Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 32 (1957-1958)

Artikel: Transmutations d'opérateurs différentiels dans le domaine complexe.

Autor: Delsarte, J. / Lions, J.L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25339

Transmutations d'opérateurs différentiels dans le domaine complexe

par J. Delsarte et J. L. Lions, Nancy

Introduction

Etant donnés deux opérateurs différentiels A et B, sur un espace H, on dit que X est *un opérateur de transmutation de A en B*, si X est un *isomorphisme* de H sur H, tel que $BX = XA$.

Cette notion dépend de A, de B, et aussi de l'espace H choisi. Elle a été introduite en 1938, dans [2]: A et B étaient deux opérateurs différentiels du deuxième ordre, H était un espace de fonctions d'une variable, définies pour $x \geqslant 0$. Diverses généralisations et applications ont été données à partir de 1950, dans [5], [7], [8], [9], [10], [12].

Si A et B sont d'ordre $m > 2$, à coefficients indéfiniment différentiables, H étant l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur R, il n'existe pas, en général, d'opérateurs de transmutations. Le problème de la classification des opérateurs différentiels, sur R, d'ordre > 2, se pose donc naturellement. Il semble difficile. Un cas particulier, correspondant à une équation singulière, est traité dans [9].

La situation est, au contraire, fort simple si l'on prend pour A et B des opérateurs différentiels sans singularité, dans le domaine complexe, H étant l'espace des fonctions entières d'une variable complexe. Dans ce cas, *on peut toujours transmuer A en B*, pourvu qu'ils soient *de même ordre.* C'est ce que nous montrons au numéro 1.

Nous donnons ensuite quelques applications simples de ce résultat, à la théorie de la moyenne-périodicité, dans le complexe, à la théorie de la commutation de deux opérateurs différentiels, etc.

Ce travail a été résumé dans une note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, p. 832–834 (1957).

1. Théorème de transmutation – Construction d'un isomorphisme particulier

Soit H l'espace des fonctions holomorphes d'une variable complexe x, muni de la topologie usuelle de la convergence uniforme sur tout compact. Soit $D = d/dx$; on désigne par A l'opérateur différentiel:

$$A = \sum_{j=0}^{m} a_j D^j \tag{1.1}$$

où $a_j \in H$ pour tout j, et $a_m = 1$.

On appelle *opérateur de transmutation de A en D^m sur H* un opérateur X, s'il existe, ayant les propriétés suivantes:

(i) X est un isomorphisme de H sur H,

(ii) $D^m X = XA$.

Nous allons montrer dans ce numéro le

Théorème 1.1. *Il existe toujours un opérateur de transmutation de A en D^m sur H.*

On verra au numéro suivant (et c'est d'ailleurs immédiat) qu'il existe alors une infinité d'opérateurs de transmutations de A en D^m.

Par ailleurs, il résulte aussitôt du théorème 1.1 le

Corollaire 1.1. *Si B est un deuxième opérateur d'ordre m, du même type que A, il existe un opérateur de transmutation de A en B.*

Démonstration du théorème 1.1.

1) Pour tout $f \in H$, posons à priori

$$Xf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{m-1} D^p A^k f(0)\, x^{p+km} \frac{1}{(p+km)!} \tag{1.2}$$

et admettons provisoirement le

Lemme 1.1. *La série* (1.2) *converge dans H et l'application linéaire de H dans H ainsi définie est continue.*

Ce lemme admis pour l'instant, nous avons

$$D^m Xf(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p} D^p A^k f(0)\, x^{p+(k-1)m} \frac{1}{(p+(k-1)m)!},$$

ce qui, en changeant k en $k-1$ s'écrit $XAf(x)$, donc

$$D^m Xf = XAf \tag{1.3}$$

pour tout $f \in H$.

On va maintenant démontrer que X est un isomorphisme de H sur lui-même. La démonstration va se faire en plusieurs points.

2) *L'opérateur X est biunivoque.*

Notons d'abord la propriété suivante, immédiate à partir de (1.2)

$$Xf(0) = f(0), \quad DXf(0) = Df(0), \ldots, D^{m-1}Xf(0) = D^{m-1}f(0)\,. \tag{1.4}$$

Montrons maintenant que si $Xf = 0$ alors $f = 0$. Vu (1.4) on sait déjà que

$$f(0) = Df(0) = \ldots = D^{m-1}f(0) = 0\,. \tag{1.5}$$

De (1.3) il résulte, puisque $Xf = 0$

$$XAf = 0 \ ,$$

donc, en appliquant (1.4) avec Af au lieu de f

$$Af(0) = DAf(0) = \ldots = D^{m-1}Af(0) = 0 \ ,$$

ce qui, en utilisant la forme de A et (1.5), entraîne

$$D^m f(0) = D^{m+1}f(0) = \ldots = D^{2m-1}f(0) = 0 \ ,$$

et ainsi de suite:

$$D^n f(0) = 0 \qquad \text{pour tout } n,$$

donc $f = 0$. C. Q. F. D.

3) *Fonction* $\Theta(x,\lambda)$ *et opérateur* $\mathcal{X}$.

On désigne par $\Theta(x,\lambda)$ *la* solution de

$$A_x\Theta(x,\lambda) - \lambda^m\Theta(x,\lambda) = 0 \ , \qquad \lambda \in C \ , \tag{1.6}$$

avec

$$\Theta(0,\lambda) = 1 \ , \qquad D_x\Theta(0,\lambda) = \lambda, \ldots, D_x^{m-1}\Theta(0,\lambda) = \lambda^{m-1} \ . \tag{1.7}$$

La fonction Θ est entière de x et de λ; considérons le développement

$$\Theta(x,\lambda) = \sum_{n\geqslant 0} \theta_n(x)\lambda^n \frac{1}{n!} \ ; \tag{1.8}$$

on a

$$\theta_n \in H \qquad \text{pour tout } n,$$

et les relations

$$A\theta_n = 0 \ \text{ si } \ n \leqslant m-1 \ , \quad D^j\theta_n(0) = j!\,\delta_{nj} \ , \quad j = 0,1,\ldots,m-1 \tag{1.9}$$

et

$$A\theta_n = \frac{n!}{(n-m)!}\theta_{n-m} \quad \text{si} \quad n \geqslant m, \quad \theta_n(0) = \ldots = D^{m-1}\theta_n(0) = 0 \tag{1.10}$$

relations qui caractérisent complètement les θ_n .

Considérons maintenant la série

$$\mathcal{X}f(x) = \sum_n D^n f(0)\,\theta_n(x)\frac{1}{n!} \tag{1.11}$$

et admettons provisoirement le

Lemme 1.2. *La série* (1.11) *converge dans* H *et l'application linéaire ainsi définie de* H *dans* H *est continue.*

Ce lemme admis pour l'instant, il résulte aussitôt de (1.9) et (1.10) que l'on a

$$A\mathscr{X}f = \mathscr{X}D^m f \quad \text{pour tout} \quad f \in H \ . \tag{1.12}$$

Notons également que

$$\mathscr{X}f(0) = f(0) \ ; \quad D\mathscr{X}f(0) = Df(0), \ldots, D^{m-1}\mathscr{X}f(0) = D^{m-1}f(0) \ . \tag{1.13}$$

4) *L'application X est sur.*

Il résulte de (1.11) que

$$\mathscr{X}x^n = \theta_n \ .$$

Posons $X\theta_n = \varphi_n$. Nous avons $D^m\varphi_n = XA\theta_n$, d'où en utilisant (1.9) et (1.10)

$$D^m\varphi_n = 0 \quad \text{si} \quad n \leqslant m-1 \ , \quad = \frac{n!}{(n-m)!}\varphi_{n-m} \quad \text{si} \quad n \geqslant m \ ,$$

et $D^j\varphi_n(0) = j!\ \delta_{nj}$, $j \leqslant m-1$.

Il en résulte que

$$\varphi_n(x) = x^n \quad \text{pour tout } n \ ,$$

donc que

$$X\mathscr{X}x^n = x^n \quad \text{pour tout } n, \tag{1.14}$$

et par conséquent

$$X\mathscr{X} f = f \quad \text{pour tout} \quad f \in H \ . \tag{1.15}$$

Ceci montre que X applique H sur H; comme X est déjà biunivoque, il en résulte que X est un isomorphisme (algébrique) de H sur H, d'inverse $\mathscr{X}$; donc X est un isomorphisme topologique (si l'on ne savait pas que $\mathscr{X}$ est continu, le résultat serait également vrai, par application du théorème d'isomorphisme de BANACH).

Démonstration du lemme 1.1. Il résulte de la formule de CAUCHY que

$$Af(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C B(x,y)\frac{1}{(y-x)^{m+1}}f(y)dy \tag{1.16}$$

où

$$B(x,y) = \sum_{j=0}^{j=m}(y-x)^{m-j}a_j(x)j! \ , \tag{1.17}$$

et, où, pour fixer les idées, C est un cercle de centre x. On en déduit

$$A^2f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} B(x,y_1)\frac{1}{(y_1-x)^{m+1}}Af(y_1)dy_1$$

où C_1 est un cercle quelconque de centre x; on peut remplacer

$$Af(y_1) \quad \text{par} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} B(y_1,y_2)\frac{1}{(y_2-y_1)^{m+1}}f(y_2)dy_2$$

où C_2 est un cercle quelconque de centre y_1. Finalement, on peut écrire

$$A^k f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{C_1} \frac{B(x_1 y_1)}{(y_1 - x)^{m+1}} dy_1 \int_{C_2} \frac{B(y_1, y_2)}{(y_2 - y_1)^{m+1}} dy_2 \ldots \int_{C_k} \frac{B(y_{k-1}, y_k)}{(y_k - y_{k-1})^{m+1}} f(y_k) dy_k \tag{1.18}$$

où nous prenons les C_i comme suit: Soit $R > 0$ fixe quelconque; alors

C_k a pour centre y_{k-1}, pour rayon $R/(k+1)$;
C_{k-1} a pour centre y_{k-2}, pour rayon $R/(k+1)$;
......
C_2 a pour centre y_1, pour rayon $R/(k+1)$;
C_1 a pour centre x , pour rayon $R/(k+1)$.

En utilisant maintenant la relation

$$D^p f(0) = \frac{p!}{(2\pi i)} \int_{C_0} \frac{1}{y_0^{p+1}} f(y_0) dy_0$$

où C_0 a pour centre l'origine et pour rayon $R/(k+1)$, on a finalement

$$D^p A^k f(0) = \frac{p!}{(2\pi i)^{k+1}} \int_{C_0} \frac{dy_0}{y_0^{p+1}} \int_{C_1} \frac{B(y_0, y_1)}{(y_1 - y_0)^{m+1}} dy_1 \int_{C_2} \ldots \int_{C_k} \frac{B(y_{k-1}, y_k)}{(y_k - y_{k-1})^{m+1}} f(y_k) dy_k \tag{1.19}$$

où $C_0, C_1, \ldots C_k$ sont choisis comme ci-dessus et où C_1 a pour centre y_0 et pour rayon $R/(k+1)$.

Du choix des rayons il résulte que dans (1.19) on a

$$|y_k| \leqslant R .$$

De façon générale si $g \in H$, posons

$$|g|_R = \max |g(x)| , \qquad |x| \leqslant R .$$

On a

$$|B(y_{l-1}, y_l)| \leqslant m! \, (1 + \alpha(R, k)) ,$$

où

$$\alpha(R,k) = |a_{m-1}|_R \left(\frac{R}{k+1}\right) + |a_{m-2}|_R \left(\frac{R}{k+1}\right)^2 + \cdots + |a_0|_R \left(\frac{R}{k+1}\right)^m$$

et l'on déduit alors de (1.19)

$$|D^p A^k (f(0))| \leqslant p! (m!)^k (1 + \alpha(R,k))^k \left(\frac{k+1}{R}\right)^{km+p} |f|_R . \tag{1.20}$$

Il en résulte que

$$\limsup_{n = p + km \to \infty} \left(\left| D^p A^k f(0) \frac{x^n}{n} \right|^{1/n} \right) \leqslant \frac{(m!)^{1/m} e}{Rm} |x| .$$

Puisque R est fixé quelconque, le lemme 1.1 en résulte.

Démonstration du lemme 1.2. Commençons par démontrer le lemme suivant:

Lemme 1.3. *Soit v une fonction donnée dans H telle que $|v(x)| \leqslant M|x|^{\lambda-1}$, λ entier, pour $|x| \leqslant R$ (M dépend de R). Soit u la solution de*

$$Au = v \ , \tag{1.21}$$

avec

$$u(0) = Du(0) = \ldots = D^{m-1}u(0) = 0 \ . \tag{1.22}$$

Alors, il existe une constante C dépendant de R et de A telle que pour tout x avec $|x| \leqslant R$, on ait

$$|u(x)| \leqslant M \frac{\Gamma(\lambda)}{(m+\lambda)!} |x|^{m+\lambda-1} \exp C|x| \ . \tag{1.23}$$

Démonstration. On multiplie les deux membres de (1.21) par

$$\frac{1}{(m-1)!}(x-y)^{m-1} \ ,$$

et on intégre de 0 à x, sur le segment joignant 0 à x, pour fixer les idées. On obtient

$$u(x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^x (x-y)^{m-1} v(y)dy + \int_0^x H(x,y)u(y)dy \tag{1.24}$$

où $H(x,y)$ est une fonction entière de x et y, qui dépend de A.

Si l'on pose

$$w(x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^x (x-y)^{m-1} v(y)dy \ ,$$

on peut écrire, posant $y = tx$

$$w(x) = \frac{x^m}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} v(tx)dt$$

d'où en utilisant l'hypothèse faire sur v

$$|w(x)| \leqslant M \frac{\Gamma(\lambda)}{(m+\lambda)} |x|^{m+\lambda-1} \ , \qquad |x| \leqslant R \ . \tag{1.25}$$

On résout maintenant (1.24) par approximation successives

$$u_0 = w, \ldots, u_n = w + \int_0^x H u_{n-1} dy, \ldots$$

On voit facilement que, C désignant le maximum de $H(x,y)$ pour $|x| \leqslant R$, $|y| \leqslant R$

$$|u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leqslant MC^n \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(m+\lambda+n)} |x|^{m+\lambda-1+n} \ , \qquad |x| \leqslant R \ .$$

On en déduit facilement (1.23).

Passons maintenant à la démonstration du lemme 1.2. Il résulte aussitôt de la majoration suivante:

$$|\theta_{km+p}(x)| \leqslant M|x|^{km+p} \exp(kCR) \ , \qquad |x| \leqslant R \ , \tag{1.26}$$

où

$$M = \sup_{j=0,\ldots,m-1,\,|x|\leqslant R} |x|^{-j}|\theta_j(x)| \ . \tag{1.27}$$

Reste donc à démontrer (1.26); ce que l'on fait, pour p fixé $(0 \leqslant p \leqslant m-1)$ par récurrence sur k. Le résultat est vrai si $k=0$, par définition de M. Admettons le pour $1,\ldots,k-1$, donc

$$|\theta_{(k-1)m+p}(x)| \leqslant M|x|^{(k-1)m+p} \exp(k-1)CR \ .$$

On utilise maintenant (1.10) et le lemme 1.3 pour avoir (1.26).

Le Théorème 1.1 est ainsi complètement démontré.

Remarque 1.1. Désignons par $\mathscr{H}$ l'espace des fonctions holomorphes à l'origine, muni de la topologie de limite inductive usuelle. Soit $A = \overset{m}{\Sigma} a_j D^j$, avec $a_m = 1$ et $a_j \in \mathscr{H}$. Alors la démonstration du théorème 1.1 fournit également le

Théorème 1.2. *Il existe toujours un isomorphisme X de $\mathscr{H}$ sur lui-même tel que $D^m X = XA$.*

2. Détermination de tous les isomorphismes

Il est évident que *tout* isomorphisme de transmutation de A en D^m s'obtient en composant l'opérateur X construit au numéro 1 avec un élément quelconque *Y du groupe $\mathscr{G}_m$ des isomorphismes tels que*

$$D^m Y = Y D^m \ . \tag{2.1}$$

Nous allons dans ce numéro construire $\mathscr{G}_m$.

Soit H' le dual de H; si $f \to <\mu; f>$ est une forme linéaire continue sur H $(\mu \in H')$, elle est déterminée de façon unique par

$$<\mu, e_\lambda> = \hat{\mu}(\lambda) \ , \qquad e_\lambda(x) = \exp(\lambda x) \ , \qquad \lambda \in C \ ; \tag{2.2}$$

$\hat{\mu}$ est une fonction entière de type exponentiel. – On appelle $\hat{\mu}$ *la transformée de* Fourier *de μ.*

Soit maintenant $Y \in \mathcal{L}(H,H)$; alors, pour tout $a \in C$ fixé, $f \to Yf(a)$ est une forme linéaire continue sur H, donc de la forme

$$Yf(a) = <\mu(a), f> \tag{2.3}$$

où $\mu(a) \in H'$; soit $\hat{\mu}(a; \lambda)$ la transformée de FOURIER de $\mu(a)$; la fonction $a \to Yf(a)$ étant dans H, la fonction $a \to \mu(a)$ est entière à valeurs dans H' ou, ce qui revient au même $a, \lambda \to \hat{\mu}(a, \lambda)$ est entière en a et λ, entière de type exponentiel en λ (de type borné lorsque a parcourt un compact). Cherchons maintenant à construire les $Y \in \mathcal{L}(H; H)$, ayant les *deux propriétés supplémentaires*

(i) Y vérifie (2.1) (Y est un opérateur de *commutation*),

(ii) Y est un isomorphisme de H sur lui-même.

Recherche des Y vérifiant (i).

Il suffit d'écrire que $D^m Y e_\lambda = Y D^m e_\lambda$ pour tout $\lambda \in C$; mais $D^m e_\lambda = \lambda^m e_\lambda$ donc

$$D^m Y e_\lambda = \lambda^m Y e_\lambda \ . \tag{2.4}$$

Or

$$Ye_\lambda(a) = <\mu(a), e_\lambda> = \hat{\mu}(a; \lambda)$$

donc (2.4) équivaut à

$$D_a^m \hat{\mu}(a; \lambda) = \hat{\mu}(a; \lambda) \tag{2.5}$$

et

$$\lambda \to \hat{\mu}(a; \lambda),\ \lambda \to D_a^p \hat{\mu}(a; \lambda)$$

doivent être entières de type exponentiel, donc

$$\hat{\mu}(a; \lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} M_j(\lambda) \exp(\lambda \omega^j a) \tag{2.6}$$

où

$$\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$$

et où les fonctions

$$M_j \quad (j = 1, \ldots, m-1)$$

sont entières de type exponentiel. Donc

Proposition 2.1. *Tout Y vérifiant* (i) *est représenté par* (2.3) *où la transformée de* FOURIER *de* $\mu(a)$ *est donnée par* (2.6).

Recherche des Y vérifiant (i) *et* (ii).

Si Y vérifie (i) et (ii) alors l'isomorphisme *inverse*

$$Z = Y^{-1}$$

vérifie également

$$D^m Z = Z D^m$$

donc, vu la proposition 2.1 on a

$$Z f(a) = \langle \nu(a), f \rangle \tag{2.7}$$

avec

$$\hat{\nu}(a;\lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} N_j(\lambda) \exp(\lambda \omega^j a) \ . \tag{2.8}$$

Il faut trouver la condition nécessaire et suffisante pour que, Y étant donné, il existe Z donné par (2.7) et (2.8) avec

$$YZf = ZYf = f$$

pour tout $f \in H$; il suffit naturellement d'écrire

$$YZe_\lambda = ZYe_\lambda = e_\lambda \tag{2.9}$$

pour tout $\lambda \in C$. Or

$$Ze_\lambda(a) = \hat{\nu}(a;\lambda)$$

et alors

$$YZe_\lambda(a) = \sum_{j=0}^{m-1} N_j(\lambda) \hat{\mu}(a;\lambda\omega^j) \ .$$

De même

$$ZYe_\lambda(a) = \ldots \sum_{j=0}^{m-1} M_j(\lambda) \hat{\nu}(a;\lambda\omega^j)$$

de sorte que (2.9) équivaut à

$$\sum_{j,k} N_j(\lambda)\, M_k(\lambda\omega^j) \exp \lambda a \omega^{j+k} = \sum_{j,k} M_j(\lambda) N_k(\lambda\omega^j) \exp(\lambda a \omega^{j+k}) = \exp(\lambda a)$$

ou encore, tous les calculs d'indices étant faits modulo m

$$\sum M_{k-j}(\lambda\omega^j) N_j(\lambda) \exp(\lambda a \omega^k) = \exp(\lambda a) \ ,$$

$$\sum N_{k-j}(\lambda\omega^j)\, M_j(\lambda) \exp(\lambda a \omega^k) = \exp(\lambda a) \ ,$$

donc

$$\sum_j M_{k-j}(\lambda\omega^j) N_j(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 0 \\ 0 & \text{si} \quad k = 1, 2, \ldots, m-1 \end{cases} \tag{2.10}$$

et

$$\sum_j N_{k-j}(\lambda\omega^j)\, M_j(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 0 \\ 0 & \text{si} \quad k = 1, 2, \ldots, m-1 \end{cases} \tag{2.11}$$

Introduisons les matrices (m, m)

$$\mathcal{M}(\lambda) = \| M_{k-j}(\lambda\omega^j) \| = \left\| \begin{matrix} M_0(\lambda) & M_1(\lambda) & ; \ldots ; M_{m-1}(\lambda) \\ M_{m-1}(\lambda\omega) & M_0(\lambda\omega); & \ldots ; M_{m-2}(\lambda\omega) \\ M_{m-2}(\lambda\omega^2) & & ; \ldots ; \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ M_1(\lambda\omega^{m-1}) & & \ldots ; M_0(\lambda\omega^{m-1}) \end{matrix} \right\|$$

$$\mathcal{N}(\lambda) = \| N_{k-j}(\lambda\omega^j) \| \ .$$

Alors (2.10) et (2.11) équivalent à

$$\mathcal{M}(\lambda)\,\mathcal{N}(\lambda) = E \qquad (E = \text{matrice unité}) \tag{2.12}$$

$$\mathcal{N}(\lambda)\,\mathcal{M}(\lambda) = E \tag{2.13}$$

Il résulte de (2.12) par exemple qu'une condition nécessaire est

$$\text{dét.}\ \mathcal{M}(\lambda) \neq 0 \qquad \text{pour tout } \lambda\ . \tag{2.14}$$

Mais la fonction

$$\lambda \to \text{dét.}\ \mathcal{M}(\lambda)$$

est entière de type exponentiel et

$$\text{dét.}\ \mathcal{M}(\lambda\,\omega) = \text{dét.}\ \mathcal{M}(\lambda)$$

donc (en utilisant le théorème de WEIERSTRASS)

$$\text{Dét.}\ \mathcal{M}(\lambda) = C_{\mathcal{M}} = \text{Constante} \neq 0 \qquad \text{si} \qquad m \geqslant 2 \tag{2.15}$$

(si $m = 1$, alors dét. $\mathcal{M}(\lambda) = C \exp(b\,\lambda)$).

Le système (2.10) détermine de façon unique les fonctions $N_j(\lambda)$ – et les $N_j(\lambda)$ *sont entières de type exponentiel.*

La matrice $\mathcal{N}(\lambda)$ construite à partir des fonctions $N_j(\lambda)$ que l'on vient de trouver vérifie (2.12), donc (2.13). Donc (2.10) et (2.11) ont lieu.

On a donc obtenu le

Théorème 2.1. *Tout isomorphisme Y de H sur lui-même tel que $D^m Y = Y D^m$ avec $m \geqslant 2$, est de la forme*

$$Y f(a) = \langle \mu(a), f \rangle$$

où

$$\langle \mu(a), e_\lambda \rangle = \hat{\mu}(a;\lambda) = \sum_{j=0}^{m=1} M_j(\lambda) \exp(\lambda\,\omega^j a)\ ,$$

les fonctions M_j étant entières de type exponentiel telles que dét. $\| M_{k-j}(\lambda\,\omega^j) \| =$ *constante non nulle.*

Remarque 2.1. Si $m = 1$, dét. $\mathcal{M}(\lambda) = M_0(\lambda) = c \exp(b\,\lambda)$ et $Y \cdot f(x) = c f(x + b)$ $(c \neq 0)$. Enfin, on a la

Proposition 2.2. *Si $m \geqslant 2$, le groupe $\mathcal{G}_m$ des isomorphismes Y tels que $D^m Y = Y D^m$ admet une représentation fidèle, de degré m, formée par les matrices*

$$\mathcal{M}(\lambda) = \| M_{k-j}(\lambda\,\omega^j) \|$$

où les fonctions M sont entières de type exponentiel, et telles que dét. $\mathcal{M}(\lambda) \neq 0$.

Remarque 2.2. D'après le théorème 1.1, le groupe $\mathcal{G}_A$ des isomorphismes X tels *que* $AX = XA$ *est isomorphe à* $\mathcal{G}_m$.

3. Fonctions moyenne-périodiques par rapport à D^m

Pour $f \in H$, on désignera par $T_m(f)$ le sous-espace vectoriel fermé de H engendré par Xf quand X parcourt $\mathcal{G}_m$.

Définition 3.1. On dit qu'une fonction $f \in H$ est *moyenne-périodique par rapport* à D^m lorsque $T_m(f)$ est différent de H.

Si $m = 1$, on retrouve la notion usuelle dans le domaine complexe ([4], [13]). Mais en fait la définition 3.1 n'introduit pas de notion nouvelle.

Proposition 3.1. *Il y a identité entre fonctions moyenne-périodiques par rapport à D^m et fonctions moyenne-périodique usuelles.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{G}_m \supset \mathcal{G}_1$, il est évident que toute fonction moyenne-périodique par rapport à D^m est moyenne-périodique usuelle.

Réciproquement, soit f moyenne-périodique usuelle. On veut montrer que f est moyenne-périodique par rapport à D^m, donc qu'il existe $T \in H'$, non nulle, avec

$$\langle T, Xf \rangle = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad X \in \mathcal{G}_m \, . \tag{3.1}$$

Soit $S \in H'$, $\neq 0$, orthogonale à $T_1(f)$; soit $\hat{S}(\lambda)$ la transformée de Fourier de S et posons

$$F(\lambda) = \prod_{j=0}^{m-1} \hat{S}(\omega^j \lambda) \, . \tag{3.2}$$

La fonction F est entière de type exponentiel, donc de la forme

$$F(\lambda) = \hat{T}(\lambda) \, , \qquad T \in H' \, , \qquad \neq 0 \, . \tag{3.3}$$

On va montrer qu'avec ce choix de T, (1) *a lieu.*

On sait que si l'on appelle spectre de f l'ensemble des zéros de $\hat{S}$, comptés avec leur multiplicité, alors $T_1(f)$ est engendré par les $x^q \exp \alpha x$, $q \leqslant p$, $(\alpha, p) \in$ spectre de f.

Donc $T_m(f)$ est engendré par les $X(x^q \exp \alpha x)$, $q \leqslant p$, $X \in \mathcal{G}_m$. Il suffit donc de montrer que

$$\langle T, X(x^q \exp \alpha x) \rangle = 0 \tag{3.4}$$

pour tout $X \in \mathcal{G}_m$ et tout $q \leqslant p$, $(\alpha, p) \in$ spectre de f.

Or, d'après (2.6), $X(x^q \exp \alpha x)$ est combinaison linéaire de $x^r \exp \alpha \omega^j x$, $r \leqslant p$, $j = 0, \ldots, m-1$. Donc (3.4) a lieu si, pour tout j, $\alpha \omega^j$ est un zéro de $F(\lambda) = \hat{T}(\lambda)$, de multiplicité p. Or, il en est bien ainsi d'après (3.2), d'où la proposition.

4. Fonctions moyenne-périodiques et commutateurs de D^m

Soit $\mathcal{A}_m$ l'algèbre des endomorphismes Y de $H \to H$ tels que

$$D^m Y = Y D^m . \tag{4.1}$$

On dit que $\mathcal{A}_m$ est *l'algèbre des commutateurs de* D^m. D'après le numéro 2, $\mathcal{A}_m$ est représentée fidèlement par l'algèbre des matrices

$$\mathcal{M}(\lambda) = || M_{k-j}(\lambda \omega^j) || .$$

Définition 4.1. Le commutateur Y est dit *non dégénéré* si la fonction dét. $\mathcal{M}(\lambda)$ n'est pas identiquement nulle.

Lemme 4.1. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un commutateur Y de D^m ne soit pas dégénéré est qu'il existe un deuxième commutateur Z de D^m tel que*

$$YZ = ZY = S , \tag{4.2}$$

où $S \in \mathcal{A}_1$, *non nul.*

Démonstration. La condition est suffisante; en effet si $\mathcal{N}(\lambda)$ est la matrice correspondant à Z, il résulte de (4.2) (puisque la matrice correspondant à S est de la forme: $\hat{S}(\lambda)\cdot E$, E = matrice unité (m,m))

$$(\text{dét.}\,\mathcal{M}(\lambda))\;(\text{dét.}\,\mathcal{N}(\lambda)) = \hat{S}(\lambda)$$

donc dét. $\mathcal{M}(\lambda)$ n'est pas nul.

La condition est nécessaire: désignons par $N_j(\lambda)$ le mineur relatif à l'élément $M_j(\lambda)$ sur lequel se croisent la première ligne et la j-ème colonne de $\mathcal{M}(\lambda)$; la fonction N_j est entière de type exponentiel; formons la matrice

$$\mathcal{N}(\lambda) = || N_{k-j}(\lambda \omega^j) || ;$$

elle représente un élément Z de $\mathcal{A}_m$; or

$$\mathcal{M}(\lambda)\,\mathcal{N}(\lambda) = \mathcal{N}(\lambda)\,\mathcal{M}(\lambda) = [\text{dét.}\,\mathcal{M}(\lambda)]\cdot E ; \tag{4.3}$$

la fonction dét. $\mathcal{M}(\lambda)$ étant entière de type exponentiel, la matrice

$$[\text{dét.}\,\mathcal{M}(\lambda)]\cdot E$$

représente un élément S de $\mathcal{A}_1$ (considéré dans $\mathcal{A}_m$), et (4.3) entraîne (4.2) d'où le lemme. On en déduit

Proposition 4.1. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément f de H soit moyenne-périodique est qu'il existe un commutateur Y de D^m, non dégénéré, tel que*

$$Yf = 0 \ . \tag{4.4}$$

Si f est moyenne-périodique, il existe $S \in \mathcal{A}_1$, $S \neq 0$, avec $Sf = 0$. D'où (4.4) avec $Y = S$ considéré dans $\mathcal{A}_m$. Réciproquement, soit f vérifiant (4.4). Comme Y est non-dégénéré, il existe Z dans $\mathcal{A}_m$, satisfaisant à la condition (4.2). Alors

$$ZYf = Sf = 0 \ .$$

Donc f est moyenne-périodique.

Remarque 4.1. Soit

$$Yf = \sum_{j=0}^{m-1} \int_T g_j(t) f(t + \omega^j x) dt$$

les fonctions g_j étant analytiques et holomorphes à l'infini. Alors, le commutateur $S = ZY$ du lemme 4.1, s'explicite comme suit

$$Sf = \int \cdots \int_{T^m} \text{dét} \| g_{k-j}(t_j) \| \cdot f(x + \sum_{j=0}^{m-1} \omega^j t_j) dt_1 dt_2 \ldots dt_m \ . \tag{4.5}$$

Remarque 4.2. La proposition 4.4 est inexacte si Y est dégénéré, comme le montre, pour $m = 2$, le commutateur

$$Y \cdot f(x) = f(x) + f(-x)$$

qui est annulé par toute fonction impaire.

Nous reviendrons ultérieurement sur le cas des commutateurs dégénérés.

5. Fonctions moyenne-périodiques par rapport à $\mathcal{G}_A$

Soit $\mathcal{G}_A$ le groupe des isomorphismes Y de H sur H, tels que

$$AY = YA \tag{5.1}$$

où A désigne, comme au paragraphe 1, l'opérateur différentiel d'ordre m

$$A = \sum_{j=0}^{m} a_j D^j$$

où $a_j \in H$ pour tout j, et où $a_m = 1$.

Si $f \in H$, on désigne par $T_A(f)$ le sous-espace vectoriel fermé engendré par les Yf, $Y \in \mathcal{G}_A$ (donc $T_{D^m}(f) = T_m(f)$).

Définition 5.1. Un fonction $f \in H$ est dite *moyenne-périodique par rapport à* A si $T_A(f)$ est différent de H.

Soit X un isomorphisme de transmutation de A en D^m: $D^m X = XA$; donc $A = X^{-1} D^m X$ et (5.1) équivaut à

$$XYX^{-1}D^m = D^m XYX^{-1} \tag{5.2}$$

donc

$$XYX^{-1} = Z \ , \qquad Z \in \mathcal{G}_m \ . \tag{5.3}$$

Alors

$$T_A(f) = XT_m(X^{-1}f) \tag{5.4}$$

de sorte que l'on a:

Proposition 5.1. *La condition nécessaire et suffisante pour que f soit moyenne-périodique par rapport à A est que $X^{-1}f$ soit moyenne-périodique, X étant un isomorphisme de transmutation quelconque de A en D^m.*

Puisque le choix de X est arbitraire, prenons désormais X défini au numéro 1 (i. e. $D^p Xf(0) = D^p f(0)$, $p = 0, 1, \ldots, m-1$).

L'espace $T_m(X^{-1}f)$ est engendré par les exponentielles monomes qu'il contient. Donc d'après (5.4), $T_A(f)$ est engendré par les fonctions de la forme

$$X(x^p \exp \alpha x) \tag{5.5}$$

qu'il contient. En utilisant

$$D^m X = XA \qquad \text{et} \qquad D^p Xf(0) = D^p(0) \ , \qquad p = 0, 1, \ldots, m-1 \ ,$$

il est facile de déterminer les fonctions (5.5).

6. Nouveaux développements en série

Appliquons l'opérateur $X^{-1} = \mathcal{X}$ aux deux membres de (1.2). En notant que

$$\mathcal{X} x^n = \theta_n \ ,$$

on a le

Théorème 6.1. *Soit A donné par* (1.1) *et les fonctions θ_n données par* (1.9) *et* (1.10). *Pour tout $f \in H$, on a*

$$f = \sum_k \sum_{p=0}^{p=m-1} D^p A^k f(0) \frac{\theta_{p+km}}{(p+km)!} \ . \tag{6.1}$$

Si $A = D^m$, c'est la série de TAYLOR, dont on donne ainsi une généralisation.

Remarque 6.1. Puisque $A = X^{-1} D^m X$, et $D^j = (D^m)^{j/m}$, on *posera*

$$A^{j/m} = X^{-1} D^j X \ . \tag{6.2}$$

Comme $Xf(0) = f(0)$, on a

$$A^{j/m}f(0) = D^j f(0) \ , \quad \text{donc} \quad D^\nu A^k f(0) = A^{\nu/m} A^k f(0) = A^{(k+km)/m} f(0)$$

et par conséquent

$$f = \sum_{n \geqslant 0} A^{n/m} f(0) \frac{\theta_n}{n!} \ . \tag{6.3}$$

7. Résolution d'équations aux dérivées partielles

Soit $x \in C$, $y \in C$, $z \in C^N$; H_x (resp. H_y, H_z, $H_{x,y,z}$) désigne l'espace des fonctions entières en x (resp. y, z, et x,y,z). On donne

$$A = \sum_{j=0}^{m} a_j(x) D_x^j \ , \qquad a_j \in H \ , \ a_m = 1 \ ; \tag{7.1}$$

$$B = \sum_{j=0}^{n} b_j(y) D_y^j \ , \qquad b_j \in H \ , \ b_n = 1 \ ; \tag{7.2}$$

(7.3) $Q =$ opérateur différentiel dans H_z à coefficients constants. On donne ensuite un *polynome* $p(t_1, t_2, \tau)$, $t_i \in C$, $\tau \in C^N$, et l'on considère l'opérateur différentiel

$$\Lambda = p(A, B, Q) \ . \tag{7.4}$$

On va démontrer le

Théorème 7.1. *Soit f une fonction donnée dans $H_{x,y,z}$. Il existe toujours u dans $H_{x,y,z}$ solution de*

$$\Lambda u = f \ . \tag{7.5}$$

Démonstration. Soit X opérateur de transmutation de A en D^m, et Y opérateur de transmutation de B en D^n. On rappelle (cf. [6]) que

$$H_{x,y,z} = H_x \hat{\otimes} H_y \hat{\otimes} H_z \ .$$

Soit G l'opérateur

$$G = X \otimes Y \otimes 1 \ , \tag{7.6}$$

1 désignant l'application identique de H_z sur lui-même. On a

$$G \cdot (\xi_{\alpha\beta\gamma} A^\alpha \cdot B^\beta \cdot Q^\gamma) = \xi_{\alpha\beta\gamma} (D^m)^\alpha \cdot (D^n)^\beta \cdot Q^\gamma \cdot G \ ,$$

donc

$$G\Lambda = p(D^m, D^n, Q) \cdot G$$

et par conséquent (7.5) équivaut à

$$p(D^m, D^n, Q)(Gu) = Gf \ . \tag{7.7}$$

Mais $p(D^m, D^n, Q)$ est à coefficients constants, et d'après [11] (Chap. II), (7.7) admet une solution (au moins): soit v. Alors

$$u = G^{-1}(v)$$

vérifie (7.5), ce qui démontre le théorème.

La méthode précédente donne des théorèmes d'existence et d'unicité. Par exemple:

Théorème 7.2. *On donne A et B comme en* (7.1) *et* (7.2). *Il existe une fonction $u(x,y)$ et une seule, entière en x et y, telle que*

$$A_x u(x,y) = B_y u(x,y) \tag{7.8}$$

avec les conditions de Cauchy:

$$D_y^j u(x,0) = f_j(x) \ , \qquad j = 0, \ldots, m-1 \tag{7.9}$$

les f_j étant données dans H.

Naturellement l'existence *locale* de u est bien connue (Cauchy-Kovalewska); l'existence globale n'était peut-être pas complètement évidente.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Bochner, *Sturm-Liouville... Proceedings of the Conférence on differential equations*, Maryland 1955, p. 23–48.

[2] J. Delsarte, *Sur certaines transformations*... C. R. Acad. Sci. Paris 206, 1938, p. 1780.

[3] J. Delsarte, *Colloque sur les équations aux dérivées partielles*, Nancy, Avril 1956.

[4] J. Delsarte, *Les fonctions moyenne-périodiques*, J. Math. Pures Appl. 14, 1935, p. 403–453.

[5] Gelfand-Levitan, Iswestziya Acad. Nauk SSSR., Ser. Mat. 15, 1951, p. 309–360.

[6] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 1955, no 16.

[7] Levitan, Translation no 59 (1950) of the Amer. Math. Soc.

[8] J. L. Lions, *Opérateurs de* Delsarte *et problèmes mixtes*, Bull. Soc. Math. France 84, 1956, p. 9–95.

[9] J. L. Lions, *Quelques applications d'opérateurs de transmutation*, Colloque Nancy, Avril 1956.

[10] J. L. Lions, *Solutions élémentaires*..., J. Math. Pures Appl. 1957.

[11] B. Malgrange, *Existence et approximation*..., Ann. Inst. Fourier Grenoble 1956, p. 3–87.

[12] Marcenko, Trudy Moscov Mat. Obsc. 1, 1952, p. 327–420; 2, 1953, p. 3–83.

[13] L. Schwartz, *Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques*, Ann. Math. 48, 1947, p. 857–929.

Note ajoutée à la correction des épreuves. –
M. K. Fage, [Doklady, Akad. Nauk, (1957) t. 112, n° 6] vient d'annoncer un théorème *local* de transmutation, pour certaines classes de fonctions de variables réelles.

(Reçu le 28 mars 1957)