r beliebig klein wird und deshalb existiert außerhalb jedes Kreises $|z| = r$ eine Kurve c_0 aus C^0, für welche $\left|\int_{C_0} u_1\,du_2^*\right|$ eine beliebig vorgegebene positive Zahl nicht übersteigt. Mit den in Nr. 3 getroffenen Bezeichnungen ist aber

$$\iint_{\pi_0} \mathrm{grad}\,u_1\cdot\mathrm{grad}\,u_2\,dx\,dy = \sum_{\kappa=1}^{n} p_\kappa^{(1)}\,\Delta q_\kappa^{(2)} + \int_{C_0} u_1\,du_2^*\,,$$

wenn π_0 das von c_0 in π berandete Gebiet bezeichnet und genau die Schlitze $I_0, I_1, \ldots, I_n$ enthält. Dies ergibt mit dem oben erhaltenen Resultat die Behauptung von Satz 2 im Falle $\lambda_{C^0} = 0$.

Gleichzeitig liefert (11) die im Anschluß an Satz 2 gegebene Behauptung $\lim\limits_{\nu \to \infty} q^{(2)}_{n_\nu+1} = 0$.

7. Es verbleibt noch die Gleichung (9) zu beweisen. Wegen der Monotonieeigenschaft der Extremallänge ist λ_{rR} mit wachsendem R monoton abnehmend. Wir setzen $\lim\limits_{R \to \infty} \lambda_{rR} = \Lambda$ und zeigen: Unter der Annahme $\Lambda > 0$ gilt $\Lambda = \lambda_{C_r^0}$. Dies führt dann wegen $\lambda_{C_r^0} = 0$ zum Widerspruch.

Es liefere $w(z)$ die zu Beginn von Nr. 6 betrachtete konforme Abbildung des Gebietes π_{rR} auf ein Kreisbogenschlitzgebiet mit den ausgezeichneten Randkonturen $|w| = 1$ und $|w| = a$. Die in π_{rR} harmonische Funktion $u = \log|w(z)|$ ist auf den Randkomponenten konstant und für alle $c \in C^0_{rR}$ gilt $\int_C du^* = 2\pi$. Also ist

$$\lambda_{rR} = (2\pi)^2 / D(u) \tag{13}$$

und u hat folgende Extremaleigenschaft: Unter allen in π_{rR} harmonischen Funktionen h mit $\int_C dh^* = 2\pi$, $c \in C^0_{rR}$, hat u das kleinste Dirichletintegral. Denn es ist $\int_{B_n'} du^* = \int_{B_n'} dh^* = 0$ für alle in π_{rR} gelegenen Schlitze und daher $D(u, u - h) = 0$.

Nun wählen wir eine gegen ∞ strebende Folge R_n und betrachten die zu den Gebieten $\pi_{rR_n} = \pi_n$ gehörigen Extremalen $u_n = \log|w_n(z)|$. Wegen (13) ist $\lim\limits_{n \to \infty} D(u_n) = (2\pi)^2/\Lambda < \infty$. Ferner gilt $D_{\pi_n}(u_n, u_m - u_n) = 0$ für $m > n$, weil u_m in π_n Konkurrenzfunktion ist zu u_n; daher ist $D_{\pi_n}(u_m - u_n) < D_{\pi_m}(u_m) - D_{\pi_n}(u_n)$ und somit $\lim\limits_{\substack{m, n \to \infty \\ m > n}} D_{\pi_n}(u_m - u_n) = 0$. Daraus folgt die lokal gleichmäßige Konvergenz der u_n gegen eine harmonische Grenzfunktion u (denn die u_n verschwinden alle auf $|z| = r$) und schließlich $D(u) = \lim\limits_{n \to \infty} D(u_n) = (2\pi)^2/\Lambda$ und $\int_C du^* = 2\pi$ für alle $c \in C^0_r$. $\varrho = \dfrac{1}{2\pi}\,|\operatorname{grad} u|$ liefert also für die Kurvenmenge C^0_r ein zulässiges ϱ mit $A(\varrho) = 1/\Lambda$; daher ist $\lambda_{C_r^0} \geqq \Lambda$, anderseits (wegen der Monotonie der Extremallänge) $\lambda_{C_r^0} \leqq \Lambda$ und somit $\lambda_{C_r^0} = \Lambda$.

Eingegangen den 18. März 1955.