Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 31 (1956-1957)

Artikel: Über Eisensteinsche Reihen und automorphe Formen von der Dimension - 1.

Autor: Petersson, Hans

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515700

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über EISENSTEINsche Reihen und automorphe Formen von der Dimension -1

von HANS PETERSSON, Münster

1. EISENSTEINsche Reihen von der Dimension -1 sind systematisch in einiger Allgemeinheit zum ersten Male von E. HECKE [1] untersucht worden. Durch Anwendung neuer Methoden und Gedanken ergab sich die explizite Konstruktion eines Systems ganzer Modulformen in einer komplexen Variablen mit *folgenden Eigenschaften:*

1. Die Modulformen gehören zur Dimension -1 und zur Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(N)$ einer beliebigen Stufe $N>2$. Das System wird durch die Transformationen der vollen Modulgruppe als Ganzes auf sich abgebildet.
2. Die Funktionen des Systems besitzen Fourier-Koeffizienten relativ einfacher Bauart (Teilersummen).
3. Das System läßt sich explizit in ein linear-äquivalentes System überführen, das auf die Spitzen eines Fundamentalbereichs $\mathfrak{F}_N$ der $\Gamma(N)$ wie folgt bezogen ist: Es enthält zu jeder Spitze von $\mathfrak{F}_N$ eine Modulform, von der der Imaginärteil des konstanten Gliedes in dieser Spitze den Wert 1, in jeder anderen Spitze den Wert 0 hat.
4. Es gilt der Reduktionssatz: Zu jeder ganzen Modulform von der Dimension -1 und der Stufe N gibt es ein lineares Kompositum der Funktionen des Systems derart, daß die Differenz in allen Spitzen verschwindet.

Demgegenüber muß man das in [1] angedeutete Verfahren, das zur Bestimmung des Ranges der von den Funktionen des Systems aufgespannten Schar $\mathfrak{E}_N$ und zugleich der zwischen diesen Funktionen bestehenden Relationen dient, als umständlich und undurchsichtig beurteilen. Von einer *Kennzeichnung* der Schar $\mathfrak{E}_N$ *durch innere Eigenschaften* ist in [1] noch nicht die Rede.

Eine grundsätzliche Änderung dieser Situation entsteht nach [2] durch Anwendung des *RIEMANN-ROCHschen Satzes* und des Prinzips der *Metrisierung*. Die Auswertung der Metrisierungsintegrale führte in Verbindung mit dem Reduktionssatz zu der *Kennzeichnung der Schar* $\mathfrak{E}_N$ als der Schar der zu allen ganzen Spitzenformen orthogonalen ganzen Modulformen von der Dimension -1 und der Stufe N. Diese Aussage ist nur ein Sonderfall eines allgemeinen Sachverhalts, nach dem (schlechthin) alle irgendwo auftretenden Reihen, die man aus

formalen Gründen als Eisensteinreihen bezeichnet hat, sich einem analogen metrischen Zusammenhang unterordnen.

Bei analytischen automorphen Formen hat dieser Zusammenhang folgende *Struktur:* Es sei Γ eine Grenzkreisgruppe von erster Art, r eine reelle Zahl >0, v ein Multiplikatorsystem zu Γ und $-r$ vom Betrage 1, $\mathfrak{C}$ die Schar der ganzen Formen, $\mathfrak{C}^+$ die Schar der ganzen Spitzenformen $\{\Gamma, -r, v\}$, $\mathfrak{N}$ die Normalschar von $\mathfrak{C}$, das heißt die Schar derjenigen Formen von $\mathfrak{C}$, welche auf der Schar $\mathfrak{C}^+$ senkrecht stehen. Dann ist $\mathfrak{C}$ die direkte Summe von $\mathfrak{C}^+$ und $\mathfrak{N}$, es gibt also zu jeder ganzen Form $\{\Gamma, -r, v\}$ eine und nur eine Form aus $\mathfrak{N}$, welche mit jener die konstanten Glieder in den Entwicklungen nach den Ortsvariablen aller der Spitzen von Γ gemein hat, in denen v unverzweigt ist. Dieser Sachverhalt ist als eine Verschärfung von 4. aufzufassen. Ebenso stellt ein Satz über das Verhalten von $\mathfrak{N}$ bei Transformation mit einer nicht in Γ gelegenen linearen Abbildung eine Verschärfung der zweiten Aussage von 1. dar.

Nach dem oben Gesagten kann man als die *Analoga der Schar $\mathfrak{E}_N$ bei einem allgemeinen Γ von erster Art* unbedenklich diejenigen Normalscharen $\mathfrak{N}$ definieren, welche zu $r = 1$ und einem v mit $v^2 = 1$ gehören; für gegebenes Γ existieren solche v genau dann, wenn Γ keine elliptischen Fixpunkte gerader Ordnung hat, und ihre Anzahl (also auch die Anzahl der verschiedenen Scharen $\mathfrak{N}$) ist in diesem Falle eine Potenz von 2. Für ein beliebiges zu Γ und $-r = -1$ gehöriges v vom Betrage 1 bezeichne a die Anzahl derjenigen Spitzen eines Fundamentalbereichs $\mathfrak{F}$ von Γ, in denen v unverzweigt (das heißt $\varkappa = 0$) ist, und $u(-1, v)$ den Rang von $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\Gamma, -1, v)$. Dann gibt der RIEMANN-ROCHsche Satz unmittelbar

$$u(-1, v) + u(-1, v^{-1}) = a \; ; \tag{1.1}$$

im Falle $v^2 = 1$ ist also $a = 2m$ gerade und

$$\operatorname{Rg} \mathfrak{N}(\Gamma, -1, v) = u(-1, v) = m \; . \tag{1.2}$$

Wie aus der direkten Zerlegung $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^+ + \mathfrak{N}$ hervorgeht, besteht eine umkehrbar-eindeutige linear-distributive Beziehung zwischen den Funktionen von $\mathfrak{N}$ auf der einen und den Vektoren eines gewissen linearen Vektorgebildes $\mathfrak{R}$ im komplexen a-dimensionalen Vektorraum $\mathfrak{V}^{(a)}$ auf der anderen Seite. Im Falle $v^2 = 1$ ist $\mathfrak{R}$ *isotrop*, das heißt das algebraische Skalarprodukt irgend zweier Vektoren von $\mathfrak{R}$ verschwindet; $\mathfrak{R}$ hat hier den Rang m. Dieser Fall wird weiterhin ausführlicher diskutiert.

Da die Struktur der Schar $\mathfrak{N}$ mit der von $\mathfrak{R}$ übereinstimmt, kann *die Aufgabe gestellt werden*, aus den Eigenschaften von $\mathfrak{R}$ neue Aussagen über die Funktionen von $\mathfrak{N}$ abzuleiten, insbesondere solche, die bekannten Sätzen über die

EISENSTEINschen Reihen entsprechen. Mit Rücksicht darauf, daß Übertragungen von 1. und 4. in viel allgemeinerem Rahmen bereits vollzogen sind, daß die Rangbestimmung vorliegt und daß arithmetische Zusammenhänge vom Typus 2. ganz unglaubwürdig sind, wird man versuchen, zunächst die Aussage 3. auf die Scharen $\mathfrak{N}$ mit $r = v^2 = 1$ zu übertragen, das heißt die *Existenz eines Erzeugendensystems der Schar* $\mathfrak{N}$ *mit dem genannten Verhalten in den Spitzen* zu beweisen; sodann wird man versuchen, *die Relationen aufzustellen*, die zwischen den Funktionen dieses und anderer Erzeugendensysteme bestehen.

Im ersten, rein algebraischen Teil der folgenden Untersuchung zeigt sich, daß diese Aufgaben *rein algebraisch* und mit bescheidenem Aufwand vollständig gelöst werden können. Darüber hinaus resultiert eine abschließende Aussage über isotrope Vektorgebilde $\mathfrak{R}$ maximalen Ranges im komplexen $\mathfrak{V}^{(2m)}$ vom Charakter einer Parameterdarstellung. Als Punkte des Parameterraumes, auf die diese $\mathfrak{R}$ eineindeutig bezogen sind, erscheinen die Links-Nebenklassen einer Untergruppe symplektischer Matrizen innerhalb der reellen orthogonalen Gruppe des $\mathfrak{V}^{(2m)}$.

Das eigentliche Objekt dieser Überlegungen ist eine das betreffende Gebilde $\mathfrak{R}$ eindeutig kennzeichnende quadratische Matrix G des Grades $2m$, die *sowohl reell-orthogonal als auch schiefsymmetrisch* ist. In jedem Falle, in dem die Gruppe Γ durch ein bekanntes arithmetisches Gesetz bestimmbar und ein System von $2m$ Erzeugenden der Schar $\mathfrak{N}$ explizit konstruierbar ist, gewinnt man so eine *konkrete* Matrix G der angegebenen Art. Für die *Hauptkongruenzgruppe* $\Gamma(N)$ ergibt sich durch die früher übersehene Möglichkeit, die Nullwerte gewisser ζ-Reihen mit Kongruenzbedingungen zu berechnen, eine elementare Darstellung der zugehörigen Matrix G, deren Orthogonalität ich nicht direkt bestätigt habe. Identifiziert man Γ mit einer gewissen *Kongruenzgruppe von der Primzahlstufe* q, *die durch die Eigenschaften der* l*-ten Potenzreste* $\bmod q$ erklärt ist, so gelangt man zu einer merklich einfacheren Matrix G, deren Orthogonalität sich durch direkte Rechnung auf Grund der finiten Darstellung der DIRICHLETschen Funktionswerte $L(1, \chi)$ bestätigen läßt.

Andrerseits gewinnt man hier zum ersten Male die Ränge der Normalscharen $\mathfrak{N}(\Gamma, -1, v)$ zu Gruppen Γ eines von FRICKE [5] untersuchten Typus, die *nicht Untergruppen der Modulgruppe* sind, und zu Charakteren v, die *nicht nur die Werte* ± 1 annehmen. Diese Ergebnisse enthalten auch die ersten Andeutungen dahin, daß man im Falle $v^2 \neq 1$ über (1.1), also den RIEMANN-ROCHschen Satz hinaus keine allgemeine Gesetzmäßigkeit zu erwarten hat. Gewisse Beziehungen dieser Gegenstände zu *Relativklassenzahlen* im Bereich absolutabelscher Zahlkörper sind bemerkenswert, obwohl sie sich aus bekannten Zu-

sammenhängen zwischen Modulformen und DIRICHLETschen Reihen verstehen lassen.

Nachdem die Ränge der Normalscharen in den genannten Fällen bestimmt sind, besteht prinzipiell die Möglichkeit, etwas über die *Ränge der Scharen der ganzen Spitzenformen* in den gleichen Klassen zu erfahren. Die genaue Rangbestimmung gelang hier für die Klassen der Dimension -1 bisher nur in numerischen Spezialfällen. An dieser Situation wird auch im folgenden nichts geändert. Man kann aber wenigstens für die ursprünglichen von FRICKE [5] definierten (zu den *Klassenpolygonen* gehörigen) Gruppen $\Phi^0[q]$ im Falle einer Primzahlstufe $q \equiv 3 \mod 4$ $(q > 3)$ die Differenz der Ränge der Scharen ganzer Spitzenformen von der Dimension -1 berechnen, wenn die beiden zugehörigen Multiplikatorsysteme gewisse explizit gegebene (konjugiert-komplexe) Werte haben. Das Problem steht mit einer von HECKE [10] diskutierten Frage über die Eigenwerte der T-Operatoren in Beziehung. Während sich HECKE bekannter Rangzahlen bedienen konnte, besteht hier die Aufgabe gerade darin, diese Rangzahlen oder wenigstens ihre Differenz zu ermitteln. Zur Lösung dieser Aufgabe erweisen sich neben dem RIEMANN-ROCHschen Satz und FRICKEschen Ergebnissen vor allem die *explizite Kenntnis der Multiplikatorwerte der DEDEKINDschen Funktion* $\eta(\tau)$ sowie die Tatsache als entscheidend, daß die zur Gruppe $\Phi^0[q]$ gehörige Modulform $\eta(\tau)\eta\left(\frac{\tau}{q}\right)$ in der oberen τ-Halbebene nicht verschwindet. Beide Phänomene sind wesentlich *transzendenter Natur*. Sie werden hier zur *Berechnung einer elementar-arithmetisch definierten Anzahl elliptischer Fixpunkte* benutzt.

Als Differenz der genannten Rangzahlen ergibt sich so $\frac{1}{2}(h-1)$, wo h die Klassenzahl des imaginär-quadratischen Zahlkörpers $\mathsf{P}(\sqrt{-q})$ bezeichnet.

2. Nach [2] liegt folgende Situation vor: Die Normalschar

$$\mathfrak{N}(\Gamma, -1, v) \qquad (\Gamma \text{ von erster Art}, \ v^2 = 1)$$

ist umkehrbar eindeutig und unter Übertragung der linearen Komposition auf ein lineares Vektorgebilde $\mathfrak{N}$ des Ranges $m = \frac{a}{2}$ im Raum $\mathfrak{V}^{(2m)}$ der sämtlichen Vektoren mit $2m$ komplexen Komponenten bezogen. $\mathfrak{N}$ ist im oben angegebenen Sinne isotrop.

Im folgenden bezeichnen wir mit kleinen deutschen Buchstaben Vektoren, mit großen lateinischen Buchstaben quadratische Matrizen, mit j den Zeilen-, mit k den Spaltenindex der Elemente einer Matrix; Vektoren gelten als Matrizen mit nur einer Spalte; die Elemente aller Matrizen sind komplexe Zahlen;

ist eine Matrix oder ein Vektor reell, so wird dies besonders hervorgehoben; ein oberer Index an dem Symbol einer Matrix (oder eines Vektors) bestimmt deren Zeilenzahl; die Einheitsmatrix wird mit $I = (\delta_{jk})$, die Nullmatrix mit O, der Nullvektor mit $\mathfrak{o}$, der k-te Einheitsvektor mit $\mathfrak{e}_k$ $(1 \leqq k \leqq 2m)$ bezeichnet; ein Punkt über oder rechts oben an dem Symbol einer Matrix oder eines Vektors deutet die Transposition, ein oberer Querstrich den Übergang zu der Matrix mit konjugiert-komplexen Elementen an.

Ein lineares Vektorgebilde $\mathfrak{R}$ im $\mathfrak{V}^{(2m)}$ wird ein *isotropes Vektorgebilde* genannt, wenn für irgend zwei Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ von $\mathfrak{R}$ stets die Relation der Orthogonalität $\dot{\mathfrak{x}}\mathfrak{y} = 0$ erfüllt ist; die Relation $\dot{\bar{\mathfrak{x}}}\mathfrak{y} = 0$ wird unitäre Orthogonalität genannt. Es sei $\mathfrak{R}$ ein isotropes Vektorgebilde im $\mathfrak{V}^{(2m)}$, $m' = \mathrm{Rg}\,\mathfrak{R}$. Da $\mathfrak{R}$ im Orthogonalgebilde von $\mathfrak{R}$ enthalten ist, gilt $m' \leqq 2m - m'$, also $m' \leqq m$. Im folgenden sei $m' = m$.

Es sei πk eine Permutation der $k = 1, 2, \ldots, m$. Die Vektoren $\mathfrak{e}_k + i\,\mathfrak{e}_{m+\pi k}$ $(1 \leqq k \leqq m)$ spannen ein isotropes Vektorgebilde $\mathfrak{S}_\pi$ vom Range m auf. Die Summe aller dieser $\mathfrak{S}_\pi$ besitzt die Basis $\mathfrak{e}_1 - \mathfrak{e}_k, \ldots, \mathfrak{e}_{m+1} - \mathfrak{e}_{m+k}$ $(2 \leqq k \leqq m)$, $\mathfrak{e}_1 + i\,\mathfrak{e}_{m+1}$ und daher den Rang $2m - 1$. Es gibt also, wenn $m > 1$, mehr als nur ein isotropes Vektorgebilde vom Range m.

$\mathfrak{R}$ habe die obige Bedeutung $(m = \mathrm{Rg}\,\mathfrak{R})$. Es sei $\mathfrak{c}_j = \mathfrak{a}_j + i\,\mathfrak{b}_j$ $(1 \leqq j \leqq m)$ eine Basis von $\mathfrak{R}$ und dabei $\mathfrak{a}_j = \frac{1}{2}(\mathfrak{c}_j + \bar{\mathfrak{c}}_j)$. Da $\mathfrak{R}$ außer $\mathfrak{o}$ keinen Vektor mit reellen oder rein imaginären Komponenten enthält, folgt aus einer linearen Relation

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\,\mathfrak{a}_j + \sum_{j=1}^{m} \mu_j\,\mathfrak{b}_j = \mathfrak{o} \qquad \text{mit reellen } \lambda_j, \mu_j\ ,$$

daß

$$\sum_{j=1}^{m} (\lambda_j - i\mu_j)\,\mathfrak{c}_j = i \sum_{j=1}^{m} (-\mu_j\,\mathfrak{a}_j + \lambda_j\,\mathfrak{b}_j)$$

verschwindet, also $\lambda_j = \mu_j = 0$ ist $(1 \leqq j \leqq m)$. Man bestimme jetzt reelle $\alpha_{k\nu}, \beta_{k\nu}$ mit

$$\mathfrak{e}_k = \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_{k\nu}\,\mathfrak{a}_\nu + \sum_{\nu=1}^{m} \beta_{k\nu}\,\mathfrak{b}_\nu \qquad (1 \leqq k \leqq 2m)\ .$$

Dann wird

$$\sum_{\nu=1}^{m} (\beta_{k\nu} + i\alpha_{k\nu})\,\mathfrak{c}_\nu = \mathfrak{g}_k + i\,\mathfrak{e}_k \in \mathfrak{R} \qquad (1 \leqq k \leqq 2m)$$

mit gewissen reellen Vektoren $\mathfrak{g}_k$. Wir zeigen noch, daß diese $\mathfrak{g}_k + i\,\mathfrak{e}_k$ das Gebilde $\mathfrak{R}$ aufspannen. Es gilt

$$\mathfrak{b}_j = \sum_{k=1}^{2m} b_{kj}\,\mathfrak{e}_k \qquad \text{mit reellen } b_{kj} \qquad (1 \leqq j \leqq m)\ ,$$

und hier wird

$$\sum_{k=1}^{2m} b_{kj}(\mathfrak{g}_k + i\,\mathfrak{e}_k) = \sum_{k=1}^{2m} b_{kj}\,\mathfrak{g}_k + i\,\mathfrak{b}_j = \mathfrak{c}_j\ ,$$

weil der Imaginärteil eines Vektors aus $\mathfrak{R}$ den Vektor eindeutig festlegt.

Also besteht zunächst der in der Einleitung angekündigte

Satz 1. *Jedes isotrope Vektorgebilde $\mathfrak{R}$ des Ranges m im komplexen $\mathfrak{V}^{(2m)}$ besitzt ein eindeutig bestimmtes Erzeugendensystem von der Gestalt $\mathfrak{g}_k + i\mathfrak{e}_k$ $(1 \leqq k \leqq 2m)$ mit gewissen reellen Vektoren $\mathfrak{g}_k$.*

Die Matrix $G = G^{(2m)}$ mit den Spalten $\mathfrak{g}_k$ $(1 \leqq k \leqq 2m)$ ist mithin durch $\mathfrak{R}$ eindeutig bestimmt und hat die Eigenschaft

$$(G + iI)^{\cdot}(G + iI) = O\ , \quad \text{d. h.} \quad G\dot{G} = I,\ \dot{G} = -G\ . \tag{2.1}$$

Transformiert man G durch eine unitäre Matrix $U^{(2m)}$ in eine Diagonalmatrix $D = UG\dot{\bar{U}}$, so erhält man aus (2.1) sofort

$$D = (d_j \delta_{jk})\ , \quad |d_j| = 1\ , \quad \bar{D} = U\dot{G}\dot{\bar{U}} = -D\ ,$$

also $d_j = \pm i$. Daher und wegen $\operatorname{Rg} \mathfrak{R} = m$ kann

$$D = D_0 = UG\dot{\bar{U}} = \begin{pmatrix} iI & O^{(m)} \\ O & -iI \end{pmatrix}, \quad G + iI = \dot{\bar{U}}\begin{pmatrix} 2iI & O \\ O^{(m)} & O \end{pmatrix} U \tag{2.2}$$

erreicht werden. In den Bezeichnungen von Satz 1 gilt demnach

Satz 2. *Die Matrix $G = G^{(2m)}$ mit den Spalten $\mathfrak{g}_k$ $(1 \leqq k \leqq 2m)$ ist reell, orthogonal und schiefsymmetrisch. Jede reelle orthogonale schiefsymmetrische Matrix $G = (\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_{2m})$ bestimmt eindeutig ein isotropes Vektorgebilde $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{V}^{(2m)}$. $\mathfrak{R}$ wird von den Vektoren $\mathfrak{g}_k + i\mathfrak{e}_k$ $(1 \leqq k \leqq 2m)$ aufgespannt, die Eigenwerte von G sind gleich i oder $-i$, und der Rang von $\mathfrak{R}$ ist gleich der Vielfachheit des Eigenwertes $+i$ von G, diese ist also höchstens gleich m.*

Für jeden Vektor $\mathfrak{z} = (z_j)$ ist

$$\sum_{k=1}^{2m} z_k(\mathfrak{g}_k + i\mathfrak{e}_k) = (G + iI)\mathfrak{z}\ .$$

$\mathfrak{z}$ heißt Relationenvektor der $\mathfrak{g}_k + i\mathfrak{e}_k$ $(1 \leqq k \leqq 2m)$, wenn $(G + iI)\mathfrak{z} = \mathfrak{o}$ ist. Aus (2.1) folgt

$$(G + iI)(G - iI) = O\ ,$$

und dies besagt, daß die Vektoren $\mathfrak{g}_k - i\mathfrak{e}_k$ $(1 \leqq k \leqq 2m)$, wenn $\mathfrak{R}$ den Rang m hat, das m-dimensionale lineare Vektorgebilde der sämtlichen Relationenvektoren aufspannen. Mithin gilt in den Bezeichnungen von Satz 1

Satz 3. *Das lineare Vektorgebilde der sämtlichen Relationenvektoren des Erzeugendensystems $\mathfrak{g}_k + i\mathfrak{e}_k$ $(1 \leqq k \leqq 2m)$ von $\mathfrak{R}$ ist mit dem zu $\mathfrak{R}$ konjugiert-komplexen Gebilde $\bar{\mathfrak{R}}$ identisch, also wieder ein isotropes Vektorgebilde des Ranges*

m. Bezeichnet $C = C^{(2m)}$ eine umkehrbare Matrix, so bilden die $2m$ Spalten von $(G + iI)C$ auch ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{R}$, und das lineare Vektorgebilde der sämtlichen Relationenvektoren dieses Erzeugendensystems ist $C^{-1}\overline{\mathfrak{R}}$, besteht also aus den Vektoren $C^{-1}\bar{\mathfrak{r}}$ $(\mathfrak{r} \in \mathfrak{R})$. $C^{-1}\overline{\mathfrak{R}}$ ist ein isotropes Vektorgebilde, wenn $C\dot{\bar{C}} = \lambda I$ für einen Skalar λ zutrifft.

Nach diesen sehr einfachen Aussagen über Erzeugendensysteme und deren Relationen untersuchen wir die isotropen Vektorgebilde des Ranges m in $\mathfrak{B}^{(2m)}$ genauer.

Setzt man in fester Bezeichnung

$$D_0 = i\begin{pmatrix} I^{(m)} & O \\ O & -I \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

so ist nach (2.2) $G = \dot{\bar{U}} D_0 U$ durch die unitäre Matrix U eindeutig bestimmt. Man kann aber eine solche Matrix U offenbar nicht willkürlich vorgeben, wenn man erreichen will, daß G reell ist und den Relationen (2.1) genügt. In der Tat erhält man aus $G = \dot{\bar{U}} D_0 U$ unmittelbar zwar

$$G\dot{\bar{G}} = I\ , \quad \dot{\bar{G}} = -G\ , \quad \mathrm{Rg}(G + iI) = m\ ,$$

nicht aber, daß G reell ist. Dies besagt vielmehr

$$D_0 U\dot{U} + U\dot{U}D_0 = O$$

oder $\quad U\dot{U} = \begin{pmatrix} O^{(m)} & P \\ Q & O^{(m)} \end{pmatrix}$ mit unitärem $P^{(m)}$, $Q = \dot{P}$.

Für später benötigen wir einige allgemeine Sätze über die unitäre Diagonal-Transformation n-reihiger quadratischer Matrizen. Zunächst werde der folgende bekannte Satz hervorgehoben: Dann und nur dann läßt sich $V = V^{(n)}$ durch eine unitäre Matrix auf Diagonalgestalt transformieren, wenn V mit $\dot{\bar{V}}$ vertauschbar ist. Unter dieser Voraussetzung ist V genau dann selbst unitär, wenn alle Eigenwerte von V den Betrag 1 haben. – Darüber hinaus gilt

Satz 4. *Dann und nur dann läßt sich $V = V^{(n)}$ durch eine reelle orthogonale Matrix auf Diagonalgestalt transformieren, wenn V mit $\dot{\bar{V}}$ vertauschbar und symmetrisch ist. Unter dieser Bedingung läßt sich V in der Gestalt $Q\dot{Q}$ darstellen $(Q = Q^{(n)})$. Hier kann Q dann und nur dann unitär gewählt werden, wenn V selbst unitär ist.*

Beweis. a) Aus

$$V = RD'\dot{R}, \quad D' = D'^{(n)} = (d'_j \delta_{jk}), \quad R = R^{(n)} = \bar{R}, \quad R\dot{R} = I \tag{2.4}$$

folgt

$$V\dot{\bar{V}} = \dot{\bar{V}}V\ , \qquad V = \dot{V}\ . \tag{2.5}$$

b) Es gelte (2.5). Da Real- und Imaginärteil von V symmetrisch sind, kann ohne Einschränkung $V = B + iD$ mit

$$B = B^{(n)} = \bar{B} = \dot{B}\ , \qquad D = D^{(n)} = (d_j\,\delta_{jk}) = \bar{D}$$

angenommen werden, wo in der Anordnung der d_j keine zwei gleichen durch ein von ihnen verschiedenes getrennt werden. Nun besagt $V\dot{\bar{V}} = \dot{\bar{V}}V$, daß B mit D vertauschbar ist. Daher zerfällt $B + iD$ in längs der Diagonale aufgereihte Teilmatrizen $B_r^* + id_r^*I$ gewisser Grade p_r $(p_1 + p_2 + \ldots = n)$, die nunmehr einzeln reell orthogonal auf Diagonalgestalt transformiert werden können.

c) Es gelte (2.5) und es sei (2.4) erreicht. Man setze $e_j = \sqrt{d_j'}$ $(1 \leqq j \leqq n)$, $D' = E^2$, $E = (e_j\,\delta_{jk})$. Dann wird $V = RE(RE)^{\cdot}$. Ist V unitär, so auch D', also E, also $Q = RE$.

Beispiel. Für $n = 2m$, $V = \begin{pmatrix} O^{(m)} & I \\ I & O \end{pmatrix}$ gilt (2.5). Die Matrizen

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I^{(m)} & I \\ -I & I \end{pmatrix},\quad F = \begin{pmatrix} iI^{(m)} & O \\ O & I \end{pmatrix},\quad T_1 = T_0F = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} iI^{(m)} & I \\ -iI & I \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

sind sämtlich unitär, und man findet

$$V = T_0\begin{pmatrix} -I & O \\ O & I^{(m)} \end{pmatrix}\dot{T}_0 = T_1\dot{T}_1\ .$$

Die allgemeinste unitäre Matrix Q mit $V = Q\dot{Q}$ hat die Gestalt

$$Q = T_1R\ , \qquad \text{wo} \qquad R = R^{(2m)} = \bar{R}\ , \qquad R\dot{R} = I\ . \tag{2.7}$$

Nach Satz 4 kann man nun, wenn eine unitäre Matrix $P = P^{(m)}$ vorgelegt ist, eine unitäre Matrix $U = U^{(2m)}$ mit $U\dot{U} = \begin{pmatrix} O & P \\ \dot{P} & O \end{pmatrix}$ gewinnen; dann erweist sich $G = \dot{\bar{U}}D_0U$ als reell orthogonal und schiefsymmetrisch und bestimmt im Sinne von Satz 2 eindeutig ein isotropes Vektorgebilde $\mathfrak{R}$ vom Range m. Danach erhält man gemäß Satz 2 alle isotropen Vektorgebilde $\mathfrak{R}$ vom Range m, indem man die verschiedenen $G = \dot{\bar{U}}D_0U$ bildet, wo U die unitären Matrizen mit der Eigenschaft

$$U\dot{U} = \begin{pmatrix} O & P \\ \dot{P} & O \end{pmatrix},\qquad P = P^{(m)}\ , \qquad P\dot{\bar{P}} = I \tag{2.8}$$

durchläuft. Wir nennen P, wenn (2.8) zutrifft, das Radikal von U.

Es sei $U_1 = U_1^{(2m)}$ eine unitäre Matrix mit der Eigenschaft (2.8), dem Radikal P_1 und $G = \dot{\bar{U}}_1 D_0 U_1$. Wir setzen $U_1 = SU$, $S = \begin{pmatrix} S_0^{(m)} & S_3 \\ S_1 & S_2 \end{pmatrix}$ und schließen aus

$$D_0 = U_1 G \dot{\bar{U}}_1 = S D_0 \dot{\bar{S}} ,$$

daß $S_1 = S_3 = O$ ist, S_0 und S_2 unitär sind und daß $P_1 = S_0 P \dot{S}_2$ gilt. Dieser Prozeß läßt sich umkehren, das heißt $U_1 = \begin{pmatrix} S_0 & O \\ O & S_2 \end{pmatrix} U$ ist unitär, wenn S_0 und S_2 es sind, hat dann das Radikal $P_1 = S_0 P \dot{S}_2$ und liefert das gleiche G wie U. Daraus folgt, daß jedes G in der Gestalt $\dot{\bar{U}} D_0 U$ dargestellt werden kann, wo U unitär ist und (2.8) mit $P = I$ erfüllt. U läßt sich also nach (2.7) durch $U = T_1 R$ mit reellem orthogonalem $R = R^{(2m)}$ ausdrücken.

Um jetzt eine *Parameterdarstellung aller verschiedenen* G zu gewinnen, hat man nur noch eine Bedingung dafür anzugeben, daß $U = T_1 R$ und

$$U_1 = SU = ST_1 R = T_1 R_1 , \quad R_1 = R_1^{(2m)} = \bar{R}_1 , \quad R_1 \dot{R}_1 = I \tag{2.9}$$

das gleiche G bestimmen; dabei ist als einzige Nebenbedingung $P = P_1 = I$ einzuhalten. Dies besagt einerseits

$$S = \begin{pmatrix} Z & O \\ O & \bar{Z} \end{pmatrix} \quad \text{mit unitärem} \quad Z = Z^{(m)} = X + iY \quad (X, Y \text{ reell}) ,$$

andererseits nach (2.9)

$$R_1 R^{-1} = \dot{\bar{T}}_1 S T_1 = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix} .$$

Die Aussage, daß $Z = X + iY$ unitär sei, ist damit, daß $\begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}$ orthogonal sei, gleichbedeutend, und die Gruppe der unitären $Z^{(m)}$ ist zu der Gruppe $\mathfrak{H}$ der diesen $Z = X + iY$ entsprechenden $H = H^{(2m)} = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}$ isomorph. Damit ergibt sich

Satz 5. *Man erhält die sämtlichen isotropen Vektorgebilde des Ranges m im* $\mathfrak{B}^{(2m)}$ *und jedes von ihnen genau einmal, wenn man (vgl.* (2.3,6))

$$G = \dot{\bar{U}} D_0 U , \qquad U = T_1 R \tag{2.10}$$

setzt und $R^{(2m)}$ *ein volles System reeller orthogonaler Matrizen durchlaufen läßt, welche sich nicht um einen linken Faktor aus* $\mathfrak{H}$ *unterscheiden. Gleichbedeutend*

mit (2.10) *ist die Darstellung*

$$G = \dot{R}\begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix} R \, .$$

Die Gruppe $\mathfrak{H}$ *kann als die Gruppe derjenigen reellen Matrizen* $H = H^{(2m)}$ *gekennzeichnet werden, welche sowohl in der Gestalt* $H = \begin{pmatrix} X^{(m)} & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}$ *darstellbar als auch symplektisch sind.*

Es sei $\mathfrak{R}$ ein isotropes Vektorgebilde des Ranges m. Für $A = A^{(2m)}$ verstehen wir unter $A\mathfrak{R}$ das lineare Vektorgebilde der $A\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r} \in \mathfrak{R}$. Ist $\dot{A}A = \lambda I$, so ist $A\mathfrak{R}$ wieder ein isotropes Vektorgebilde vom Range m. Es sei A insbesondere reell-orthogonal, G habe die Bedeutung von Satz 2. Dann ist $AG\dot{A}$ diejenige Matrix, die in $A\mathfrak{R}$ dieselbe Rolle spielt wie G in $\mathfrak{R}$.

Wir sagen von der reellen orthogonalen Matrix A, sie vermittle einen *euklidischen Automorphismus* von $\mathfrak{R}$, wenn $A\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ ist. In dieser Terminologie gilt

Satz 6. *Alle isotropen Vektorgebilde* $\mathfrak{R}$ *des Ranges* m *im* $\mathfrak{B}^{(2m)}$ *entstehen aus einem beliebigen von ihnen, etwa* $\mathfrak{R}_0$, *durch die Transformationen* $\mathfrak{R} = A\mathfrak{R}_0$ *mit den reellen orthogonalen Matrizen* $A = A^{(2m)}$. *Für* $\mathfrak{R}_0$ *kann das von den Vektoren* $i\mathfrak{e}_j - \mathfrak{e}_{m+j}$ $(1 \leqq j \leqq m\,;\, R = I)$ *aufgespannte Gebilde gewählt werden. Die sämtlichen euklidischen Automorphismen eines beliebig gegebenen isotropen Vektorgebildes* $\mathfrak{R}$, *das im Sinne von Satz* 5 *der reellen orthogonalen Matrix* R *entspricht, werden von den reellen orthogonalen Matrizen* A *aus* $R^{-1}\mathfrak{H}R$ *vermittelt.*

3. Es sei N eine natürliche Zahl, $\Gamma[N]$ die Gruppe der Modulmatrizen $L = L^{(2)}$, welche elementweise $\equiv \pm I \bmod N$ sind, v_0 der ungerade Charakter auf $\Gamma[N]$ mit den Werten $v_0(L) = (-1)^k$ für $L \equiv (-I)^k \bmod N$, $k = 0, 1$. Da v_0 nur für $N > 2$ einen Sinn hat, sei $N > 2$. Modulformen $\{\Gamma[N], -r, v_0\}$ mit $r \equiv 1 \bmod 2$ können als Modulformen $\{\Gamma(N), -r, 1\}$ aufgefaßt werden; $L \in \Gamma(N)$ bedeutet

$$L \in \Gamma[1] \, , \qquad L \equiv +I \bmod N \, .$$

Wir bedienen uns der HECKEschen Ergebnisse in der Darstellung [3], ersetzen jedoch im Sinne oben getroffener Vereinbarungen das vektorielle Argument $\mathfrak{a}$ in den Funktionen [3] (1), (2) durch $\dot{\mathfrak{a}}$. Überdies wird der die Dimension $-r$ kennzeichnende Index r, da er stets $= 1$ ist, unterdrückt. Nach [3] hat, wenn

$$\dot{\mathfrak{a}} = \{a_1, a_2\} \, , \qquad (a_1, a_2, N) = 1 \, , \qquad B \in \Gamma[1] \, , \qquad \underline{B} = \{b_1, b_2\} \tag{3.1}$$

zutrifft,

$$G^*(\tau, \dot{\mathfrak{a}}, N) = (b_1\tau + b_2)^{-1} G^*(B\tau, \dot{\mathfrak{a}}B^{-1}, N)$$

in der Spitze $B^{-1}\infty$ von $\Gamma(N)$ das konstante Glied

$$\left\{\begin{matrix} \pm 1 & \text{für} & \dot{\mathfrak{a}} \equiv \pm \underline{B} \bmod N \\ 0 & & \text{sonst} \end{matrix}\right\} + i\beta''_{1,0}(\dot{\mathfrak{a}} B^{-1}, N) \ , \tag{3.2}$$

wo $\beta''_{1,0}(\dot{\mathfrak{a}}, N)$ nur von a_1 und N abhängt und durch

$$\begin{aligned} &\beta''_{1,0}(\dot{\mathfrak{a}}, N) = -\gamma_N(a_1) \ , \\ &\gamma_N(a) = 4\pi N^{-1} \sum_{\substack{2 \leq 2h < N \\ (h,N)=1}} Q(1, h', N) P(0, ha, N) \qquad (a \text{ ganz}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

mit $hh' \equiv 1 \bmod N$ erklärt ist.

Zur Bestimmung der hier auftretenden Werte von Q kann man die Relationen [3] (4), (21) benutzen. Sie besagen

$$\sum_{\substack{2 \leq 2h < N \\ (h,N)=1}} \operatorname{ctg} \frac{\pi g h}{N} \frac{2\pi}{N} Q(1, h', N) = \left\{\begin{matrix} 1 & \text{für } g = 1 \\ 0 & \text{für } 2 \leq g < \frac{N}{2} \ , \ (g, N) = 1 \end{matrix}\right\} . \tag{3.4}$$

Es bezeichne $W_N = W_N^{(\frac{1}{2}\varphi(N))}$ die Matrix $\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi g h}{N}\right)$, wo g und h die wachsend geordneten ganzen m mit $1 \leq m < \frac{N}{2}$, $(m, N) = 1$ durchlaufen und g den Zeilen-, h den Spaltenindex vertritt. Aus (3.4) folgt, wenn auch k eines dieser m und $hh' \equiv kk' \equiv 1 \bmod N$ ist:

$$\sum_{\substack{2 \leq 2h < N \\ (h,N)=1}} \operatorname{ctg} \frac{\pi g h}{N} \frac{2\pi}{N} Q(1, h'k', N) = \left\{\begin{matrix} 1 & \text{für} & g = k \\ 0 & \text{sonst} & \end{matrix}\right\} .$$

Daher gilt $|W_N| \neq 0$. Versteht man nun unter $W_{N,h}$ das algebraische Komplement des zu h gehörigen Elements in der ersten Zeile $(g = 1)$ von W_N, so erhält man aus (3.4)

$$\frac{2\pi}{N} Q(1, h', N) = \frac{W_{N,h}}{|W_N|} \ . \tag{3.5}$$

Um $P(0, h, N)$ auszurechnen, bedienen wir uns wieder der Darstellung [3] (21), außerdem aber der Funktionalgleichung [3] S. 110 oben. Nach [3] (24) ist also

$$P(0, h, N) = \frac{1}{2N} \sum_{k \bmod N}{}' \sin \frac{2\pi h k}{N} \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{N} \ ;$$

der Akzent am Summenzeichen verbietet das Auftreten des Gliedes mit $k \equiv 0 \bmod N$. Da $P(0, 0, N) = 0$ ist, kann und soll $1 \leq h \leq N - 1$ vorausgesetzt werden.

Ersichtlich gilt

$$P(0,h,N) = \frac{1}{2N} \operatorname{Im} \sum_{k \bmod N}{}' (\zeta_N^{hk} - 1) \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{N} \qquad \left(\zeta_N = \exp \frac{2\pi i}{N}\right),$$

also

$$P(0,h,N) = \frac{1}{2N} \operatorname{Re} \sum_{k \bmod N}{}' (\zeta_N^{hk} - 1) \frac{\zeta_N^k + 1}{\zeta_N^k - 1}$$

$$= \frac{1}{2N} \operatorname{Re} \sum_{k \bmod N}{}' (\zeta_N^{hk} - 1) + \frac{1}{N} \operatorname{Re} \sum_{k \bmod N}{}' \frac{\zeta_N^{hk} - 1}{\zeta_N^k - 1} .$$

Der erste Term rechts hat den Wert $-\frac{1}{2}$, der zweite, wie man durch Entwicklung des Bruches in eine geometrische Summe sieht, den Wert $1 - \frac{h}{N}$.

Um das Ergebnis zu formulieren, verstehen wir unter $g_1(x)$ die mod 1 periodische Funktion der reellen Variablen x mit

$$g_1(0) = 0 , \qquad g_1(x) = x - \tfrac{1}{2} \qquad (0 < x < 1) ; \tag{3.6}$$

dann haben wir

$$P(0,h,N) = -g_1\left(\frac{h}{N}\right) \qquad (h \text{ ganz}) \tag{3.7}$$

und nach (3.3,5)

$$\gamma_N(a) = \frac{-2}{|W_N|} \sum_{\substack{1 \leqq h < \frac{N}{2} \\ (h,N)=1}} W_{N,h}\, g_1\left(\frac{ah}{N}\right) \qquad (a \text{ ganz}) \tag{3.8}$$

bewiesen. Hieraus entsteht die Matrix G der Normalschar $\mathfrak{N}(\Gamma[N], -1, v)$ in folgender Art: Es durchlaufe ζ_j $(1 \leqq j \leqq \sigma(N))$ ein volles System inäquivalenter Spitzen der $\Gamma(N)$; man setze

$$\zeta_j = A_j^{-1}\infty \qquad (A_j \in \Gamma[1] , \quad \underline{A_j} = \{a_{j1}, a_{j2}\}) .$$

Dann wird nach (3.2) und mit der Bedeutung von (3.8)

$$G = (\gamma_N(a_{j1}a_{k2} - a_{k1}a_{j2})) \qquad (j,k = 1,2,\ldots,\sigma(N)) . \tag{3.9}$$

Die Bedingung für die Paare $\{a_{j1}, a_{j2}\}$ $(1 \leqq j \leqq \sigma(N))$ kann auch einfacher so beschrieben werden: Es durchlaufe $\mathfrak{p} = \{a_1, a_2\}$ ein volles System von Paaren ganzer Zahlen derart, daß stets $(a_1, a_2, N) = 1$ und niemals für zwei verschiedene Paare $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ eine Kongruenz $\mathfrak{p}' \equiv \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{p}' \equiv -\mathfrak{p} \bmod N$ zutrifft. Man numeriere die Paare irgendwie, setze in dieser Reihenfolge $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_j = \{a_{j1}, a_{j2}\}$ $(1 \leqq j \leqq \sigma(N))$ und bilde hiermit die obige Matrix. Die schiefe Symmetrie von G ist nach (3.6,8) unmittelbar ersichtlich, nicht so da-

gegen die Orthogonalität. Beide Eigenschaften bleiben erhalten, wenn an einem der Paare das Vorzeichen gewechselt wird.

Das Nichtverschwinden der Determinante $|W_N|$ legt die Frage nach der *arithmetischen Natur dieser Zahl* nahe. Diese Frage läßt sich im Falle $N =$ Primzahl $q > 2$ beantworten.

Die Elemente der Matrix

$$-iW_q = \left(-i \operatorname{ctg} \frac{\pi jk}{q}\right) \quad \left(j, k = 1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}\right)$$

sind Zahlen des Körpers der q-ten Einheitswurzeln, die mit j und k das Vorzeichen wechseln. Es sei b ein Primitivrest $\bmod q$; übt man auf die Determinante

$$D_q = |-iW_q| = i^{-\frac{q-1}{2}} |W_q|$$

den Automorphismus $\zeta_q = \exp \frac{2\pi i}{q} \to \zeta_q^b$ aus, so nimmt D_q bei der Rückspiegelung der jb in die erste Resthälfte den Faktor -1, außerdem aber noch infolge der verbleibenden Zeilenpermutation einen Faktor ± 1 auf. Also ist D_q entweder rational oder von der Gestalt $r\sqrt{\varepsilon q}$ mit rationalem $r \neq 0$ und $\varepsilon = \left(\frac{-1}{q}\right)$. Daraus folgt bereits

$$|W_q| = r\sqrt{q} \text{ mit rationalem } r \neq 0 \text{ für } q \equiv 3 \bmod 4 . \tag{3.10}$$

Im Falle $q \equiv 1 \bmod 4$ muß man die verbleibende Zeilenpermutation π näher untersuchen. Man betrachte den mit 1 beginnenden Zyklus von π. Da ein

$$j \equiv \pm b^m \bmod q \qquad \left(1 \leqq j \leqq \frac{q-1}{2}, \quad 0 \leqq m \leqq \frac{q-1}{2} - 1\right)$$

durch π in $j' \equiv jb$ oder $-jb \bmod q$ übergeführt wird, wo auch $1 \leqq j' \leqq \frac{q-1}{2}$, besteht der Zyklus aus den Resten des kleinsten positiven Halbsystems $\bmod q$, die in dieser Reihenfolge zu $1, \pm b, \pm b^2, \ldots, \pm b^{\frac{1}{2}(q-1)-1} \bmod q$ kongruent sind. Daher ist π ein einziger Zyklus, hat also eine Fehlstandsumme $\equiv \frac{q-1}{2} - 1 \bmod 2$, und es ist mithin

$$|W_q| \text{ eine rationale Zahl } \neq 0 \text{ für } q \equiv 1 \bmod 4 . \tag{3.11}$$

4. Die eingangs erwähnten *Kongruenzgruppen von Primzahlstufe* sind wie folgt erklärt: Fest gegeben seien eine natürliche Zahl l und eine Primzahl q mit der Eigenschaft $q \equiv 2l + 1 \bmod 4l$. Es bezeichne

$\mathfrak{P}$ die Menge der ganzen $m \not\equiv 0 \bmod q$, die l-te Potenzreste mod q sind;

$\Gamma^0[l, q]$ die Gruppe der Modulmatrizen $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit $\beta \equiv 0 \bmod q$, $\alpha \in \mathfrak{P}$;

$\left(\frac{\sqrt[l]{\alpha}}{q}\right)$ für $\alpha \in \mathfrak{P}$ denjenigen Wert ± 1, welcher $\equiv \alpha^{\frac{q-1}{2l}} \bmod q$ ist;

$v_l(L)$ für $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma^0[l, q]$ dieses Symbol $\left(\frac{\sqrt[l]{\alpha}}{q}\right)$;

$\mathfrak{P}_q$ die multiplikative Gruppe der Restklassen $\bmod q$, die Zahlen aus $\mathfrak{P}$ enthalten;

$\mathfrak{B}$ ein System ganzer Zahlen, deren Restklassen ein vollständiges Vertretersystem der Nebenklassen $\mathfrak{P}_q$ in der Multiplikationsgruppe $\mathfrak{R}_q$ der teilerfremden Restklassen $\bmod q$ bilden.

Allgemein bedeute $\bar{a}$ die Restklasse der für q ganzen Zahl a $\bmod q$. Daß a einer Restklasse angehört, die in der Nebenklasse $\bar{t}\mathfrak{P}_q$ nach der Gruppe $\mathfrak{P}_q$ enthalten ist, müßte danach durch $\bar{a} \in \bar{t}\mathfrak{P}_q$ beschrieben werden. Wir schreiben statt dessen meistens $a \in \bar{t}\mathfrak{P}_q$.

Die Gruppe $\Gamma^0[l,q]$ enthält die Matrix $-I$, und v_l stellt einen ungeraden abelschen Charakter auf $\Gamma^0[l,q]$ dar. Wir untersuchen die Normalschar

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\Gamma, -r, v) \text{ für } \Gamma = \Gamma^0[l,q],\ r = 1 \text{ und das obige } v = v_l. \tag{4.1}$$

Ein volles System inäquivalenter Spitzen von $\Gamma^0[l,q]$ ergibt sich in der Gestalt $A^{-1}\infty$ mit gewissen Matrizen $A^{-1} = S_{1,t}$, $S_{2,t}$, wo t das System $\mathfrak{B}$ durchläuft. Es sei, wenn $t \notin \mathfrak{P}$

$$S_{1,t} = \begin{pmatrix} t & qv \\ 1 & t' \end{pmatrix}, \qquad S_{2,t} = \begin{pmatrix} q & -t' \\ t & -v \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

mit ganzen t', v, für die $tt' = qv + 1$; zum Vertreter der Gruppe $\mathfrak{P}$ wählen wir $t = 1$ und setzen

$$S_{1,1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_{2,1} = T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Spitzenbreiten N dieser $A^{-1}\infty$ sind $N = q$ für $A = S_{1,t}^{-1}$ und $N = 1$ für $A = S_{2,t}^{-1}$. $\Gamma^0[l,q]$ hat also in der Modulgruppe den Index $l(q+1)$ und besitzt die $2l$ inäquivalenten Spitzen ∞, t und 0, $\frac{q}{t}$ $(t \in \mathfrak{B}, t \neq 1)$. Es ist leicht zu bestätigen, daß v in allen diesen Spitzen unverzweigt ist; $\mathfrak{N}$ hat also nach (1.2) den Rang l.

Man bildet die EISENSTEINschen Reihen zur Gruppe $\Gamma^0[l,q]$ nach dem folgenden *heuristischen Prinzip*: Zu jeder Matrix $A = S_{1,t}^{-1}, S_{2,t}^{-1}$ ermittle man die genauen Bedingungen dafür, daß das Zahlenpaar $\{m_1, m_2\}$ die zweite Zeile einer Matrix aus $A\Gamma^0[l,q]$ sei; eine dieser Bedingungen ist offenbar $(m_1, m_2) = 1$. Dann setze man die EISENSTEINreihen nach dem Prinzip der transversalen Summation an, hebe aber die Summationsbedingung $(m_1, m_2) = 1$ auf.

Nun besagen diese Bedingungen außer $(m_1, m_2) = 1$, daß

$$m_2 \in \bar{t}\mathfrak{P}_q \quad \text{für} \quad A = S_{1,t}^{-1}; \quad m_1 \in \bar{t}\mathfrak{P}_q, \quad m_2 \equiv 0 \bmod q \quad \text{für} \quad A = S_{2,t}^{-1} \tag{4.3}$$

zutrifft. Man hat also die EISENSTEINreihen mit diesen Summationsbedingungen (4.3) anzusetzen. Zur bequemeren Schreibweise der Multiplikatoren in den Reihengliedern empfiehlt es sich noch, einen Charakter auf der vollen Gruppe $\mathfrak{R}_q$ einzuführen, der auf $\mathfrak{P}_q$ mit $\left(\frac{\sqrt[l]{\alpha}}{q}\right)$ übereinstimmt. Dieses Symbol stellt einen Charakter auf $\mathfrak{P}_q$ dar, der auf der Untergruppe $\mathfrak{P}_q^*$ der $(2l)$-ten Potenzreste $\bmod q$ und nur dort zu 1 wird. Die gleiche Eigenschaft hat ein erzeugender Charakter der zyklischen Charaktergruppe von $\mathfrak{R}_q/\mathfrak{P}_q^*$. Es sei also $\varepsilon(m)$ ein Restcharakter $\bmod q$, der auf $\mathfrak{P}_q^*$ zu 1 wird und einen erzeugenden Charakter von $\mathfrak{R}_q/\mathfrak{P}_q^*$ definiert; wir betrachten ε im folgenden als fest gegeben. Die Werte von ε sind $(2l)$-te Einheitswurzeln.

Wir definieren jetzt die EISENSTEINreihen der Dimension -1 mit konvergenzerzeugenden Faktoren durch

$$G_{1,t}(s,\tau) = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_2 \in \bar{t}\mathfrak{P}_q}} \frac{\varepsilon(m_2)}{(m_1\tau + m_2)\,|m_1\tau + m_2|^s}, \qquad ((t,q) = 1,\ \operatorname{Re} s > 1) \tag{4.4}$$

$$G_{2,t}(s,\tau) = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 \in \bar{t}\mathfrak{P}_q,\, m_2 \equiv 0 (q)}} \frac{\varepsilon(m_1)}{(m_1\tau + m_2)\,|m_1\tau + m_2|^s}.$$

Die Darstellungen

$$\begin{aligned} G_{1,t}(s,\tau) &= \sum_{\substack{a_1, a_2 \bmod q \\ a_2 \in \bar{t}\mathfrak{P}_q}} \varepsilon(a_2) G(s,\tau,a_1,a_2,q), \\ G_{2,t}(s,\tau) &= \sum_{\substack{a_1 \bmod q \\ a_1 \in \bar{t}\mathfrak{P}_q}} \varepsilon(a_1) G(s,\tau,a_1,0,q) \end{aligned} \tag{4.5}$$

lassen erkennen, daß diese Funktionen von s in eine volle Umgebung des Punktes $s = 0$ (nach [1] sogar in die ganze s-Ebene) regulär-analytisch fort-

setzbar und daß ihre Werte für $s = 0$ Modulformen von der Stufe q und der Dimension -1 in der Variablen τ sind. Im übrigen können die $G_{k,t}$ zwanglos für beliebige bezüglich q ganze t erklärt werden. Sie hängen hinsichtlich t nur von der Nebenklasse $\bar{t}\mathfrak{P}_q$ ab.

Daß die *Nullwerte* $G_{k,t}(\tau) = G_{k,t}(0,\tau)$ $(k = 1, 2)$ der Normalschar $\mathfrak{N}(\Gamma^0[l, q], -1, v_l)$ angehören, folgt einerseits aus den Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} G_{1,t}(s, L\tau) &= \varepsilon(\alpha)(\gamma\tau + \delta)\,|\gamma\tau + \delta|^s G_{1,t\delta}(s, \tau)\ , \\ G_{2,t}(s, L\tau) &= \bar{\varepsilon}(\alpha)(\gamma\tau + \delta)\,|\gamma\tau + \delta|^s G_{2,t\alpha}(s, \tau)\ , \end{aligned} \tag{4.6}$$

die für jede Modulmatrix $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit $\beta \equiv 0 \mod q$ gelten, andrerseits aus der Darstellung (4.5) und dem in **1.** zitierten Resultat von [2] über die Kennzeichnung der Schar $\mathfrak{E}_N$. Daß die Funktionen $G_{k,t}(\tau)$ die genannte Normalschar sogar aufspannen, läßt sich aus der Gültigkeit des Reduktionssatzes ableiten; dieser ergibt sich aus dem **1.3.** entsprechenden Sachverhalt, der im folgenden bei der Aufstellung der Matrix G als zutreffend nachgewiesen wird.

In dem vorliegenden Formalismus treten die DIRICHLETreihen

$$V(s,t) = \tfrac{1}{2} \sum_{n \in \bar{t}\,\mathfrak{P}_q} \frac{\varepsilon(n)\,\mathrm{sgn}\,n}{|n|^s}\ , \quad W(s,t) = \tfrac{1}{2} \sum_{n \in \bar{t}\,\mathfrak{P}_q} \frac{\varepsilon(n)\,(\mathrm{sgn}\,n)\,\mu(|n|)}{|n|^s} \tag{4.7}$$

an die Stelle der Funktionen [3] (3) $P(s,h,q)$, $Q(s,h,q)$; hier bezeichnet t eine für q ganze Zahl. Unter $G^*_{k,t}(s,\tau)$ verstehe man diejenige Reihe, welche aus der Reihe $G_{k,t}(s,\tau)$ durch Hinzufügung der Summationsbedingung $(m_1, m_2) = 1$ hervorgeht. Dann gelten zunächst die Gleichungen (4.5*), die man aus (4.5) dadurch erhält, daß man das Symbol G dort überall mit einem * versieht. In Analogie zu [3] (4), (13) findet man außerdem

$$\begin{aligned} G^*_{k,t}(s,\tau) &= \sum_{r \in \mathfrak{B}} W(1+s, r^{-1}) G_{k,rt}(s,\tau) \\ G_{k,t}(s,\tau) &= \sum_{r \in \mathfrak{B}} V(1+s, r^{-1}) G^*_{k,rt}(s,\tau) \end{aligned} \quad (k = 1, 2) \tag{4.8}$$

$$\sum_{r \in \mathfrak{B}} W(s, r^{-1})\, V(s, rt) = \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{für} & t \subset \mathfrak{P} \\ 0 & \text{sonst} & \end{matrix} \right\}. \tag{4.9}$$

Nach der ersten Relation (4.8) und auf Grund der Darstellung der $W(1+s, r^{-1})$ als Linear-Komposita reziproker L-Reihen läßt sich jedes $G^*_{k,t}(s,\tau)$ als Funktion von s in einer vollen Umgebung des Punktes $s = 0$ holomorph erklären, und der Nullwert $G^*_{k,t}(\tau) = G^*_{k,t}(0,\tau)$ gehört daher der Normalschar (4.1) an.

Die *Bestimmung der konstanten Glieder* der Funktionen $G_{k,t}(\tau)$ *in den Spitzen* $S_{j,r}\infty$ (j und $k = 1, 2$; r und t in $\mathfrak{B}$) führt auf Grund von [3] (11), (12b), (21) und (3.7) zu elementaren Ausdrücken. Jedes konstante Glied ist bis auf einen trivialen Faktor entweder mit einem der l Werte

$$V(1, t) = \frac{\pi}{2q} \sum_{\substack{a \bmod q \\ a \in \bar{t}\,\mathfrak{P}_q}} \varepsilon(a) \operatorname{ctg} \frac{\pi a}{q} \tag{4.10}$$

oder mit einem der l Werte

$$\sigma(t) = \sum_{\substack{a \bmod q \\ a \in \bar{t}\,\mathfrak{P}_q}} \varepsilon(a) g_1\left(\frac{a}{q}\right) \tag{4.11}$$

identisch. Die explizite Bestimmung der Matrix G beruht darauf, daß $G + iI$ als Residuenmatrix der Normalfunktionen

$$E_{1,t}(\tau) = \frac{i}{2\sqrt{q}} \bar{\varepsilon}(t) G^*_{1,t}(\tau) \;, \qquad E_{2,t}(\tau) = -\frac{i}{2} \bar{\varepsilon}(t) G^*_{2,t}(\tau)$$

aufgefaßt werden kann. Die Anordnung der in [2] erklärten Residuen

$$\varrho(S^{-1}_{j,r}, E_{k,t}) \qquad (j \text{ und } k = 1, 2;\ r \text{ und } t \text{ in } \mathfrak{B})$$

geschehe nach folgendem Schema: Das Paar (j,r) vertrete den Zeilenindex, das Paar (k,t) den Spaltenindex; innerhalb eines Indexpaares (j,r) oder (k,t) dominiere der erste Index über den zweiten; t durchlaufe $\mathfrak{B}$ in der gleichen Reihenfolge wie r. Dieser Vorschrift entspricht eine Darstellung $G^{(2l)} = \begin{pmatrix} G^{(l)}_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}$ durch die Teilmatrizen

$$G_{jk} = G^{(l)}_{jk} = (\varrho(S^{-1}_{j,r}, E_{k,t})) \qquad (r \text{ und } t \text{ in } \mathfrak{B}) \;.$$

Eine Rechnung, die ich hier übergehe, ergibt

$$G = \begin{pmatrix} O & Q^{(l)} \\ -Q & O \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad Q = \left(\frac{\pi}{\sqrt{q}} \bar{\varepsilon}(rt) \sum_{\varrho \in \mathfrak{B}} W(1, \varrho^{-1}) \sigma(\varrho r t)\right). \tag{4.12}$$

Die Eigenschaften $G = \bar{G} = -\dot{G}$, $G\dot{G} = I$ von G bedeuten offenbar, daß Q reell, symmetrisch und orthogonal ist. Nun folgt $Q = \bar{Q}$ daraus, daß $\bar{\varepsilon}(t) W(1, t)$ und $\bar{\varepsilon}(t)\sigma(t)$ ersichtlich reell sind; die Symmetrie von Q liegt zutage.

Um die *Orthogonalität von Q direkt nachzuweisen*, hat man sich der folgenden Zusammenhänge zu bedienen: Zunächst haben die Matrizen $(V(1, rt^{-1}))$ und $(W(1, rt^{-1}))$ nach (4.9) das Produkt I. Bezeichnet ferner χ einen Charakter

auf $\mathfrak{R}_q$, der auf $\mathfrak{P}_q$ zu 1 wird, so gilt in der üblichen Terminologie

$$\sum_{r \in \mathfrak{B}} \chi(r) V(1, r) = L(1, \varepsilon\chi) \; ; \tag{4.13}$$

dem entspricht, wenn

$$D(\varepsilon\chi) = \sum_{a \bmod q} \varepsilon(a)\chi(a) g_1\left(\frac{a}{q}\right) \tag{4.14}$$

gesetzt wird, die Relation

$$\sum_{r \in \mathfrak{B}} \chi(r)\sigma(r) = D(\varepsilon\chi) \; . \tag{4.15}$$

Die rechten Seiten von (4.13) und (4.15) sind miteinander nach der bekannten Formel

$$L(1, \varepsilon\chi) = \frac{\pi i}{q}\, \omega(\varepsilon\chi)\overline{D(\varepsilon\chi)} \tag{4.16}$$

verknüpft, in der $\omega(\psi)$ für einen beliebigen Charakter ψ auf $\mathfrak{R}_q$ durch

$$\omega(\psi) = \sum_{a \bmod q} \psi(a)\, \zeta_q^a \qquad \left(\zeta_q = \exp\frac{2\pi i}{q}\right) \tag{4.17}$$

erklärt ist. Die Durchführung des Beweises bietet, wenn man diese Zusammenhänge in der Schreibweise der Matrizenrechnung ausdrückt und anwendet, keine erheblichen Schwierigkeiten.

5. Man gewinnt eine vertiefte Einsicht in die Natur der Funktionen (4.4) $G_{k,t}(s, \tau)$, indem man ihre linearen Komposita mit gewissen Charakterwerten als Koeffizienten bildet und das Verhalten der so entstehenden Funktionen bei Anwendung der Transformationen

$$L \in \Gamma^0[1, q] \quad \text{und} \quad K = K_q = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{q} \\ \dfrac{1}{\sqrt{q}} & 0 \end{pmatrix}$$

untersucht. Die Gruppe $\Gamma^0[1, q]$ besteht aus den Modulmatrizen $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit $\beta \equiv 0 \bmod q$ und ist unter der Bezeichnung $\Gamma^0[q]$, die wir hier auch verwenden werden, bekannt.

Von den $2\,l$ Restcharakteren $\bmod q$, die sich als Charaktere der Faktorgruppe $\mathfrak{R}_q/\mathfrak{P}_q^*$ deuten lassen, sind genau l gerade, und diese sind zugleich die sämtlichen Restcharaktere $\bmod q$, die sich als Charaktere von $\mathfrak{R}_q/\mathfrak{P}_q$ deuten lassen. Durchläuft χ diese l geraden Charaktere, so durchläuft $\psi = \varepsilon\chi$ die sämtlichen l ungeraden Charaktere von $\mathfrak{R}_q/\mathfrak{P}_q^*$. Im folgenden sollen die Buchstaben χ und ψ stets in diesem Sinne verstanden werden, ε bezeichnet

stets den gleichen ein für allemal fest gewählten erzeugenden Charakter von $\mathfrak{R}_q / \mathfrak{P}_q^*$ aus **4.**, und zwischen χ und ψ besteht stets die feste Relation $\psi = \varepsilon\chi$.

Mit den Werten dieser χ bilden wir die linearen Komposita

$$H_{k,\psi}(s,\tau) = \sum_{r \in \mathfrak{B}} \chi(r) G_{k,r}(s,\tau) \qquad (k = 1, 2) \tag{5.1}$$

der $G_{k,r}$. Nach (4.4,5) erhält man für $\operatorname{Re} s > 1$ zunächst die Reihendarstellungen

$$H_{1,\psi}(s,\tau) = \sum_{a_1, a_2 \bmod q} \psi(a_2) G(s,\tau,a_1,a_2,q) = \sum_{m_1, m_2} \frac{\psi(m_2)}{(m_1\tau + m_2)\,|m_1\tau + m_2|^s}$$

$$H_{2,\psi}(s,\tau) = \sum_{a_1 \bmod q} \psi(a_1) G(s,\tau,a_1,0,q) = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_2 = 0(q)}} \frac{\psi(m_1)}{(m_1\tau + m_2)\,|m_1\tau + m_2|^s}, \tag{5.2}$$

sodann nach (4.6) das Verhalten bei Ausübung einer Transformation $L \in \Gamma^0[q]$:

$$\begin{aligned} H_{1,\psi}(s, L\tau) &= \psi(\alpha)(\gamma\tau + \delta)\,|\gamma\tau + \delta|^s H_{1,\psi}(s,\tau)\,, \\ H_{2,\psi}(s, L\tau) &= \bar{\psi}(\alpha)(\gamma\tau + \delta)\,|\gamma\tau + \delta|^s H_{2,\psi}(s,\tau)\,, \end{aligned} \qquad \left(L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right) \tag{5.3}$$

schließlich nach (5.2) das Verhalten bei Ausübung der Transformation K_q:

$$H_{1,\psi}(s, K_q\tau) = H_{1,\psi}\left(s, \frac{-q}{\tau}\right) = \tau\,|\tau|^s H_{2,\psi}(s,\tau)\,. \tag{5.4}$$

Aus (5.2) folgt nach [1], daß jedes $H_{k,\psi}(s,\tau)$ bei festem τ eine ganze Funktion von s darstellt; die Nullwerte $H_{k,\psi}(0,\tau) = H_{k,\psi}(\tau)$ gehören als Funktionen von τ nach [1], [2] der Normalschar $\mathfrak{N}(\Gamma[q], -1, v_0)$ an, wo v_0 den zu Beginn von **3.** erklärten Charakter auf $\Gamma[q]$ bezeichnet. Versteht man unter v_ψ den durch

$$v_\psi(L) = \psi(\alpha) \qquad \text{für} \qquad L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma^0[q]$$

erklärten ungeraden Charakter auf der Gruppe $\Gamma^0[q]$, so ergibt (5.3) schließlich

$$H_{1,\psi}(\tau) \in \mathfrak{N}(\Gamma^0[q], -1, v_\psi)\,, \qquad H_{2,\psi}(\tau) \in \mathfrak{N}(\Gamma^0[q], -1, \bar{v}_\psi)\,. \tag{5.5}$$

Die hier auf der rechten Seite auftretenden Normalscharen mögen $\mathfrak{N}_\psi$ und $\mathfrak{N}_{\bar{\psi}}$ genannt werden. Nach (1.1) ist die Summe ihrer Ränge gleich 2, weil v_ψ in den beiden Spitzen ∞ und 0 eines Fundamentalbereichs von $\Gamma^0[q]$ unverzweigt ist. Andrerseits liegen $H_{1,\psi}$ und $H_{2,\bar{\psi}}$ in $\mathfrak{N}_\psi$, $H_{1,\bar{\psi}}$ und $H_{2,\psi}$ in $\mathfrak{N}_{\bar{\psi}}$. Daher müssen zwischen diesen vier Funktionen *mindestens zwei unabhängige lineare Relationen* bestehen.

Man findet diese Relationen durch den Vergleich entweder der konstanten Glieder von $H_{1,\psi}$ und $H_{2,\psi}$ in den beiden Spitzen ∞ und 0, oder der Entwicklungen von $H_{1,\psi}$ und $H_{2,\psi}$ in einer dieser Spitzen, etwa ∞. Aus (5.2) ergibt sich nach [3], (12b)

$$b_0(I,H_{1,\psi}) = 2L(1,\psi)\ , \qquad b_0(I,H_{2,\psi}) = \frac{2\pi i}{q} D(\psi)\ ,$$

$$b_0(T,H_{1,\psi}) = -2\pi i D(\psi)\ , \qquad b_0(T,H_{2,\psi}) = 2L(1,\psi)\ .$$

Daraus folgt vermöge (4.16) die eine gesuchte Relation

$$H_{2,\bar\psi}(\tau) = \frac{1}{\omega(\psi)} H_{1,\psi}(\tau) = -\frac{\omega(\bar\psi)}{q} H_{1,\psi}(\tau)\ ; \tag{5.6}$$

eine zweite erhält man, indem man ψ durch $\bar\psi$ ersetzt. Ersichtlich ist hiermit zugleich bewiesen, daß die *sämtlichen Scharen* $\mathfrak{N}_\psi$ *den Rang* 1 haben. Die FOURIER-Entwicklung von $H_{1,\psi}(\tau)$ hat die Koeffizienten

$$b_n(I, H_{1,\psi}) = -\frac{4\pi i}{q}\,\omega(\psi) \sum_{d\,|\,n,\ d>0} \bar\psi(d) \qquad (n = 1, 2, \ldots)\ .$$

Wir ziehen jetzt das *Verhalten* der Funktionen $G_{k,t}$, $H_{k,\psi}$ *bei Ausübung der Transformation* $K = K_q$ heran. Zunächst hat man neben (5.4) auch

$$G_{1,t}(s, K\tau) = \tau\,|\,\tau\,|^s\, G_{2,t}(s,\tau)\ ,$$

woraus zu schließen ist, daß die Funktionen

$$F_t^{\pm}(\tau) = G_{1,t}(\tau) \pm i\sqrt{q}\, G_{2,t}(\tau) \tag{5.7}$$

sich bei Anwendung von K gemäß

$$F_t^{\pm}(K\tau) = \mp i \frac{\tau}{\sqrt{q}} F_t^{\pm}(\tau) \tag{5.8}$$

umsetzen. Analog ergibt sich, wenn

$$J_\psi^{\pm}(\tau) = H_{1,\psi}(\tau) \pm i\sqrt{q}\, H_{2,\psi}(\tau) = \sum_{t\in\mathfrak{B}} \chi(t) F_t^{\pm}(\tau) \tag{5.9}$$

gesetzt wird, aus (5.4)

$$J_\psi^{\pm}(K\tau) = \mp i \frac{\tau}{\sqrt{q}} J_\psi^{\pm}(\tau)\ . \tag{5.10}$$

Andrerseits findet man durch Kombination der Gleichungen (5.4,6)

$$H_{k,\psi}(K\tau) = -\frac{\omega(\psi)}{\sqrt{q}} \frac{\tau}{\sqrt{q}} H_{k,\bar\psi}(\tau) \qquad (k = 1, 2) \tag{5.11}$$

und daraus nach (5.9,10)

$$J_{\overline{\psi}}^{\pm}(\tau) = \pm \frac{i\sqrt{q}}{\omega(\psi)} J_{\psi}^{\pm}(\tau) = \mp i \frac{\omega(\overline{\psi})}{\sqrt{q}} J_{\psi}^{\pm}(\tau) \,. \tag{5.12}$$

Um diese Tatsachen zu *interpretieren*, betrachten wir das (in gruppentheoretischer Komplex-Schreibweise) durch

$$\Phi^0[l, q] = \Gamma^0[l, q] + K_q \Gamma^0[l, q] \tag{5.13}$$

gegebene Matrizensystem. Aus $K\Gamma^0[l,q]K^{-1} = \Gamma^0[l,q]$ folgt, daß die Matrizen von $\Phi^0[l,q]$ bei Komposition durch Multiplikation eine Gruppe bilden. Da $\Gamma^0[l,q]$ in $\Phi^0[l,q]$ den Index 2 hat, ist $\Phi^0[l,q]$ eine *Grenzkreisgruppe von erster Art.* Wir bestimmen die Anzahl ϑ^0 der inäquivalenten Spitzen von $\Phi^0[l,q]$. Man beweist mit Hilfe der oben eingeführten Modulmatrizen $S_{1,t}$ zunächst, daß die ganze Zahl $t \not\equiv 0 \mod q$ zu $-t$ bezüglich $\Gamma^0[l,q]$ äquivalent ist. Daraus folgt, daß von dem vollständigen System ∞, t, 0, $\frac{q}{t}$ ($t \in \mathfrak{V}$, t ganz, $t \notin \mathfrak{P}$) inäquivalenter Spitzen von $\Gamma^0[l,q]$ höchstens l (etwa ∞ und t) bezüglich $\Phi^0[l,q]$ inäquivalent sind, daß also $\vartheta^0 \leqq l$ ist. Es kann aber nicht $\vartheta^0 < l$ sein, da nach allgemeinen Sätzen [4] jede Spitze einer Grenzkreisgruppe von erster Art beim Übergang zu einer Untergruppe vom Index μ in höchstens μ nach dieser inäquivalente Spitzen zerfällt. Also ist $\vartheta^0 = l$, und die genannten Spitzen ∞, t bilden ein vollständiges Vertretersystem inäquivalenter Spitzen von $\Phi^0[l,q]$. In dieser Form kann man die Behauptung direkt bestätigen. Aus den zitierten Sätzen [4] folgt hier überdies, daß die einer Spitze zugeordnete parabolische Grundmatrix von $\Phi^0[l,q]$ bereits in $\Gamma^0[l,q]$ liegt. Auch diese Aussage läßt sich direkt verifizieren: Zu jeder Spitze ζ von $\Phi^0[l,q]$ existiert eine Modulmatrix A derart, daß $\zeta = A^{-1}\infty$. Die parabolische Grundmatrix P von ζ in $\Phi^0[l,q]$ hat die Gestalt $P = A^{-1}U^N A \left(U^N = \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ mit einem reellen $N > 0$. Da P^2 in $\Gamma^0[l,q]$ liegt, ist $2N$ ganz, also N ganz- oder halbzahlig. Jedenfalls hat P rationale Elemente, kann folglich nicht in $K_q\Gamma^0[l,q]$ liegen und liegt daher in $\Gamma^0[l,q]$, q. e. d. Dieser Sachverhalt hat eine für alles Weitere wichtige Konsequenz: Läßt sich ein Multiplikatorsystem v der Gruppe $\Gamma^0[l,q]$ auf die Gruppe $\Phi^0[l,q]$ fortsetzen, so hat das dadurch entstehende Multiplikatorsystem in jeder Spitze von $\Phi^0[l,q]$ den gleichen Drehrest, wie ihn das ursprüngliche v in derselben Spitze hatte, diese jetzt als Spitze von $\Gamma^0[l,q]$ verstanden. Im übrigen bleiben auch die ortsuniformisierenden Variablen in den Spitzen beim Übergang von $\Gamma^0[l,q]$ zu $\Phi^0[l,q]$ ungeändert.

$\Phi^0[l,q]$ ist eine Untergruppe der von FRICKE [5] ausführlich untersuchten Gruppe $\Phi^0[q] = \Phi^0[1,q]$, einer Erweiterung der $\Gamma^0[q]$.

Es sei v ein abelscher Charakter auf $\Gamma^0[l,q]$. Damit v als solcher auf die Gruppe $\Phi^0[l,q]$ *fortsetzbar* sei, ist bei gegebenem $v(K)$

$$v^2(K) = v(-I)\ , \qquad v(KLK^{-1}) = v(L) \quad \text{für} \quad L \in \Gamma^0[l,q]$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung. Im Falle des ungeraden Charakters

$$v(L) = v_l(L) = \left(\frac{\sqrt[l]{\alpha}}{q}\right) \qquad (L \in \Gamma^0[l,q])$$

sind diese Relationen erfüllt, wenn $v_l(K) = \pm i$ gesetzt wird; wir bezeichnen die beiden aus v_l demgemäß entstehenden Charaktere auf $\Phi^0[l,q]$ mit $v_l^{\pm}$.

Aus den Eigenschaften der Metrisierungsintegrale folgt nach (5.8) unmittelbar, daß die Funktionen (5.7) $F_t^{\pm}$ $(t \in \mathfrak{B})$ der Normalschar $\mathfrak{N}(\Phi^0[l,q], -1, v_l^{\mp})$ angehören. Wegen $v_l^+ v_l^- = 1$ ist die Summe der Ränge dieser beiden Scharen gleich l. Die Summe der beiden Scharen ist direkt, hat also den Rang l und wird daher von den $F_t^{\pm}$ (beide Vorzeichen, $t \in \mathfrak{B}$) aufgespannt; denn dieses Funktionensystem ist dem der $G_{1,t}$, $G_{2,t}$ linear äquivalent. Hieraus geht hervor, daß (nunmehr getrennt für jedes Vorzeichen) $\mathfrak{N}(\Phi^0[l,q], -1, v_l^{\mp})$ von den Funktionen $F_t^{\pm}$, nach (5.9) also auch von den Funktionen $J_{\psi}^{\pm}$ aufgespannt wird.

Nach Wahl einer Primitivzahl g mod q kann ε durch $\varepsilon(g) = \xi_l = \exp\dfrac{\pi i}{l}$ bestimmt werden. Man erhält dann die sämtlichen ψ aus $\psi(g) = \xi_l^{2m+1}$ $(0 \leqq m \leqq l-1)$. Wird diese Beziehung durch $\psi = \psi_m$ ausgedrückt, so ist $\overline{\psi}_m = \psi_{l-1-m}$, und nach (5.12) wird nun $\mathfrak{N}(\Phi^0[l,q], -1, v_l^{\mp})$ bereits von den Funktionen $J_{\psi_m}^{\pm}\left(0 \leqq m \leqq \dfrac{l-1}{2}\right)$ aufgespannt. Da die Summe der Ränge beider Scharen gleich l ist, bilden die $J_{\psi_m}^{\pm}\left(0 \leqq m \leqq \dfrac{l}{2} - 1\right)$ für gerades l eine Basis von $\mathfrak{N}(\Phi^0[l,q], -1, v_l^{\mp})$. Für ungerades l ist $q \equiv 3 \mod 4$, und der Charakter $\psi = \psi_m\left(m = \dfrac{l-1}{2}\right)$ fällt mit dem quadratischen Restsymbol $\left(\dfrac{*}{q}\right)$ zusammen. Daher gilt in (5.12)

$$\omega(\psi) = \omega(\overline{\psi}) = i\sqrt{q}\,, \quad J_{\psi}^{\pm}(\tau) = \pm J_{\psi}^{\pm}(\tau)\,, \quad J_{\psi}^{-}(\tau) = 0 \quad \left(\psi = \psi_m,\ m = \frac{l-1}{2}\right)$$

und es bilden die Funktionen

$$J_{\psi_m}^{+}(\tau) \quad \left(0 \leqq m \leqq \frac{l-1}{2}\right) \quad \text{eine } \textit{Basis} \text{ von } \mathfrak{N}(\Phi^0[l,q], -1, v_l^{-})\ ,$$

$$J^-_{\psi_m}(\tau) \quad \left(0 \leqq m \leqq \frac{l-3}{2}\right) \quad \text{eine } \textit{Basis} \text{ von } \mathfrak{N}(\Phi^0[l, q), -1, v_l^+) \ .$$

Damit ist die Rangbestimmung vollzogen. Setzt man

$$\mu^{\pm}_{l,q} = \mathrm{Rg}\, \mathfrak{N}(\Phi^0[l,q], -1, v_l^{\pm}) \ , \tag{5.14}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\mu^+_{l,q} = \mu^-_{l,q} = \frac{l}{2} \quad \text{für} \quad l \equiv 0 \bmod 2 \ , \\ &\mu^+_{l,q} = \frac{l-1}{2}, \quad \mu^-_{l,q} = \frac{l+1}{2} \quad \text{für} \quad l \equiv 1 \bmod 2 \ . \end{aligned} \tag{5.15}$$

Die Zuordnung der Vorzeichen zu den Rangzahlen bei ungeradem l beruht auf der Vorzeichenbestimmung der GAUSSschen Summen für ungerade quadratische Charaktere nach Primzahlmoduln.

Zum Schluß ist noch auf einen Zusammenhang zwischen den Modulformen $H_{1,\psi}$ und *Klassenzahlen abelscher Zahlkörper* hinzuweisen. Bei gegebenem ψ hat die Normalschar $\mathfrak{N}(\Gamma^0[q], -1, v_\psi)$ den Rang 1 und wird daher von der Funktion $c_\psi H_{1,\psi}$ aufgespannt ($c_\psi \neq 0$ konstant). Indem wir $c_\psi = \frac{\omega(\overline{\psi})}{4\pi i}$ setzen, erreichen wir für die entstehende Funktion $H^0_{1,\psi} = \frac{\omega(\overline{\psi})}{4\pi i} H_{1,\psi}$ die Normierung

$$b_1(I, H^0_{1,\psi}) = 1 \ ;$$

es sind dann alle $b_n(I, H^0_{1,\psi})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ganze algebraische Zahlen, und unendlich viele von ihnen sind gleich 1.

Im Sinne von HASSE [6] definieren die Gruppen $\mathfrak{P}_q$ bzw. $\mathfrak{P}^*_q$ je einen *Klassenkörper* K_0 bzw. K über dem Körper P der rationalen Zahlen. K ist in $\mathsf{P}(\zeta_q)$ enthalten, total-imaginär und quadratisch über seinem maximalen reellen Teilkörper K_0. Es sei h_0 bzw. h die Klassenzahl von K_0 bzw. K und es werde (vgl. [6] S. 10, 11, 12) die Relativklassenzahl h^* von K/K_0 durch

$$h = h_0 h^*$$

erklärt. Dann ergibt sich

$$\prod_\psi b_0(I, H^0_{1,\psi}) = \frac{h^*}{Qw} \ ; \tag{5.16}$$

hier bedeutet w die Anzahl der Einheitswurzeln in K, Q den (in [6] erklärten) Einheitenindex von K/K_0; ψ durchläuft genau diejenigen Charaktere mod q, welche in [6] mit χ_1 bezeichnet werden.

Im Falle $l = 1$ ist $\psi(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{q}\right)$, $q \equiv 3 \mod 4$; wir lassen die Indizes ψ und t fort und finden nach (5.1,7 bis 12)

$$H_k(\tau) = G_k(\tau)\ , \qquad J^{\pm}(\tau) = F^{\pm}(\tau)\ , \qquad F^{-}(\tau) = 0\ , \qquad H_1(\tau) = i\sqrt{q}H_2(\tau)\ .$$

Bezeichnet h die Klassenzahl des Körpers $\mathsf{P}(\sqrt{-q})$, so ergibt sich übereinstimmend mit (5.16)

$$H_1^0(\tau) = \frac{h}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d\,|\,n,\,d>0}\left(\frac{d}{q}\right)\right)\exp 2\pi i n\frac{\tau}{q}\ . \tag{5.17}$$

Wegen $H_1^0(K\tau) = -i\frac{\tau}{\sqrt{q}}H_1^0(\tau)$ unterscheiden sich die Koeffizienten der Entwicklungen von $H_1^0(\tau)$ in den Spitzen 0 und ∞ nur um einen gemeinsamen Faktor. Dem entspricht, daß $H_1^0(\tau)$ der Normalschar $\mathfrak{N}(\Phi^0[q], -1, v_1^-)$ angehört. Nach (5.15) hat diese Schar den *Rang* 1, die Normalschar $\mathfrak{N}(\Phi^0[q], -1, v_1^+)$ den *Rang* 0.

6. Das Auftreten der FRICKEschen Gruppen $\Phi^0[l, q]$ in den obigen Zusammenhängen ist kein isoliertes Phänomen, sondern hat vielmehr seinen Grund in einem Sachverhalt von weitester Allgemeinheit. Wir formulieren diesen hier unter den speziellen Bedingungen seiner folgenden Anwendungen; seine allgemeine Bedeutung wird dabei unmittelbar ersichtlich.

Es bezeichne $\Gamma(1)$ die volle Modulgruppe, r eine reelle Zahl, v ein Multiplikatorsystem zu $\Gamma(1)$ und $-r$, $f(\tau)$ eine Modulform $\{\Gamma(1), -r, v\}$ und q (vorübergehend) eine beliebige natürliche Zahl. Für $L = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in \Gamma^0[q]$ erhält man

$$\frac{1}{q}L\tau = L_q^*\left(\frac{\tau}{q}\right) \quad \text{mit} \quad L_q^* = \begin{pmatrix}\alpha & \frac{1}{q}\beta\\ q\gamma & \delta\end{pmatrix} \in \Gamma(1) \tag{6.1}$$

und daher, wie man leicht nachrechnet, in

$$f_2(\tau) = f_{2,q}(\tau) = f(\tau)\, f\left(\frac{\tau}{q}\right) \textit{ eine automorphe Form } \{\Phi^0[q], -2r, v_{2,q}\} \tag{6.2}$$

wo $\Phi^0[q]$ wie oben zu erklären und $v_{2,q}$ als Multiplikatorsystem zu $\Phi^0[q]$ und $-2r$ durch

$$v_{2,q}(L) = v(L)v(L_q^*) \qquad (L \in \Gamma^0[q])\ , \qquad v_{2,q}(K) = v^2(T) \tag{6.3}$$

eindeutig bestimmt ist $\left(K = K_q = \begin{pmatrix}0 & -\sqrt{q}\\ \frac{1}{\sqrt{q}} & 0\end{pmatrix},\ T = K_1 = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$.

Wir spezialisieren im folgenden auf den Fall $q =$ Primzahl $\equiv 3 \bmod 4$, $q > 3$ und

$$f(\tau) = \eta(\tau) = e^{\pi i \frac{\tau}{12}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i m \tau}) \in \{\Gamma(1), -\tfrac{1}{2}, \lambda\} . \tag{6.4}$$

Für λ ergibt sich (vgl. [7] S. 32) die folgende universelle Darstellung:

Es seien j und k ganz, $(j, k) = 1$, $k \equiv 1 \bmod 2$; $\operatorname{sgn} j$ habe hier außer der üblichen die Bedeutung $\operatorname{sgn} 0 = 1$. Man setze

$$\left(\frac{j}{k}\right)^* = \left(\frac{j}{|k|}\right) \text{ (JACOBIsches Restsymbol)}, \quad \left(\frac{j}{k}\right)_* = \left(\frac{j}{k}\right)^* (-1)^{\frac{\operatorname{sgn} j - 1}{2} \frac{\operatorname{sgn} k - 1}{2}} .$$

Mit $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$ und $\xi_m = \exp \frac{\pi i}{m}$ für natürliches m gilt dann

$$\begin{aligned} \lambda(S) &= \left(\frac{d}{c}\right)^* \xi_4^{-c} \, \xi_{12}^{(a+d)c - bd(c^2-1)} , && \text{wenn } c \equiv 1 \bmod 2 , \\ \lambda(S) &= \left(\frac{c}{d}\right)_* \xi_4^{d-1-cd} \, \xi_{12}^{(a+d)c - bd(c^2-1)} , && \text{wenn } d \equiv 1 \bmod 2 . \end{aligned} \tag{6.5}$$

Wir schreiben gemäß (6.2,3,4)

$$\eta_2(\tau) = \eta_{2,q}(\tau) = \eta(\tau)\eta\left(\frac{\tau}{q}\right) \in \{\Phi^0[q], -1, \lambda_2\}$$

und erhalten nach (6.5), indem wir $q^2 \equiv 1 \bmod 24$ und das quadratische Reziprozitätsgesetz berücksichtigen:

$$\lambda_2(L) = \left(\frac{\alpha}{q}\right)(-1)^{\gamma \frac{q+1}{4}} \xi_3^{\{(\alpha+\delta)\gamma - \beta\delta(\gamma^2-1)\} \frac{q+1}{4}} \text{ für } L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma^0[q] . \tag{6.6}$$

Außerdem wird $\lambda_2(K) = -i$.

Diese Werte zeigen, daß λ_2 für $q \equiv -1 \bmod 24$ mit dem oben betrachteten Multiplikatorsystem v_1^- $(l = 1)$ übereinstimmt. Die Schar der ganzen Formen $\{\Phi^0[q], -1, v_1^-\}$ enthält also neben der Normalfunktion (5.17) $H_1^0 \not\equiv 0$ noch die ganze, in der oberen Halbebene nicht verschwindende Spitzenform η_2, die im Unendlichen die Ordnung $\frac{q+1}{24}$ aufweist. Daraus kann man im Falle $q \equiv -1 \bmod 24$ eine etwas merkwürdige Aussage ableiten. Man bedarf hierzu genauerer Kenntnisse über die FRICKEschen Gruppen $\Phi^0[q]$, weshalb zunächst über diese berichtet werden soll.

Unter den *formalen Daten* einer Grenzkreisgruppe Γ^0 von erster Art verstehen wir die folgenden Zahlen: Erstens das Geschlecht p^0 eines geschlossenen Fundamentalbereichs $\mathfrak{F}^0$ von Γ^0, zweitens die Anzahlen σ^0 der parabolischen

und e^0 der elliptischen Fixpunkte von $\mathfrak{F}^0$, drittens die ganzen Zahlen $l_k^0 \geqq 2$ $(1 \leqq k \leqq e^0)$, deren jede einem der e^0 elliptischen Fixpunkte ω_k von $\mathfrak{F}^0$ als dessen Ordnung entspricht. Aus diesen Zahlen bildet man

das *Verzweigungsmaß* $q^0 = \sigma^0 + \sum_{k=1}^{e^0}\left(1 - \frac{1}{l_k^0}\right)$ und den *Rang* $\varrho^0 = p^0 - 1 + \frac{1}{2}q^0$

von Γ^0; ϱ^0 ist stets positiv, nimmt beim Übergang von Γ^0 zu einer Untergruppe des Index μ von Γ^0 den Faktor μ auf und hat für die volle Modulgruppe $\Gamma(1)$ den Wert $\frac{1}{12}$, woraus ϱ^0 für jede mit der Modulgruppe kommensurable Gruppe Γ^0 leicht zu berechnen ist. Dabei werde, was die Allgemeinheit nicht beschränkt, stets vorausgesetzt, daß die betrachtete Matrizengruppe die Matrix $-I$ enthält.

Weder bei Untergruppen der Modulgruppe, noch bei den hier betrachteten Erweiterungen von solchen treten andere Eckenordnungen auf als $l_k^0 = 2$ oder $l_h^0 = 3$. Wir nennen daher e_2^0 bzw. e_3^0 die Anzahl der elliptischen Fixpunkte der Ordnung 2 bzw. 3 in $\mathfrak{F}^0$. Dann wird

$$q^0 = \sigma^0 + \tfrac{1}{2}e_2^0 + \tfrac{2}{3}e_3^0\,, \qquad \varrho^0 = p^0 - 1 + \frac{\sigma^0}{2} + \frac{e_2^0}{4} + \frac{e_3^0}{3}\,.$$

Für $\Gamma^0 = \Gamma^0[q]$ (q Primzahl) ergibt sich, wie in 4. kurz ausgeführt wurde

$$\varrho^0 = \frac{q+1}{12}\,, \qquad \sigma^0 = 2 \qquad (\Gamma^0 = \Gamma^0[q]\,,\ q \text{ Primzahl})\,.$$

Ist überdies $q \equiv 3 \bmod 4$, $q > 3$, so findet man

$$e_2^0 = 0\,, \quad e_3^0 = 1 + \left(\frac{q}{3}\right) \quad (\Gamma^0 = \Gamma^0[q],\ q \text{ Primzahl } > 3,\ q \equiv 3 \bmod 4)\,.$$

Um dies zu beweisen und für $q \equiv 1 \bmod 3$ zugleich die Lage der beiden Fixpunkte von der Ordnung 3 zu bestimmen, wähle man

$$\mathfrak{F}^0(q) = \sum_{-\frac{q-1}{2} \leqq j \leqq +\frac{q-1}{2}} U^j\mathfrak{E} + T\mathfrak{E} \quad \left(U = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$$

als Fundamentalbereich der $\Gamma^0[q]$, wo $\mathfrak{E}$ die Menge der τ mit $\operatorname{Im}\tau > 0$, $|\tau| > 1$, $|\operatorname{Re}\tau| < \frac{1}{2}$, vereinigt mit der Menge der Randpunkte nicht-negativen Realteils bezeichne.

Wir betrachten hier nur den Fall $l_k^0 = 3$. Als mögliche Fixpunkte der Ordnung 3 von $\Gamma^0[q]$ in $\mathfrak{F}^0(q)$ kommen die Punkte

$$U^m\xi \left(\xi = \xi_3,\quad -\frac{q-1}{2} \leqq m \leqq +\frac{q-1}{2},\ m \neq 0, -1\right)$$

in Betracht. $U^m \xi$ ist Fixpunkt der elliptischen Substitution mit der Matrix

$$U^{m+1} T U^{-m} = \begin{pmatrix} m+1 & -m^2-m-1 \\ 1 & -m \end{pmatrix}$$

und diese liegt genau dann in $\Gamma^0[q]$, wenn $(2m+1)^2 \equiv -3 \bmod q$ zutrifft. Daher ist $e_3^0 = 0$, wenn $q \equiv -1 \bmod 3$. Für $q \equiv 1 \bmod 3$ existiert genau ein m dieser Art mit $2 \leqq m \leqq \frac{q-3}{2}$, und es ist dann

$$2(-m-1)+1 = -2m-1\,, \qquad -\frac{q-1}{2} \leqq -m-1 \leqq -3\,.$$

Also besitzt $\mathfrak{F}^0(q)$ genau zwei nach $\Gamma^0[q]$ inäquivalente Fixpunkte der Ordnung 3, und zwar $U^m \xi$ und $U^{-m-1}\xi$; daß diese nach $\Gamma^0[q]$ inäquivalent sind, erkennt man, wenn man durch eine geometrische Überlegung die Modulsubstitutionen bestimmt, die den einen in den anderen überführen.

Indem wir die Daten der Gruppe $\Gamma^0[q]$ mit einem oberen Index 0 und als Funktionen von q schreiben, erhalten wir damit abschließend die (bekannten) Werte:

$$\begin{aligned} &\varrho^0(q) = \frac{q+1}{12}\,, \quad \sigma^0(q) = 2\,, \quad e_2^0(q) = 0\,, \quad e_3^0(q) = 1 + \left(\frac{q}{3}\right), \\ &p^0(q) = \frac{q+1}{12} - \tfrac{1}{3}\left(1 + \left(\frac{q}{3}\right)\right). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Wir vollziehen jetzt den *Übergang zur Gruppe* $\Phi^0[q]$; die Daten dieser Gruppe werden mit $\varrho_*^0(q)$, $\sigma_*^0(q)$, $e_{2*}^0(q)$, $e_{3*}^0(q)$, $p_*^0(q)$ bezeichnet. Man hat zunächst

$$\varrho_*^0(q) = \frac{q+1}{24}\,, \qquad \sigma_*^0(q) = 1\,. \tag{6.8}$$

Die Anzahl $e_{2*}^0(q)$ wurde von FRICKE [5] bestimmt; wir reproduzieren hier lediglich weiter unten das Ergebnis. Dagegen hat FRICKE übersehen, daß es keineswegs überflüssig ist, $e_{3*}^0(q) = 1$ zu beweisen. Dies ergibt sich wie folgt:

Setzt man $m^2 + m + 1 = qg$ für den oben verwendeten Wert m, ferner

$$\omega_1 = U^m \xi\,, \quad \omega_2 = U^{-m-1}\xi\,, \quad E_2 = -U^{-m} T U^{m+1} = \begin{pmatrix} m & qg \\ -1 & -m-1 \end{pmatrix},$$

so wird g ganz, $1 \leqq g \leqq \frac{1}{q}(m+1)^2 < \frac{q}{4}$, also $(q, g) = 1$ und (vgl. (6.1))

$$\omega_1 \omega_2 = -qg\,, \quad K\omega_1 = \frac{\omega_2}{g}\,, \quad \frac{\omega_2}{g} = \frac{1}{g} E_2 \omega_2 = E_{2,g}^* \left(\frac{\omega_2}{g}\right),$$

wo
$$E^*_{2,g} = \begin{pmatrix} m & q \\ -g & -m-1 \end{pmatrix} \in \Gamma^0[q]\,, \qquad \operatorname{Sp} E^*_{2,g} = -1\,,$$
also $\frac{\omega_2}{g}$ zu ω_1 oder ω_2 nach $\Gamma^0[q]$ äquivalent ist. Die erste dieser Möglichkeiten ergäbe $K\omega_1 = L\omega_1$ für ein $L \in \Gamma^0[q]$, es wäre also ω_1 elliptischer Fixpunkt der Nebenklasse $K\Gamma^0[q] \subset \Phi^0[q]$, und die Ordnung von ω_1 als die eines elliptischen Fixpunktes von $\Phi^0[q]$ wäre durch 3 teilbar, was nach FRICKE [5] nicht möglich ist (vgl. auch die unmittelbar hier folgende Betrachtung). Daher gilt $K\omega_1 = L\omega_2$ für ein $L \in \Gamma^0[q]$, woraus die Behauptung folgt.

Die unimodulare Matrix
$$KL = \begin{pmatrix} -\sqrt{q}\,\gamma & -\sqrt{q}\,\delta \\ \frac{\alpha}{\sqrt{q}} & \frac{\beta}{\sqrt{q}} \end{pmatrix} \in K\Gamma^0[q] \qquad \left(L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right) \tag{6.9}$$
vermittelt genau dann eine elliptische Substitution, wenn $\left|\frac{\beta}{q} - \gamma\right| < \frac{2}{\sqrt{q}}$, das heißt $\beta = q\gamma$ ist. FRICKE [5] zeigt, daß die diesen KL entspringenden, nach $\Phi^0[q]$ paarweise inäquivalenten elliptischen Fixpunkte umkehrbar eindeutig den *Klassen primitiver binärer quadratischer Formen von den Diskriminanten* $-4q$ *und* $-q$ entsprechen; dabei wird der Matrix L die quadratische Form mit der Matrix
$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & q\delta \end{pmatrix}, && \text{wenn nicht } \alpha \equiv \delta \equiv 0 \bmod 2\,; \\ &\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & q\delta \end{pmatrix}, && \text{wenn } \alpha \equiv \delta \equiv 0 \bmod 2 \end{aligned} \tag{6.10}$$
zugeordnet. Bezeichnet h^* die Anzahl der genannten Klassen von der Diskriminante $-4q$, so gilt bekanntlich $h^* = \left(2 - \left(\frac{2}{q}\right)\right) h$ und daher
$$e^0_{2*} = h^* + h = \left(3 - \left(\frac{2}{q}\right)\right) h\,, \qquad e^0_{3*} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{q}{3}\right)\right), \tag{6.11}$$
also nach (6.8)
$$p^0_* = \frac{q+1}{24} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(3 - \left(\frac{2}{q}\right)\right) h - \frac{1}{6}\left(1 + \left(\frac{q}{3}\right)\right), \tag{6.12}$$
oder
$$\begin{aligned} &p^0_* = \frac{q-7}{24} - \frac{h-1}{2} \quad (q \equiv 7 \bmod 24)\,, && p^0_* = \frac{q+13}{24} - h \quad (q \equiv 11 \bmod 24)\,, \\ &p^0_* = \frac{q+1}{24} - \frac{h-1}{2} \quad (q \equiv 23 \bmod 24)\,, && p^0_* = \frac{q+5}{24} - h \quad (q \equiv 19 \bmod 24)\,. \end{aligned} \tag{6.12a}$$

Das *Ergebnis*, von dem oben die Rede war, *besagt*, daß es für mindestens 15 Primzahlen $q \equiv -1 \bmod 24$ außer Null keine ganze Spitzenform $\{\Phi^0[q], -1, v_1^+\}$ gibt. Im Falle $q \equiv -1 \bmod 24$ ist $e_{3*}^0 = 0$. Da η_2 in der oberen Halbebene nicht verschwindet, sind die sogenannten Drehreste von v_1^- in den elliptischen Fixpunkten sämtlich $= 0$, die Drehreste von v_1^+ in diesen Fixpunkten also sämtlich $= \frac{1}{2}$, und die Ordnung des Divisors einer ganzen Spitzenform $\varphi \not\equiv 0$ aus $\{\Phi^0[q], -1, v_1^+\}$ ist mithin nach (6.11) mindestens gleich $1 + \frac{1}{2}e_{2*}^0 = h + 1$. Also gilt, wenn ein solches φ existiert: $\frac{q+1}{24} \geqq h+1$.

In der folgenden Tabelle sind die 22 Primzahlen $q \equiv -1 \bmod 24$ bis 1000 mit den zugehörigen Werten $m = \frac{q+1}{24}$, h, p_*^0 zusammengestellt.

q	23	47	71	167	191	239	263	311	359	383	431
m	1	2	3	7	8	10	11	13	15	16	18
h	3	5	7	11	13	15	13	19	19	17	21
p_*^0	0	0	0	2	2	3	5	4	6	8	8

q	479	503	599	647	719	743	839	863	887	911	983
m	20	21	25	27	30	31	35	36	37	38	41
h	25	21	25	23	31	21	33	21	29	31	27
p_*^0	8	11	13	16	15	21	19	26	23	23	28

Man sieht hieraus, daß für die 15 Primzahlen $q < 1000$ mit $q \equiv -1 \bmod 24$ und $p_*^0 \leqq 15$ die Klassenzahl $h \geqq m$ ist, daß dann also außer Null keine ganze Spitzenform $\{\Phi^0[q], -1, v_1^+\}$ existiert. Der analoge Sachverhalt besteht für 8 von den 21 Primzahlen $q < 1000$ mit $q \equiv 7 \bmod 24$. Setzt man hier $m = \frac{q-7}{24}$, so erhält man die Tabelle

q	7	31	79	103	127	151	199	223	271	367	439
m	0	1	3	4	5	6	8	9	11	15	18
h	1	3	5	5	5	7	9	7	11	9	15
p_*^0	0	0	1	2	3	3	4	6	6	11	11

q	463	487	607	631	727	751	823	919	967	991
m	19	20	25	26	30	31	34	38	40	41
h	7	7	13	13	13	15	9	19	11	17
p_*^0	16	17	19	20	24	24	30	29	35	33

In beiden Tabellen entstammen die Werte von h den Klassenzahltafeln [8] von HANSRAJ GUPTA.

Wir werden weiter unten sehen, daß die Drehreste von v_1^- in den e_{2*}^0 Ecken der Ordnung 2 wieder sämtlich gleich 0, die von v_1^+ in diesen Ecken also sämtlich gleich $\frac{1}{2}$ sind. Der im Fundamentalbereich $\mathfrak{F}_*^0$ von $\Phi^0[q]$ einzige elliptische Fixpunkt ω der Ordnung 3 gehört als solcher zur Untergruppe $\Gamma^0[q]$, auf der v_1^+ und v_1^- nur die Werte ± 1 annehmen. Bezeichnet E die Grundmatrix von ω, so liegt diese demnach in $\Gamma^0[q]$, und es gilt wegen $E^3 = -I$:

$$v_1^{\pm}(E) = \xi_3^{1+2a} = -1 \qquad (a = 0, 1, 2) ,$$

was den Drehrest $\frac{1}{3}a = \frac{1}{3}$ liefert. Für eine ganze Spitzenform $\varphi \not\equiv 0$ aus $\{\Phi^0[q], -1, v_1^+\}$ ergibt sich die Bedingung

$$\frac{q+1}{24} \geqq 1 + h + \tfrac{1}{3} , \quad \text{das heißt} \quad h + 1 \leqq \frac{q-7}{24} ,$$

die nach der zweiten Tabelle für die 8 Primzahlen

$$q = 7,\ 31,\ 79,\ 103,\ 127,\ 151,\ 199,\ 271$$

nicht erfüllt ist; für diese q existiert also außer Null keine ganze Spitzenform $\{\Phi^0[q], -1, v_1^+\}$.

Wir bezeichnen im folgenden mit $\mu_1^{\pm}$ den Rang der Schar der ganzen Spitzenformen $\{\Phi^0[q], -1, v_1^{\pm}\}$; dabei sei stets q Primzahl $\equiv 3 \bmod 4$, $q > 3$. Für 23 Primzahlen $q < 1000$ verschwindet μ_1^+; die Frage, ob μ_1^+ für alle q verschwindet, müssen wir zunächst offenlassen. *Dagegen werden wir jetzt die Differenz $\mu_1^- - \mu_1^+$ bestimmen.*

Es bezeichne ϑ_2 die Anzahl der elliptischen Fixpunkte von $\Phi^0[q]$ in $\mathfrak{F}_*^0$, in denen der Drehrest von v_1^- den Wert $\frac{1}{2}$ hat. Nach dem RIEMANN-ROCHschen Satz [9] und weil außer Null keine ganze Normalfunktion $\{\Phi^0[q], -1, v_1^+\}$ existiert, gilt dann

$$\mu_1^- = -1 + \frac{q+1}{24} - \frac{1}{2}\vartheta_2 - \frac{1}{6}\left(1 + \left(\frac{q}{3}\right)\right) - p_*^0 + 1 + \mu_1^+ ,$$

also nach (6.12)

$$\mu_1^- - \mu_1^+ = \tfrac{1}{4}\left(3 - \left(\frac{2}{q}\right)\right) h - \tfrac{1}{2}\,\vartheta_2 - \tfrac{1}{2}\,. \tag{6.13}$$

Es kommt also ausschließlich darauf an, ϑ_2 zu bestimmen.

Daß die Matrix $KL = K\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ (vgl. (6.9)) eine elliptische Substitution induziert, besagt $\beta = q\gamma$. Setzt man dies in (6.6) ein, so erscheint in der geschweiften Klammer im Exponenten von ξ_3 die durch 6 teilbare Zahl $q\delta\gamma(\gamma^2 - 1)$; demgemäß wird

$$\lambda_2(L) = \left(\frac{\alpha}{q}\right)(-1)^{\gamma\frac{q+1}{4}}\,\xi_3^{(\alpha+\delta)\gamma\frac{q+1}{4}} \qquad (\alpha\delta = 1 + q\gamma^2)\,. \tag{6.14}$$

Aus $q \equiv 1$ und $\gamma \not\equiv 0 \bmod 3$ folgt $\alpha\delta \equiv -1$, also $\alpha + \delta \equiv 0 \bmod 3$; daher ist der Exponent von ξ_3 stets durch 3 teilbar, und man erhält zunächst

$$\lambda_2(L) = \left(\frac{\alpha}{q}\right) \quad \text{für} \quad q \equiv 7 \bmod 8, \quad \text{d. h.} \quad q \equiv 7 \quad \text{oder} \quad 23 \bmod 24\,. \tag{6.15}$$

Es sei $q \equiv 3 \bmod 8$, das heißt $q \equiv 11$ oder $19 \bmod 24$. Aus $\gamma \equiv 0$ bzw. $1 \bmod 2$ folgt $\alpha\delta \equiv 1$ bzw. $0 \bmod 4$. Auf der rechten Seite von (6.14) wird nun der Faktor von $\left(\frac{\alpha}{q}\right)$ genau dann $= -1$, wenn α und δ beide gerade sind; es gilt also

$$\lambda_2(L) = \pm\left(\frac{\alpha}{q}\right) \quad \text{für} \quad q \equiv 3 \bmod 8\,, \quad \text{d. h.} \quad q \equiv 11 \quad \text{oder} \quad 19 \bmod 24 \tag{6.16}$$

und unter dieser Bedingung für q

$$\lambda_2(L) = -\left(\frac{\alpha}{q}\right) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \alpha \equiv \delta \equiv 0 \bmod 2\,. \tag{6.16a}$$

Wir haben jetzt nur noch zu beachten, daß $\lambda_2(KL) = -i\,\lambda_2(L)$ ist und daß, da η_2 in der oberen Halbebene nicht verschwindet, die Werte (6.15, 16, 16a) ausdrücken, daß λ_2 in allen elliptischen Fixpunkten der Ordnung 2 von $\Phi^0[q]$ den Drehrest Null hat. Der Vergleich mit v_1^- zeigt im Hinblick auf die Bedingungen (6.10):

$$\vartheta_2 = 0 \quad \text{für} \quad q \equiv 7 \bmod 8\,, \qquad \vartheta_2 = h \quad \text{für} \quad q \equiv 3 \bmod 8\,. \tag{6.17}$$

Daraus folgt nach (6.13) das *gesuchte Ergebnis*

$$\mu_1^- - \mu_1^+ = \tfrac{1}{2}(h - 1)\,. \tag{6.18}$$

(6.17) enthält auch die oben für $q \equiv 7 \bmod 24$ angewendete Aussage über die Drehreste von v_1^+ in den elliptischen Fixpunkten der Ordnung 2 von $\Phi^0[q]$.

Wir zeigen zum Schluß noch, daß *die Summe* $\mu_1^- + \mu_1^+$ *mit dem Rang* μ_1 *der Schar* $\mathfrak{C}_1^0$ *der ganzen Spitzenformen* $\{\Gamma^0[q], -1, v_1\}$ *übereinstimmt.* Hierzu erklären wir, wenn $f(\tau)$ eine automorphe Form der Dimension -1 und $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine reelle Matrix positiver Determinante bezeichnet:

$$f \mid S = f(\tau) \mid S = f(S\tau)(c\tau + d)^{-1} .$$

Liegt f in der Klasse $\{\Gamma^0[q], -1, v_1\}$, so nimmt $f \mid K$ bei Transformation mit der Matrix $K^{-1}LK = L'$ aus $K^{-1}\Gamma^0[q]K = \Gamma^0[q]$ gemäß

$$f \mid K \mid K^{-1}LK = f \mid LK = f \mid L \mid K = v_1(L) f \mid K$$

den Faktor $v_1(L) = v_1(L')$ auf, liegt also in der gleichen Klasse wie f.

Es bezeichne $\varphi_j(\tau)$ $(1 \leqq j \leqq \mu_1)$ eine Basis von $\mathfrak{C}_1^0$, $\mathfrak{q}(\tau)$ die Spalte mit den Komponenten $\varphi_j(\tau)$ und $\mathfrak{q}(\tau) \mid S$ (S wie oben) die Spalte mit den Komponenten $\varphi_j(\tau) \mid S$. Dann gilt zunächst $\mathfrak{q}(\tau) \mid K = \Lambda \mathfrak{q}(\tau)$ mit einer quadratischen Matrix Λ des Grades μ_1 und daher

$$-\mathfrak{q}(\tau) = \mathfrak{q}(\tau) \mid K^2 = \mathfrak{q}(\tau) \mid K \mid K = \Lambda^2 \mathfrak{q}(\tau) ,$$

also $\Lambda^2 = -I$. Hiernach kann $\Lambda = W^{-1}DW$ mit einer umkehrbaren Matrix $W = W^{(\mu_1)}$ und einer Diagonalmatrix D geschrieben werden, deren erste m_1 Diagonalelemente $= +i$ und deren restliche $m_2 = \mu_1 - m_1$ Diagonalelemente $= -i$ sind.

Die Komponenten $\psi_j(\tau)$ der Spalte $\mathfrak{p}(\tau) = W\mathfrak{q}(\tau)$ bilden ebenfalls eine Basis von $\mathfrak{C}_1^0$, und es gilt $\mathfrak{p}(\tau) \mid K = D\mathfrak{p}(\tau)$, also

$$\psi_j(\tau) \mid K = i\psi_j(\tau) \ (1 \leqq j \leqq m_1) , \quad \psi_j(\tau) \mid K = -i\psi_j(\tau) \ (m_1 + 1 \leqq j \leqq \mu_1) ,$$

was besagt, daß $\psi_j(\tau)$ eine ganze Spitzenform $\{\Phi^0[q], -1, v_1^\pm\}$ darstellt, je nachdem ob $1 \leqq j \leqq m_1$ oder $m_1 + 1 \leqq j \leqq m_1 + m_2$ ist. Daraus folgt sofort: Die Schar der ganzen Spitzenformen $\{\Phi^0[q], -1, v_1\}$ ist die direkte Summe der Scharen der ganzen Spitzenformen $\{\Phi^0[q], -1, v_1^+\}$ und $\{\Phi^0[q], -1, v_1^-\}$, und es gilt

$$m_1 = \mu_1^+ , \quad m_2 = \mu_1^- , \quad \mu_1^- + \mu_1^+ = \mu_1 , \quad \operatorname{Sp} \Lambda = -i\,\tfrac{1}{2}(h-1) . \tag{6.19}$$

Die Gegenstände dieses Abschnittes hängen mit der *HECKEschen Operatorentheorie* zusammen, wie der Vergleich mit HECKE [10] erkennen läßt. In dieser Theorie bedeuten die Aussagen (6.19) vermutlich folgendes: In der Schar der Modulformen von der Dimension -1, vom Teiler q und vom Charakter $\varepsilon(n) = \left(\frac{n}{q}\right)$ besitzt der Operator T_q^q nur die Eigenwerte $\frac{\pm i}{\sqrt{q}}$, und zwar genau um $\frac{1}{2}(h-1)$ Eigenwerte $\frac{-i}{\sqrt{q}}$ mehr als Eigenwerte $\frac{+i}{\sqrt{q}}$. Es darf jedoch nicht übersehen

werden, daß die Operatorentheorie im Falle der Dimension -1 eines ihrer primitivsten Fundamente entbehrt: Man kennt hier nicht einmal den Grad der Matrizen, die in dieser Theorie auftreten. Die Bestimmung des Grades ist nach (6.18) mit der des Ranges μ_1^+ gleichbedeutend.

Nach (5.17) und (6.18) existieren *mindestens* $\frac{h+1}{2}$ *linear-unabhängige ganze Modulformen* $\{\Phi^0[q], -1, v_1^-\}$. Ein System von $\frac{h+1}{2}$ solchen Modulformen läßt sich nach HECKE [11] leicht explizit bestimmen. Hierfür empfiehlt es sich, die zu $\Gamma^0[q]$ und $\Phi^0[q]$ in der folgenden Weise konjugierten Gruppen

$$\begin{aligned} \Gamma_0[q] &= T\,\Gamma^0[q]\,T^{-1}\,, & \Phi_0[q] &= T\Phi^0[q]\,T^{-1} \\ &= D_{\sqrt{q}}^{-1}\,\Gamma^0[q]\,D_{|\sqrt{q}}\,, & &= D_{\sqrt{q}}^{-1}\,\Phi^0[q]\,D_{|\sqrt{q}}\,; \qquad D_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

heranzuziehen; wir bezeichnen die aus $v_1^\pm$ durch die entsprechende Transformation entstehenden Multiplikatoren wieder mit $v_1^\pm$.

Die gesuchten Modulformen werden durch den Ansatz von HECKE [11] in der Gestalt $\vartheta(\tau, 0, \mathfrak{a}, \sqrt{-q})$ geliefert; vorzuziehen ist der HECKEschen die übersichtlichere Schreibweise

$$\vartheta(\tau, \mathfrak{K}) = 1 + 2 \sum_{\mathfrak{g} \in \mathfrak{K}} e^{2\pi i N(\mathfrak{g})\tau}\,, \tag{6.20}$$

wo $\mathfrak{g}$ die ganzen Ideale der absoluten Idealklasse $\mathfrak{K}$ von $\mathsf{P}(\sqrt{-q})$ durchläuft und N die Norm bezeichnet. Aus [11] Satz 5 und 7 geht hervor, daß diese $\vartheta(\tau, \mathfrak{K})$ ganze Modulformen $\{\Phi_0[q], -1, v_1^-\}$ darstellen. Durchläuft $\mathfrak{K}$ ein vollständiges System $\mathfrak{B}$ absoluter Idealklassen, welches keine zwei einander reziproken Klassen enthält, so gewinnt man in den entstehenden $\vartheta(\tau, \mathfrak{K})$ $(\mathfrak{K} \in \mathfrak{B})$ nach bekannten Sätzen offenbar $\frac{h+1}{2}$ linear unabhängige ganze Modulformen $\{\Phi_0[q], -1, v_1^-\}$; zur Klasse $\{\Phi^0[q], -1, v_1^-\}$ gehören daher die $\frac{h+1}{2}$ linear unabhängigen ganzen Modulformen $\vartheta\left(\frac{\tau}{q}, \mathfrak{K}\right)$ $(\mathfrak{K} \in \mathfrak{B})$. Daß sich die Normalfunktion $H_1^0(\tau)$ als lineares Kompositum der Funktionen $\vartheta\left(\frac{\tau}{q}, \mathfrak{K}\right)$ darstellen läßt, besagt die Relation [11] (24)

$$\sum_{\mathfrak{K}} \vartheta(\tau, \mathfrak{K}) = 2H_1^0(q\tau)\,,$$

in der links über alle Idealklassen von $\mathsf{P}(\sqrt{-q})$ zu summieren ist. Eine Basis der von den $\vartheta\left(\frac{\tau}{q}, \mathfrak{K}\right)$ aufgespannten Schar ganzer Spitzenformen

$\{\Phi^0[q], -1, v_1^-\}$ erhält man in der Gestalt

$$\theta\left(\frac{\tau}{q}, \chi\right) = \sum_{\mathfrak{K}} \chi(\mathfrak{K})\, \vartheta\left(\frac{\tau}{q}, \mathfrak{K}\right)$$

wo χ ein volles System von Nicht-Hauptcharakteren der Klassengruppe des Körpers $\mathsf{P}(\sqrt{-q})$ derart durchläuft, daß keine zwei dieser Charaktere zueinander reziprok sind.

Für $q \equiv 3 \bmod 8$ gibt es im Fundamentalbereich $\mathfrak{F}^0[q]$ der $\Gamma^0[q]$ nach (6.17) $2h$ explizit bestimmte Punkte, in denen alle $\vartheta\left(\frac{\tau}{q}, \mathfrak{K}\right)$ verschwinden. Diese Eigenschaft, die man den $\vartheta(\tau, \mathfrak{K})$ nicht „ansieht", zeigt mit wünschenswerter Deutlichkeit, *was für Kenntnisse durch Hinzunahme der Transformation K zur Gruppe $\Gamma^0[q]$ gewonnen werden können.*

LITERATUR

[1] E. HECKE, *Theorie der* EISENSTEIN*schen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5 (1927) 199.

[2] H. PETERSSON, *Über die systematische Bedeutung der* EISENSTEIN*schen Reihen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 16 I (1947) 104.

[3] H. PETERSSON, *Über den Körper der Fourierkoeffizienten der von* HECKE *untersuchten* EISENSTEIN*reihen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 16 II (1948) 101.

[4] H. PETERSSON, *Über die eindeutige Bestimmung und die Erweiterungsfähigkeit von gewissen Grenzkreisgruppen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 12 (1938) 180.

[5] R. FRICKE, *Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen*, Bd. II, Leipzig 1922, II, 3. § 4, 357.

[6] H. HASSE, *Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper*, Berlin 1952.

[7] H. PETERSSON, *Über Modulfunktionen und Partitionenprobleme*, Abh. D. Akad. Wiss. Berlin 1954, 2.

[8] HANSRAJ GUPTA, *On the class-numbers of binary quadratic forms*, Univ. Nac. Tucuman Revista A 3, 1942, 21.
Diese Klassenzahltafeln stellen eine Erweiterung und Berichtigung GAUSSscher Klassenzahltafeln dar (Werke, Bd. II, S. 450–452). Von den auf S. 30, 31 zitierten Werten h weicht, wie ich einer Mitteilung von Herrn J. J. BURCKHARDT entnehme, nur der zu $q = 647$ gehörige Wert $h = 23$ von der GAUSSschen Angabe $h = 25$ ab. Daß tatsächlich $h = 23$ ist, wird ausdrücklich bestätigt durch J. J. BURCKHARDT, Der math. Nachlaß von L. SCHLÄFLI, Mitt. Naturf. Ges. Bern (1942) 21.

[9] H. PETERSSON, *Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen II*, Math. Ann. 115 (1938) 175.

[10] E. HECKE, *Die Klassenzahl imaginär-quadratischer Körper in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, Monatsh. Math. Phys. 48 (1939) 75.

[11] E. HECKE, *Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, Math. Ann. 97 (1926) 210.

(Eingegangen den 15. Februar 1956)