# Contribution à la théorie des anneaux et des demi-groupes.

Autor(en): **Thierrin, Gabriel**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **32 (1957-1958)**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-25338

# Contribution à la théorie des anneaux et des demi-groupes

par Gabriel Thierrin

L'objet de ce travail est l'étude de deux classes de complexes et d'idéaux d'un anneau ou d'un demi-groupe, les complexes et les idéaux réflectifs et complètement réflectifs. Un complexe ou un idéal $H$ est réflectif, si la relation $ab \in H$ entraîne $ba \in H$. Par exemple, un complexe $H$ d'un groupe $G$ est réflectif, si et seulement si l'on a $Hx = xH$ pour tout $x \in G$; en particulier un sous-groupe de $G$ est réflectif, si et seulement s'il est invariant. Un complexe ou un idéal $H$ est complètement réflectif, s'il est réflectif et si la relation $abc \in H$ entraîne $cba \in H$. Par exemple, un complexe $H$ d'un groupe $G$ est complètement réflectif, si et seulement si l'on a $xHy = yHx$ pour tout couple $x$, $y \in G$; en particulier, un sous-groupe de $G$ est complètement réflectif, si et seulement s'il contient le groupe commutateur de $G$.

Après avoir établi au début du premier chapitre quelques propriétés des complexes réflectifs, nous étudions les anneaux et les demi-groupes réflectifs. Un anneau réflectif est un anneau dont l'idéal (0) est réflectif; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la relation $ax = ay$ entraîne $xa = ya$ et inversement. Cette propriété des anneaux réflectifs nous permet de définir les demi-groupes réflectifs. Les paragraphes suivants sont consacrés aux idéaux réflectifs, au radical réflectif d'un idéal réflectif et aux anneaux et demi-groupes dont tous les idéaux à droite sont réflectifs. Ce premier chapitre se termine par l'étude de certaines classes d'anneaux isomorphes à une somme sous-directe de corps.

Le second chapitre est consacré aux complexes et idéaux complètement réflectifs, ainsi qu'à l'étude des décompositions d'un idéal comme intersection d'idéaux complètement réflectifs primaires. Nous donnons en particulier une caractérisation de l'intersection de tous les idéaux complètement premiers minimaux appartenant à un idéal donné d'un anneau, ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un anneau soit isomorphe à une somme sous-directe d'anneaux sans diviseurs de zéro.

## CHAPITRE I

## Complexes et idéaux réflectifs

**1. Complexes réflectifs.** Rappelons qu'un *demi-groupe* est un ensemble dans lequel est définie une opération univoque associative. Un complexe $H$, c'est-à-dire une partie non vide, d'un demi-groupe $D$ (d'un anneau) sera dit *réflectif*, si la relation $ab\in H$, avec $a\in D$, $b\in D$, entraîne $ba\in H$. La partie vide $\emptyset$ sera considérée comme une partie réflective. Le demi-groupe $D$ lui-même est évidemment un complexe réflectif.

**Proposition 1.** *Pour qu'un complexe $H$ soit réflectif, il faut et il suffit que l'on ait $H.\cdot a = H\cdot.a$ pour tout $a\in D$.*

Rappelons que $H.\cdot a$ désigne l'ensemble des éléments $x\in D$ tels que $ax\in H$ et $H\cdot.a$ l'ensemble des éléments $y\in D$ tels que $ya\in H$.

La condition est nécessaire. Si $x\in H.\cdot a$, $ax\in H$ et $xa\in H$; d'où $x\in H\cdot.a$ et $H.\cdot a\subseteq H\cdot.a$. On montre de même que $H\cdot.a\subseteq H.\cdot a$. Donc $H.\cdot a = H\cdot.a$. La condition est suffisante, car si $ab\in H$, on a $b\in H.\cdot a = H\cdot.a$ et donc $ba\in H$.

Cette proposition montre que tout complexe réflectif d'un demi-groupe est symétrique (cf. [3], p. 22).

La réunion et, si elle n'est pas vide, l'intersection de complexes réflectifs sont encore des complexes réflectifs. Si $H$ et $K$ sont des complexes réflectifs et si $H\subset K$, le complexe $K - H$ est réflectif. En particulier, s'il n'est pas vide, le complémentaire d'un complexe réflectif est réflectif. Nous avons par conséquent :

**Théorème 1.** *L'ensemble des parties réflectives d'un demi-groupe forme un treillis de* BOOLE.

**Théorème 2.** *Pour qu'un complexe $H$ d'un groupe $G$ soit réflectif, il faut et il suffit que l'on ait $Hx = xH$ pour tout $x\in G$.*

La condition est nécessaire. Soit $h\in H$. De $hxx^{-1}\in H$ suit $x^{-1}hx\in H$ et $hx\in xH$. Donc $Hx\subseteq xH$. On a de même $xH\subseteq Hx$ et par conséquent $Hx = xH$. La condition est suffisante. En effet, si $xy\in H$, $x\in Hy^{-1} = y^{-1}H$ et donc $yx\in H$.

**Corollaire.** *Pour qu'un sous-groupe d'un groupe soit réflectif, il faut et il suffit qu'il soit invariant.*

Remarquons que le centre d'un groupe $G$ est l'ensemble des éléments réflectifs de $G$.

**Théorème 3.** *Pour qu'un complexe $S$ d'un groupe $G$ soit un sous-groupe invariant, il faut et il suffit que les relations $a\in S$ et $bc\in S$ entraînent $ab^{-1}c^{-1}\in S$.*

La condition est nécessaire. En effet on a $c^{-1}b^{-1}\in S$; d'où, d'après le corollaire du théorème 2, $b^{-1}c^{-1}\in S$ et donc $ab^{-1}c^{-1}\in S$.

La condition est suffisante. Si $x\in S$, $y\in S$ et si $e$ est l'élément-unité de $G$, on a $ye\in S$. Donc $xy^{-1}e^{-1} = xy^{-1}\in S$ et $S$ est un sous-groupe de $G$. Si $rs\in S$, on a, puisque $e \in S$, $er^{-1}s^{-1} = r^{-1}s^{-1} \in S$, c'est-à-dire $sr \in S$. Par conséquent, $S$ est réflectif, donc invariant.

**Théorème 4.** *Tout élément $x$ d'un demi-groupe $D$ est contenu dans un complexe réflectif minimal de $D$ et les complexes réflectifs minimaux de $D$ sont les classes d'une équivalence de $D$.*

L'intersection $H$ de tous les complexes réflectifs de $D$ contenant $x$ est un complexe réflectif. Si $K$ est un complexe réflectif tel que $K \subset H$, $K$ ne contient pas $x$. Par suite, $H - K$ est un complexe réflectif contenant $x$, ce qui est impossible. Par conséquent $H$ est un complexe réflectif minimal de $D$. La seconde partie du théorème découle du fait que l'intersection de deux complexes réflectifs minimaux distincts est vide.

**Proposition 2.** *Les complexes réflectifs minimaux d'un groupe $G$ sont les classes d'éléments conjugués de $G$.*

Soit $H$ une classe d'éléments conjugués de $G$. Si $ab \in H$, on a $ab = b^{-1}(ba)b$; donc $ba \in H$ et $H$ est réflectif. Si $K$ est un complexe réflectif tel que $K \subset H$, il existe pour $c \in H - K$ un élément $x$ tel que $xcx^{-1} \in K$; d'où $c \in K$, ce qui est contradictoire. Par conséquent, $H$ est un complexe réflectif minimal.

Inversement, si $H$ est un complexe réflectif minimal et si $h \in H$, la classe d'éléments conjugués contenant $h$ est un complexe réflectif minimal, donc coïncide avec $H$.

Rappelons qu'un *semi-groupe* est un demi-groupe vérifiant la règle de simplification des deux côtés.

**Théorème 5.** *Pour qu'un semi-groupe $S$ puisse être plongé dans un groupe $G$ tel que $S$ soit réflectif dans $G$, il faut et il suffit que l'on ait $aS = Sa$ pour tout $a \in S$.*

La condition est nécessaire. De $a^{-1}ax \in S$, avec $a$, $x \in S$, suit $axa^{-1} \in S$ et $ax \in Sa$; d'où $aS \subseteq Sa$. On a de même $Sa \subseteq aS$ et donc $aS = Sa$.

La condition est suffisante. Le semi-groupe $S$ est régulier à droite, car pour tout couple $a$, $b \in S$ il existe $x \in S$ tel que $ax = ba$; par conséquent, $S$ peut être plongé dans un groupe $G$ tel que tout élément $g \in G$ est de la forme $g = xy^{-1}$, avec $x$, $y \in S$ (cf. [4]). Montrons que $S$ est réflectif dans $G$. Soit $gh \in S$, avec $h = rs^{-1}$, $r \in S$, $s \in S$. De $xy^{-1}rs^{-1} = a \in S$ suit $xy^{-1} = asr^{-1}$. Il existe $t \in S$ tel que $as = st$. D'où $xy^{-1} = str^{-1}$ et $rs^{-1}xy^{-1} = rtr^{-1}$. Il existe $v \in S$ tel que $rt = vr$. D'où $hg = rs^{-1}xy^{-1} = vrr^{-1} = v \in S$.

Par *anneau sans diviseurs de zéro*, nous entendons un anneau non réduit à zéro tel que la relation $ab = 0$ entraîne $a = 0$ ou $b = 0$. Par *corps*, nous entendons un anneau sans diviseurs de zéro tel que l'ensemble des éléments différents de zéro forme un groupe pour la multiplication.

**Théorème 6.** *Pour qu'un anneau $A$ sans diviseurs de zéro puisse être plongé dans un corps $K$ tel que $A$ soit réflectif dans $K$, il faut et il suffit que l'on ait $aA = Aa$ pour tout $a \in A$.*

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème précédent.

**2. Anneaux et demi-groupes réflectifs.** Un anneau $A$ sera dit *réflectif*, si la relation $ab = 0$ entraîne $ba = 0$, c'est-à-dire si l'idéal (0) est réflectif.

**Théorème 7.** *Pour qu'un anneau $A$ soit réflectif, il faut et il suffit que la relation $ax = ay$ entraîne $xa = ya$.*

La condition est nécessaire, car de $ax = ay$ suit $a(x-y) = 0$, donc $(x-y)a = 0$, c'est-à-dire $xa = ya$. La condition est suffisante. En effet, si $ab = 0$, on a $ab = a \cdot 0$; d'où $ba = 0 \cdot a = 0$.

On démontre de même le théorème symétrique.

Remarquons qu'un idéal $M$ d'un anneau quelconque $A$ est réflectif, si et seulement si l'anneau-quotient $A/M$ est réflectif.

Un élément a d'un demi-groupe ou d'un anneau sera dit *réflectible à droite* si la relation $xa = ya$ entraîne $ax = ay$. On a la définition symétrique. Un élément réflectible des deux côtés sera dit *réflectible*. Tout élément appartenant au centre est réflectible. Dans un demi-groupe, tout élément simplifiable (à droite, à gauche) est réflectible (à droite, à gauche).

**Proposition 3.** *S'il n'est pas vide, l'ensemble $S$ des éléments réflectibles à droite (à gauche, des deux côtés) d'un demi-groupe $D$ (d'un anneau) est un sous-demi-groupe de $D$.*

En effet, si $a$, $b \in S$ et si $xab = yab$, on a $bxa = bya$ et $abx = aby$.

On voit facilement qu'un élément a d'un anneau est réflectible à droite si et seulement si la relation $xa = 0$ entraîne $ax = 0$. D'après le théorème 7 et son symétrique, un anneau est réflectif si et seulement si tous ses éléments sont réflectibles (à droite, à gauche).

Un demi-groupe sera dit *réflectif*, si tous ses éléments sont réflectibles, c'est-à-dire si les relations $xa = ya$ et $bv = bt$ entraînent respectivement $ax = ay$ et $vb = tb$.

**Théorème 8.** *Si $a$ est un élément réflectible d'un demi-groupe $D$, l'idéal à droite $aD$ est isomorphe à l'idéal à gauche $Da$.*

A l'élément $b = ax \in aD$ faisons correspondre l'élément $b' = xa \in Da$. Nous définissons ainsi une application de $aD$ dans $Da$, car si $b = ay = ax$, on a $ya = xa = b'$; c'est de plus une application de $aD$ sur $Da$. Cette application est biunivoque, car si $b'$ est l'image de $ax$ et $az$, on a $xa = za$ et donc

$ax = az$. Enfin, cette application est un isomorphisme, car si $ax \to xa$ et $ay \to ya$, on a $axay \to xay \cdot a = xa \cdot ya$.

**Corollaire.** *Si $D$ est un demi-groupe réflectif, l'idéal à droite $xD$ est isomorphe à l'idéal à gauche $Dx$, quel que soit $x \in D$.*

**Théorème 9.** *Si $a$ est un élément réflectible de l'anneau $A$, l'idéal à droite $aA$ est isomorphe à l'idéal à gauche $Aa$.*

A la suite du théorème 8, il suffit de montrer que $aA$ et $Aa$ sont isomorphes pour l'addition. De $ax \to xa$ et $ay \to ya$ suit

$$ax + ay = a(x + y) \to (x + y)a = xa + ya \ .$$

**Corollaire.** *Si $A$ est un anneau réflectif, l'idéal à droite $xA$ est isomorphe à l'idéal à gauche $Ax$, quel que soit $x \in A$.*

**Proposition 4.** *Tout élément idempotent réflectible $e$ d'un demi-groupe ou d'un anneau est un élément du centre.*

De $ex = eex$ suit $xe = exe$; de $xe = xee$ suit $ex = exe$. D'où $ex = xe$.

**Corollaire.** *Tout élément idempotent d'un demi-groupe réflectif ou d'un anneau réflectif est un élément du centre.*

**Proposition 5.** *Si $a$ et $b$ sont deux éléments réflectibles d'un anneau ou d'un demi-groupe, la relation $ab = a$ entraîne $ba = a$, et inversement.*

De $ab = a$ suit $bab = ba$ et $ab^2 = ab$. D'où $b^2a = ba$ et $bab = ab = a = ba$. On montre de même que $ba = a$ entraîne $ab = a$.

**Proposition 6.** *Dans un demi-groupe réflectif $D$ ou un anneau réflectif $A$ avec élément-unité $1$, la relation $ab = 1$ entraîne $ba = 1$. De plus, dans $A$, la relation $ab + a + b = 0$ entraîne $ab = ba$; de même la relation $ab + a = 1$ $(ba + a = 1)$ entraîne $ab = ba$.*

De $a \cdot ba = a \cdot 1$ suit $ba^2 = 1 \cdot a = a$ et $ba^2b = ba = ab = 1$.

De $ab + a + b = 0$ suit $(a + 1)(b + 1) = 1$. D'où $(b + 1)(a + 1) = 1$ et $ba + a + b = 0$; donc $ab = ba$. De $ab + a = 1$ suit $a(b + 1) = 1$. D'où $(b + 1)a = 1$, $ba + a = 1$ et $ab = ba$.

**Théorème 10.** *Pour qu'un demi-groupe $D$ soit un groupe, il faut et il suffit que $D$ soit réflectif et que l'on ait $aD = D$ pour tout $a \in D$.*

La condition est évidemment nécessaire. Elle est aussi suffisante. En effet, il existe $e$ tel que $ae = a$ et $x$ tel que $ax = e$. De la proposition 5 suit $ea = a$ et l'on a $eax = ax$, c'est-à-dire $e^2 = e$. L'élément $e$, étant idempotent, appartient au centre de $D$, d'après le corollaire de la proposition 4. Comme $eD = D$, $e$ est élément neutre de $D$ et $D$ est un groupe.

**Théorème 11.** *Tout demi-groupe réflectif $D$ possédant un idéal à droite minimal $M$ est un homogroupe.*

Par homogroupe, nous entendons un demi-groupe possédant un groupe comme idéal (cf. [1], [12]).

L'idéal à droite $M$ étant minimal, on a $mM = M$ pour tout $m \epsilon M$. D'autre part, $M$ est un demi-groupe réflectif. Par conséquent, $M$ est un groupe, d'après le théorème 10. Si $e$ est l'élément neutre de $M$, $e$ appartient au centre de $D$ et l'on a $M = eD = De$. Donc $M$ est un idéal de $D$.

**Corollaire.** *Tout demi-groupe fini réflectif est un homogroupe.*

Un demi-groupe $D$ est *stationnaire*, si les relations $ac = bc$ et $ca = cb$ entraînent respectivement $ax = bx$ et $xa = xb$, pour tout $x \epsilon D$ (cf. [13]). Un demi-groupe $D$ est *simple* s'il ne possède que l'idéal $D$.

**Théorème 12.** *Tout demi-groupe $D$ simple et réflectif est soit un groupe, soit un demi-groupe stationnaire sans torsion (c'est-à-dire sans éléments d'ordre fini).*

Supposons que $D$ ne soit pas un groupe. Si $D$ contient un élément d'ordre fini, il contient alors un élément idempotent $e$ qui appartient au centre de $D$, puisque $D$ est réflectif. L'ensemble $eD = De$ est un idéal de $D$. Donc $De = D$ et $e$ est élément-unité de $D$. Soit $G$ le groupe des éléments inversibles de $D$. L'ensemble $H = D - G$ n'est pas vide. Si $a \epsilon H$, $ax \epsilon H$. En effet, si $ax \epsilon G$, il existe $r$ tel que $axr = 1$, et on a $xra = 1$, d'après la proposition 6. Par conséquent, a est inversible, contre l'hypothèse. On montre de même que $xa \epsilon H$. Il suit de là que $H$ est un idéal véritable de $D$, contre l'hypothèse. Le demi-groupe $D$ ne peut donc contenir des éléments d'ordre fini.

Montrons que $D$ est stationnaire. Soit $ac = bc$. L'ensemble $X$ des éléments $x$ de $D$ tels que $ax = bx$ est un idéal à droite de $D$. Comme $D$ est réflectif, on a aussi $xa = xb$, et donc $txa = txb$ et $atx = btx$ pour tout $t \epsilon D$. Par conséquent, $X$ est un idéal de $D$; d'où $X = D$ et $ax = bx$ pour tout $x \epsilon D$. On montre de même la propriété symétrique.

**Théorème 13.** *Tout anneau $A$ de carré non nul, réflectif et sans véritable idéal est un anneau sans diviseurs de zéro.*

Supposons que l'on ait $rs = 0$, avec $r \neq 0$, $s \neq 0$. L'ensemble $R$ des éléments $x$ de $A$ tels que $rx = 0$ est un idéal à droite de $A$; c'est aussi un idéal à gauche, puisque $A$ est réflectif. Comme $s \epsilon R$, on a $R = A$ et $rA = 0$. Soit $S$ l'ensemble des éléments $y$ de $A$ tels que $yA = 0$. C'est un idéal de $A$ et comme $r \epsilon S$, on a $S = A$. Par conséquent, $A^2 = 0$ contre l'hypothèse.

**Proposition 7.** *Pour un demi-groupe réflectif $D$, les propriétés suivantes sont équivalentes* : 1. *$D$ est inversif.* 2. *$D$ est inversif à droite.* 3. *$D$ est inversif à gauche.*

Pour la notion de demi-groupe inversif (à droite, à gauche), voir [2].

1. entraîne 2. Si $x \in D$, il existe $a$ tel que $xax = x$ et l'élément $xa$ est idempotent, donc appartient au centre de $D$, puisque $D$ est réflectif. Par conséquent, on a $x^2a = x$ et $D$ est inversif à droite.

2. entraîne 3. Il existe $a$ tel que $x^2a = x$. D'où, d'après la proposition 5, $xax = x$, $ax^2 = x$ et $D$ est inversif à gauche.

3. entraîne 1. Il existe $a$ tel que $ax^2 = x$. D'où $xax = x$ et $D$ est inversif.

**3. Idéaux réflectifs.** Un idéal $P$ d'un anneau $A$ est dit *premier*, si la relation $UV \subseteq P$, où $U$ et $V$ sont des idéaux de $A$, entraîne $U \subseteq P$ ou $V \subseteq P$. D'après [8], un idéal $P$ est premier, si et seulement si la relation $aAb \subseteq P$ entraîne $a \in P$ ou $b \in P$. Un idéal $Q$ d'un anneau ou d'un demi-groupe est dit *complètement premier*, si la relation $ab \in Q$ entraîne $a \in Q$ ou $b \in Q$. Un idéal $S$ d'un anneau ou d'un demi-groupe est dit *complètement semi-premier*, si la relation $a^2 \in S$ entraîne $a \in S$. Un idéal complètement premier est évidemment complètement semi-premier. (Remarquons qu'un idéal complètement semi-premier est aussi appelé idéal semi-premier.)

**Proposition 8.** *Tout idéal complètement semi-premier $S$ d'un anneau ou d'un demi-groupe est réflectif.*

Soit $ab \in S$. On a $b(ab)a = (ba)^2 \in S$. D'où $ba \in S$.

**Corollaire.** *Tout anneau sans éléments nilpotents différents de zéro est réflectif.*

**Proposition 9.** *Pour qu'un idéal premier $P$ d'un anneau $A$ soit complètement premier, il faut et il suffit qu'il soit réflectif.*

La condition est évidemment nécessaire. Elle est aussi suffisante, car si $ab \in P$, on a $abA \subseteq P$ et donc $bAa \subseteq P$; d'où $a \in P$ ou $b \in P$.

Remarquons que *tout idéal à droite (à gauche) réflectif $M$* d'un anneau ou d'un demi-groupe est un *idéal bilatère.* En effet, si $m \in M$, on a $mx \in M$ et donc $xm \in M$.

**Proposition 10.** *Si $A$ est un anneau réflectif et si $e$ est un élément idempotent, l'idéal à droite $eA$ est un idéal réflectif.*

Soit $ab \in eA$. Comme $A$ est réflectif, $e$ appartient au centre de $A$. On a $eA = Ae$ et $e$ est élément-unité de $eA$.

De $(a - ae)(b - be) = ab - abe - aeb + aebe = 0$ suit

$$(b - be)(a - ae) = 0 ,$$

c'est-à-dire $ba - bae - bea + beae = 0$. Comme $bea = beae$, on a $ba = bae \in Ae = eA$.

**Théorème 14.** *Tout idéal à droite (à gauche) minimal et non nilpotent $M$ d'un anneau réflectif $A$ est un corps et un idéal réflectif.*

L'idéal à droite $M$, étant minimal et non nilpotent, est de la forme $M = eA$ où $e$ est un élément idempotent. D'après la proposition 10, $M$ est un idéal réflectif et $e$ est élément-unité de $M$. De plus, on a $mM = M$ pour tout $m \in M$, $m \neq 0$. Par conséquent, $M$ est un corps.

*L'intersection de tous les idéaux réflectifs contenant un idéal* $M$ d'un anneau ou d'un demi-groupe est un *idéal réflectif* qui sera appelé le *noyau réflectif* de $M$ et noté par $\mathfrak{N}(M)$. Le noyau réflectif de l'idéal (0) d'un anneau sera appelé le noyau réflectif de $A$ et noté par $\mathfrak{N}$.

Si $M$ est un idéal d'un anneau $A$ (d'un demi-groupe $D$), nous désignerons par $\mathfrak{R}(M)$ l'ensemble des éléments $a$ de $A$ (de $D$) tels qu'il existe un entier positif $n$ (dépendant de $a$) vérifiant la relation $a^n \in M$.

**Lemme 1.** *L'ensemble* $\mathfrak{R}(M)$ *est un complexe réflectif.*

Si $xy \in \mathfrak{R}(M)$, il existe un entier positif $n$ tel que $(xy)^n \in M$. D'où $y(xy)^n x = (yx)^{n+1} \in M$. Donc $yx \in \mathfrak{R}(M)$.

Si $M$ est un idéal réflectif de $A$ ou de $D$, $\mathfrak{R}(M)$ sera dit le *radical réflectif* de $M$. Si $A$ est un anneau réflectif, le radical réflectif de l'idéal réflectif (0) sera dit le radical réflectif de $A$ et noté $\mathfrak{R}$.

**Lemme 2.** *Soit $M$ un idéal réflectif d'un demi-groupe $D$ (d'un anneau $A$). Si $n = n_1 + \cdots + n_r$, où les $n_i$ sont des entiers positifs, la relation $a^n \in M$ entraîne*

$$a^{n_1} x a^{n_2} y \ldots a^{n_r} z \in M \quad , \quad z a^{n_1} x a^{n_2} \ldots t a^{n_r} \in M \quad ,$$
$$v a^{n_1} x a^{n_2} y \ldots a^{n_r} z \in M \quad , \quad a^{n_1} x a^{n_2} y \ldots a^{n_r} \in M \quad ,$$

*quels que soient $x, y, z, t, v \in D$.*

De $a^n = a^{n_1 + \cdots + n_{r-1}} a^{n_r} \in M$ suit $a^{n_1 + \cdots + n_{r-1}} a^{n_r} z \in M$, et donc, puisque $M$ est réflectif, $a^{n_r} z a^{n_1 + \cdots + n_{r-1}} \in M$.

En recommençant le même raisonnement autant de fois qu'il le faut, on obtient finalement $a^{n_1} x \ldots a^{n_r} z \in M$. Les autres relations se démontrent de la même manière.

**Théorème 15.** *Le radical réflectif* $\mathfrak{R}(M)$ *d'un idéal réflectif $M$ d'un demi-groupe $D$ est un idéal complètement semi-premier (donc réflectif) contenu dans tout idéal complètement semi-premier contenant $M$.*

D'après le lemme 2, si $a^n \in M$, on a $(ax)^n \in M$ et $(xa)^n \in M$ pour tout $x \in D$. Donc $\mathfrak{R}(M)$ est un idéal. La suite du théorème est immédiate.

**Corollaire.** *Le radical réflectif du noyau réflectif d'un idéal quelconque $M$ de $D$ est l'intersection de tous les idéaux complètement semi-premiers contenant $M$.*

**Théorème 16.** *Le radical réflectif* $\mathfrak{R}(M)$ *d'un idéal réflectif $M$ d'un anneau $A$ est un idéal complètement semi-premier (donc réflectif) contenu dans tout idéal complètement semi-premier contenant $M$.*

A la suite du théorème 15, il suffit de montrer que $\mathfrak{R}(M)$ est un sous-groupe additif de $A$. Si $a \in \mathfrak{R}(M)$ et $b \in \mathfrak{R}(M)$, on a $a^n \in M$ et $b^m \in M$. L'élément $(a - b)^{n+m-1}$ est la somme de termes de la forme $\pm x_1 x_2 \ldots x_{n+m-1}$ avec $x_i = a$ ou $x_i = b$, et on a les deux possibilités suivantes: le nombre des $x_i$ égaux à $a$ est égal ou supérieur à $n$, ou le nombre des $x_i$ égaux à $b$ est égal ou supérieur à $m$. Dans les deux cas, le lemme 2 montre que $x_1 x_2 \ldots x_{m+n-1} \in M$. Par conséquent $(a - b)^{n+m-1} \in M$, c'est-à-dire $a - b \in \mathfrak{R}(M)$.

**Corollaire 1.** *Le radical réflectif du noyau réflectif d'un idéal quelconque $M$ de $A$ est l'intersection de tous les idéaux complètement semi-premiers contenant $M$.*

**Corollaire 2.** *L'ensemble des éléments nilpotents d'un anneau réflectif $A$ est un idéal complètement semi-premier, qui est le radical réflectif $\mathfrak{R}$ de $A$.*

Rappelons la définition du *radical de* N. H. McCoy d'un idéal quelconque $M$ d'un anneau $A$ (cf. [8]). Un $m$-système $X$ est un ensemble d'éléments de $A$ tel que pour tout couple $a$, $b \in X$, il existe $r \in A$ vérifiant la relation $arb \in X$. Le radical de N. H. McCoy de l'idéal $M$ est l'ensemble de tous les éléments $a$ de $A$ possédant la propriété que tout $m$-système contenant $a$ contient au moins un élément de $M$. Un idéal premier (complètement premier) $P$ de $A$ est dit un idéal premier (complètement premier) minimal appartenant à $M$, si et seulement si $M \subseteq P$ et s'il n'existe pas d'idéal premier (complètement premier) $P'$ tel que $M \subseteq P' \subset P$. D'après [8], le radical de N. H. McCoy de l'idéal $M$ est l'intersection de tous les idéaux premiers minimaux appartenant à $M$.

**Théorème 17.** *Le radical réflectif $\mathfrak{R}(M)$ d'un idéal réflectif $M$ de l'anneau $A$ coincide avec le radical $\mathfrak{R}^*$ de* N. H. McCoy *de $M$.*

Si $a \in \mathfrak{R}^*$, il existe un entier positif $n$ tel que $a^n \in M$, car le $m$-système $(a, a^2, \ldots)$ contient $a$. Par conséquent, $\mathfrak{R}^* \subseteq \mathfrak{R}(M)$.

Si $x \in \mathfrak{R}(M)$, il existe $n$ tel que $x^n \in M$. Soit $X$ un $m$-système contenant $x$. Il existe $x_1 \in A$ tel que $x x_1 x \in X$; mais cette dernière relation entraîne l'existence d'un élément $x_2 \in A$ tel que $x x_1 x x_2 x \in X$, et ainsi de suite. Par conséquent, il existe $n$ éléments $x_1, \ldots, x_n$ tels que l'on ait $x x_1 x \ldots x x_n x \in X$. Comme $x^{n+1} \in M$, on a, d'après le lemme 2, $x x_1 x \ldots x x_n x \in M$ et $M \cap X \neq \emptyset$. Donc $x \in \mathfrak{R}^*$ et $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}(M)$.

**Lemme 3.** *Si un élément $a$ d'un anneau $A$ est d'ordre fini pour la multiplication, il existe un entier $n > 1$ tel que les éléments $a - a^n$ et $a^{n-1}$ soient respectivement nilpotent et idempotent.*

Le demi-groupe cyclique engendré par $a$ étant fini, il existe, d'après [11], un entier $m > 0$ tel que l'élément $a^m = e$ est idempotent. Posons $n = m + 1$. L'élément $e$ étant permutable avec $a$, on vérifie facilement que $(a - a^n)^n = (a - ae)^n = a^n - a^n e = ae - aee = 0$.

**Lemme 4.** *Pour un anneau $A$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout $a \in A$ il existe un entier $n > 1$, dépendant de $a$, tel que $a^n = a$.*

2. *Tout élément de $A$ est d'ordre fini pour la multiplication et $A$ ne contient pas d'éléments nilpotents différents de zéro.*

1. entraîne 2., c'est immédiat.

2. entraîne 1., d'après le lemme 1.

On sait que tout anneau ayant la propriété 1 est commutatif (cf. [6]). Par conséquent, tout anneau ayant la propriété 2 est commutatif.

**Théorème 18.** *Si $\mathfrak{R}(\mathfrak{N})$ est le radical réflectif du noyau réflectif $\mathfrak{N}$ d'un anneau $A$ dont tous les éléments sont d'ordre fini pour la multiplication, l'anneau-quotient $A/\mathfrak{R}(\mathfrak{N})$ est commutatif.*

En effet, tous les éléments de $A/\mathfrak{R}(\mathfrak{N})$ sont d'ordre fini pour la multiplication. Comme $\mathfrak{R}(\mathfrak{N})$ est complètement semi-premier, $A/\mathfrak{R}(\mathfrak{N})$ ne contient pas d'éléments nilpotents différents de 0. Par conséquent, $A/\mathfrak{R}(\mathfrak{N})$ est commutatif.

Un idéal réflectif $M$ d'un anneau ou d'un demi-groupe est dit *primaire*, si les relations $ab \in M$ et $a \notin M$ entraînent l'existence d'un entier positif $n$ tel que $b^n \in M$.

**Théorème 19.** *Le radical réflectif $\mathfrak{R}(M)$ d'un idéal réflectif primaire $M$ d'un anneau ou d'un demi-groupe est un idéal complètement premier.*

En effet, supposons que $\mathfrak{R}(M)$ ne soit pas complètement premier. Il existe alors deux éléments $a$ et $b$ tels que l'on ait $ab \in \mathfrak{R}(M)$, $a \notin \mathfrak{R}(M)$, $b \notin \mathfrak{R}(M)$. Soit $n$ le plus petit entier positif tel que $(ab)^n \in M$. On a $n > 1$, car $ab \notin M$. Comme $(ab)^{n-1}ab \in M$ et que $a^m \notin M$ et $b^m \notin M$, quel que soit l'entier positif $m$, on a $(ab)^{n-1}a \in M$. Mais $(ab)^{n-1} \notin M$; donc $a^m \in M$ pour un certain entier $m$, ce qui est contradictoire.

**4. Idéaux réflecteurs.** Un idéal $M$ d'un anneau ou d'un demi-groupe sera dit *réflecteur à droite* (*à gauche*), si tout idéal à droite (à gauche) $M'$, tel que $M \subseteq M'$, est réflectif. Tout idéal à droite contenant un idéal réflecteur à droite est évidemment aussi un idéal réflecteur à droite.

**Théorème 20.** *Dans un anneau (un demi-groupe) $A$ vérifiant la condition de chaîne ascendante pour les idéaux réflecteurs à droite, tout idéal irréductible et réflecteur à droite $M$ est primaire.*

Nous nous dispensons de donner la démonstration de ce théorème qui est analogue à celle du cas des anneaux et des demi-groupes commutatifs (cf. [4], [15]).

**Corollaire.** *Tout idéal réflecteur à droite de l'anneau (du demi-groupe) $A$ est intersection d'un nombre fini d'idéaux réflecteurs à droite primaires.*

Un anneau (un demi-groupe) $A$ dont tous les idéaux à droite sont réflectifs, sera dit un *anneau (un demi-groupe) réflecteur à droite.* Tous les idéaux à droite de $A$ sont alors des idéaux bilatères réflecteurs à droite. Tout anneau réflecteur à droite est réflectif.

**Proposition 11.** *Pour qu'un demi-groupe $D$ soit réflecteur à droite, il faut et il suffit que pour tout couple d'éléments $a$, $b \in D$, tels que $ab \neq ba$, il existe $x \in D$ vérifiant la relation $ab = bax$.*

La condition est nécessaire. L'élément $ba$ appartient à l'idéal à droite $ba \cup baD$ qui est réflectif. Donc $ab \in ba \cup baD$ et, puisque $ab \neq ba$, il existe $x$ tel que $ab = bax$.

La condition est suffisante. Soit $M$ un idéal à droite de $D$ et soit $rs \in M$. Si $rs \neq sr$, il existe $x$ tel que $sr = rsx \in M$.

**Proposition 12.** *Pour qu'un anneau $A$ soit réflecteur à droite, il faut et il suffit que pour tout couple d'éléments $a$, $b \in A$, il existe un entier relatif $m$ et un élément $x \in A$ tel que l'on ait $ab = mba + bax$.*

La condition est nécessaire. Si $(ba)$ est l'idéal à droite engendré par $ba$, on a $ab \in (ba)$, c'est-à-dire $ab = mba + bax$.La condition est suffisante. Soit $M$ un idéal à droite de $A$ et soit $rs \in M$. Il existe $m$ et $x$ tel que $sr = mrs + rsx$. Comme $mrs + rsx \in M$, on a $sr \in M$.

*Tout semi-groupe $S$ réflecteur à droite non commutatif possède un élément-unité.*

En effet, il existe $a$, $b \in S$ tels que $ab \neq ba$. Donc, d'après la proposition 11, il existe $x$ tel que $ab = bax$ et $y$ tel que $ba = aby$. D'où $ab = abyx$. Comme $S$ est un semi-groupe, l'élément $yx$ est élément-unité de $S$.

**Proposition 13.** *Tout anneau régulier et réflectif $A$ est réflecteur à droite.*

Soit $a$, $b \in A$. Comme $A$ est régulier, il existe $x$ tel que $ba = baxba$. L'élément $bax$ est idempotent, donc appartient au centre de $A$, puisque $A$ est réflectif. De $ba = baxba$ suit $ab = abaxb = baxab$. Par conséquent, $A$ est réflecteur à droite, d'après la proposition 12.

**Corollaire.** *Tout idéal réflectif d'un anneau régulier est réflecteur à droite.*

**5. Somme directe et sous-directe de corps.** Pour les notions de somme directe et sous-directe d'anneaux, voir [9] et [10].

**Théorème 21.** *Pour qu'un anneau $A$ (non réduit à zéro) soit isomorphe à une somme directe d'un nombre fini de corps, il faut et il suffit qu'il ait les trois propriétés suivantes :*

1. *$A$ vérifie la condition minimale pour les idéaux à gauche.*
2. *$A$ ne contient pas d'idéal à gauche nilpotent différent de* $0$.
3. *$A$ est réflectif.*

La condition est nécessaire, c'est immédiat. Elle est aussi suffisante. En effet, des propriétés 1 et 2 suit que l'anneau $A$ est, considéré comme groupe additif, la somme directe d'un nombre fini d'idéaux à gauche minimaux non nilpotents $M_i$. D'après le théorème 14, les $M_i$ sont des idéaux bilatères et des corps. Par conséquent, $A$ est isomorphe à la somme directe des corps $M_i$.

**Théorème 22.** *Pour qu'un anneau régulier $A$ (non réduit à zéro) soit isomorphe à une somme sous-directe de corps, il faut et il suffit qu'il soit réflectif.*

D'après [5], il faut et il suffit de montrer que $A$ ne contient pas d'éléments nilpotents différents de zéro.

Si $A$ ne contient pas d'éléments nilpotents $\neq 0$, $A$ est réflectif d'après le corollaire de la proposition 8. Inversement, si $A$ est réflectif et si $a^2 = 0$, il existe $x$ tel que l'on ait $axa = a$. De la proposition 5 suit alors $xa^2 = a$, c'est-à-dire $a = 0$.

Un anneau $A$ est dit *primitif* (cf. [7]), s'il existe dans $A$ un idéal à droite maximal $M$ tel que $M .\cdot A = 0$.

**Théorème 23.** *Tout anneau réflectif et primitif $A$ est un anneau sans diviseurs de zéro.*

L'idéal (0) d'un anneau primitif est un idéal premier. Comme $A$ est réflectif, l'idéal (0) est réflectif, donc complètement premier d'après la proposition 9. Par conséquent, $A$ est un anneau sans diviseurs de zéro.

**Corollaire.** *Tout anneau primitif, réflectif et possédant un idéal à droite minimal est un corps.*

**Théorème 24.** *Pour qu'un anneau $A$ soit un corps, il faut et il suffit qu'il soit réflecteur à droite et primitif.*

La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante. En effet, $A$ contient un idéal à droite maximal $M$ tel que $M .\cdot A = 0$. Comme $A$ est réflecteur à droite, $M$ est un idéal bilatère et l'on a $M \subseteq M .\cdot A$; d'où $M = 0$. L'anneau $A$ ne possède par conséquent pas de véritable idéal à droite. D'après le théorème 23, $A$ est un anneau sans diviseurs de zéro. Donc $A$ est un corps.

Si le radical de JACOBSON (cf. [7]) d'un anneau réflectif $A$ se réduit à $0$, $A$ ne contient pas d'éléments nilpotents $\neq 0$. En effet, d'après le corollaire 2 du théorème 16, l'ensemble des éléments nilpotents de $A$ est un nilidéal qui, d'après [7], est contenu dans le radical de JACOBSON de $A$.

**Théorème 25.** *Tout anneau $A$ (non réduit à zéro) réflecteur à droite, dont le radical de JACOBSON se réduit à $0$, est isomorphe à une somme sous-directe de corps.*

D'après [7], $A$ est isomorphe à une somme sous-directe d'anneaux primitifs $P_i$. Les anneaux $P_i$ sont homomorphes à $A$. On voit facilement que tout anneau homomorphe à un anneau réflecteur à droite est réflecteur à droite. Par conséquent, les anneaux primitifs $P_i$ sont réflecteurs à droite, donc des corps d'après le théorème 24.

## CHAPITRE II

## Complexes et idéaux complètement réflectifs

**1. Complexes complètement réflectifs.** Un complexe $H$ d'un demi-groupe (d'un anneau) sera dit *complètement réflectif*, s'il est réflectif et si la relation $abc \in H$ entraîne $cba \in H$.

**Proposition 14.** *Pour qu'un complexe réflectif $H$ d'un demi-groupe soit complètement réflectif, il faut et il suffit que la relation $abc \in H$ entraîne $acb \in H$ ($abc \in H$ entraîne $bac \in H$).*

La condition est nécessaire, car de $abc \in H$ suit $cba \in H$ et donc $acb \in H$, puisque $H$ est réflectif. La condition est suffisante. En effet de $abc \in H$ suit $acb \in H$ et donc $cba \in H$.

*Si $D$ est un demi-groupe possédant un élément-unité à droite (à gauche) $e$, tout complexe $H$ tel que la relation $abc \in H$ entraîne $cba \in H$ est complètement réflectif.* Il suffit de montrer que $H$ est réflectif. Or si $ab \in H$, on a $aeb \in H$ et donc $bea = ba \in H$.

La réunion et, si elle n'est pas vide, l'intersection de complexes complètement réflectifs d'un demi-groupe $D$ sont encore des complexes complètement réflectifs. Si $H$ et $K$ sont des complexes complètement réflectifs et si $H \subset K$, le complexe $K - H$ est complètement réflectif. En particulier, s'il n'est pas vide, le complémentaire d'un complexe complètement réflectif est complètement réflectif, car $D$ lui-même est un complexe complètement réflectif. En considérant la partie vide comme partie complètement réflective, nous avons alors le théorème suivant :

**Théorème 26.** *L'ensemble des parties complètement réflectives d'un demi-groupe forme un treillis de* Boole.

Soit $n$ éléments $a_1, \ldots, a_n$ d'un demi-groupe $D$, plusieurs de ces éléments pouvant être égaux. Nous désignerons par $S(a_1, \ldots, a_n)$ l'ensemble des éléments de $D$ formés en permutant de toutes les manières possibles les facteurs $a_1, \ldots, a_n$ du produit $a_1 a_2 \ldots a_n$.

**Théorème 27.** *Si $H$ est un complexe complètement réflectif du demi-groupe $D$, la relation $S(a_1, \ldots, a_n) \cap H \neq \emptyset$ entraîne $S(a_1, \ldots, a_n) \subseteq H$.*

Le théorème est vrai évidemment pour $n = 1$ et $n = 2$. La proposition 14 montre qu'il est vrai aussi pour $n = 3$. Soit alors $n > 3$ et supposons le théorème vrai pour $n - 1$. Soit

$$x = a_{i_1} \ldots a_{i_n} \in S(a_1, \ldots, a_n) \cap H$$

et soit

$$y = a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_n} \in S(a_1, \ldots, a_n) \ .$$

L'élément $x$ est de l'une des trois formes suivantes $a_{j_1} r$, $s a_{j_1}$, $t a_{j_1} v$. Comme $x \in H$, qui est complètement réflectif, il existe un élément $z \in S(a_1, \ldots, a_n) \cap H$ de la forme $z = a_{j_1} a_{k_2} \ldots a_{k_n}$. L'élément $z$ est de l'une des trois formes suivantes $a_{j_1} a_{j_2} d$, $a_{j_1} e a_{j_2}$, $a_{j_1} f a_{j_2} g$. De $z \in H$ suit alors $a_{j_1} a_{j_2} e \in H$, $a_{j_1} a_{j_2} g f \in H$. Il existe par conséquent un élément $w \in S(a_1, \ldots, a_n) \cap H$ de la forme

$$w = a_{j_1} a_{j_2} a_{p_3} \ldots a_{p_n} \ .$$

Posons $h = a_{j_1} a_{j_2}$. On a $w = h a_{p_3} \ldots a_{p_n} \in H$, c'est-à-dire

$$S(h, a_{p_3}, \ldots, a_{p_n}) \cap H \neq \emptyset \ .$$

Comme on a supposé le théorème vrai pour $n - 1$, on a donc

$$S(h, a_{p_3}, \ldots, a_{p_n}) \subseteq H \ .$$

Mais $S(h, a_{p_3}, \ldots, a_{p_n}) = S(h, a_{j_3}, \ldots, a_{j_n})$. D'où

$$h a_{j_3} \ldots a_{j_n} = a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} \ldots a_{j_n} \in H \ .$$

Par conséquent $S(a_1, \ldots, a_n) \subseteq H$.

**Théorème 28.** *Pour qu'un sous-groupe $S$ d'un groupe $G$ contienne le groupe commutateur de $G$, il faut et il suffit qu'il soit complètement réflectif.*

La nécessité de la condition découle immédiatement du fait que $S$ est invariant et que le groupe-quotient $G/S$ est abélien. La condition est suffisante, car de $a b b^{-1} a^{-1} \in S$ suit, d'après la proposition 14, $a b a^{-1} b^{-1} \in S$.

**Corollaire.** *Pour qu'un sous-groupe $S$ d'un groupe $G$ contienne le groupe commutateur de $G$, il faut et il suffit que la relation $abc \in S$ entraîne $cba \in S$.*

**Théorème 29.** *Pour qu'un complexe $S$ d'un groupe $G$ soit un sous-groupe contenant le groupe commutateur de $G$, il faut et il suffit que les relations $a \in S$ et $bcd \in S$ entraînent $a b^{-1} c^{-1} d^{-1} \in S$.*

La condition est nécessaire. De $bcd \in S$ suit, d'après le théorème 28, $dcb \in S$. D'où $b^{-1} c^{-1} d^{-1} \in S$ et $a b^{-1} c^{-1} d^{-1} \in S$.

La condition est suffisante. Soit $e$ l'élément-unité de $G$ et soient $r$, $s \in S$. De $r \in S$ et $ese \in S$ suit $r e s^{-1} e = r s^{-1} \in S$. Donc $S$ est un sous-groupe de $G$. Soit

$xyz \in S$. De $e \in S$ et $z^{-1}y^{-1}x^{-1} \in S$ suit $ezyx = zyx \in S$. Par conséquent, d'après le corollaire du théorème 28, $S$ contient le groupe commutateur de $G$.

**Théorème 30.** *Pour qu'un complexe $H$ d'un groupe $G$ soit complètement réflectif, il faut et il suffit que l'on ait $xHy = yHx$, quels que soient $x$, $y \in G$.*

La condition est nécessaire. Soit $h \in H$. De $y^{-1}yhxx^{-1} \in H$ suit, d'après le théorème 27, $y^{-1}xhyx^{-1} \in H$. D'où $xhy \in yHx$ et $xHy \subseteq yHx$. On montre de même que $yHx \subseteq xHy$. Donc $xHy = yHx$.

La condition est suffisante. Soit $abc \in H$. On a $b \in a^{-1}Hc^{-1} = c^{-1}Ha^{-1}$. D'où $cba \in H$ et $H$ est complètement réflectif, puisque $G$ possède un élément-unité.

Remarquons qu'un groupe est abélien si et seulement s'il possède au moins un élément complètement réflectif.

**Théorème 31.** *Tout élément $x$ d'un demi-groupe $D$ est contenu dans un complexe complètement réflectif minimal de $D$ et les complexes complètement réflectifs minimaux de $D$ sont les classes d'une équivalence de $D$.*

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 4.

**2. Idéaux complètement réflectifs.** Un anneau $A$ sera dit *complètement réflectif*, si l'idéal (0) est complètement réflectif. Par exemple, tout anneau sans diviseurs de zéro est complètement réflectif.

**Théorème 32.** *Pour qu'un anneau réflectif $A$ soit complètement réflectif, il faut et il suffit que la relation $axb = ayb$ entraîne $bxa = bya$.*

La condition est nécessaire, car de $axb = ayb$ suit $a(x-y)b = 0$, donc $b(x-y)a = 0$, c'est-à-dire $bxa = bya$. La condition est suffisante. En effet, si $abc = 0$, on a $abc = a \cdot 0 \cdot c$; d'où $cba = c \cdot 0 \cdot a = 0$.

Remarquons qu'un idéal $M$ d'un anneau quelconque $A$ est complètement réflectif, si et seulement si l'anneau-quotient $A/M$ est complètement réflectif.

Tout idéal complètement premier d'un anneau ou d'un demi-groupe est complètement réflectif.

**Proposition 15.** *Le radical réflectif $\mathfrak{R}(M)$ d'un idéal complètement réflectif $M$ d'un anneau ou d'un demi-groupe est un idéal complètement réflectif.*

D'après les théorèmes 15 et 16 $\mathfrak{R}(M)$ est un idéal réflectif. Si $abc \in \mathfrak{R}(M)$, il existe $n$ tel que $(abc)^n \in M$. D'où, d'après le théorème 27, $(cba)^n \in M$, c'est-à-dire $cba \in \mathfrak{R}(M)$. Donc $\mathfrak{R}(M)$ est complètement réflectif.

**Corollaire.** *L'ensemble des éléments nilpotents d'un anneau complètement réflectif est un idéal complètement réflectif.*

**Proposition 16.** *Soient $H$ un complexe quelconque et $M$ un idéal complètement réflectif d'un anneau ou d'un demi-groupe. L'ensemble $M.\cdot H$ est un idéal complètement réflectif et on a la relation $M.\cdot H = M\cdot.H$.*

Si $x \in M.\cdot H$, on a $Hx \subseteq M$ et, puisque $M$ est réflectif, $xH \subseteq M$. D'où $M.\cdot H \subseteq M\cdot.H$. On montre de même que $M\cdot.H \subseteq M.\cdot H$. D'où $M.\cdot H = M\cdot.H$. De cette égalité suit que $M.\cdot H$ est un idéal. Si $ab \in M.\cdot H$, on a $Hab \subseteq M$. D'où, puisque $M$ est complètement réflectif, $Hba \subseteq M$ et $ba \in M.\cdot H$. Si $abc \in M.\cdot H$, on a $Habc \subseteq M$ et donc, d'après le théorème 27, $Hcba \subseteq M$. Par conséquent, $cba \in M.\cdot H$ et $M.\cdot H$ est complètement réflectif.

**Théorème 33.** *Tout anneau $A$ de carré non nul, dont les seuls idéaux complètement réflectifs sont* $(0)$ *et* $A$, *est un anneau sans diviseurs de zéro.*

En effet, si $A$ n'est pas un anneau sans diviseurs de zéro, il existe $a \neq 0$ et $b \neq 0$ tels que $ab = 0$. L'ensemble $(0).\cdot a$ est, d'après la proposition 16, un idéal complètement réflectif. Comme $b \in (0).\cdot a$, on a $(0).\cdot a = A$, c'est-à-dire $aA = 0$. L'ensemble $(0)\cdot.A$ est également un idéal complètement réflectif. Comme $a \in (0)\cdot.A$, on a $(0)\cdot.A = A$, c'est-à-dire $A^2 = 0$, contre l'hypothèse.

**Proposition 17.** *Tout idéal $M$ d'un anneau* (*d'un demi-groupe*) *réflecteur à droite $A$ est un idéal complètement réflectif.*

L'anneau $A$ étant réflecteur à droite, l'idéal $M$ est réflectif. Soit $abc \in M$. L'ensemble $M.\cdot a$ est un idéal à droite, donc un idéal réflectif. Comme $bc \in M.\cdot a$, on a $cb \in M.\cdot a$, c'est-à-dire $acb \in M$. Par conséquent, $M$ est complètement réflectif, d'après la proposition 14.

Soit $H$ un complexe quelconque d'un demi-groupe (d'un anneau) $D$. Nous désignerons par $T_1(H)$ l'ensemble de tous les éléments $x$ de $D$ de la forme $x = x_1 \dots x_n$ avec $S(x_1, \dots, x_n) \cap H \neq \emptyset$. On a $H \subseteq T_1(H)$. D'autre part, la relation $S(a_1, \dots, a_m) \cap H \neq \emptyset$ entraîne $S(a_1, \dots, a_m) \subseteq T_1(H)$. Nous désignerons par $T_2(H)$ l'ensemble $T_2(H) = T_1[T_1(H)]$ et, d'une manière générale, par $T_n(H)$ l'ensemble $T_n(H) = T_1[T_{n-1}(H)]$. On a évidemment $T_{n-1}(H) \subseteq T_n(H)$. Posons

$$T(H) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(H) .$$

On voit facilement que $T(H)$ *est le complexe complètement réflectif engendré par* $H$. Si $K$ est un complexe de $D$, on a $T_1(H)K \subseteq T_1(HK)$, $HT_1(K) \subseteq T_1(HK)$ $T_1(H)T_1(K) \subseteq T_1(HK)$. Si $H$ est un *sous-demi-groupe* de $D$, $T_n(H)$ est un sous-demi-groupe de $D$ et $T(H)$ est le *sous-demi-groupe complètement réflectif engendré par* $H$.

**Proposition 18.** *Si $H$ est un idéal à droite* (*à gauche*) *du demi-groupe $D$, $T_n(H)$ est un idéal et $T(H)$ est l'idéal complètement réflectif engendré par $H$.*

Pour démontrer la proposition, il suffit d'établir que $T_1(H)$ est un idéal. $T_1(H)$ est un idéal à droite, car $T_1(H)x \subseteq T_1(Hx) \subseteq T_1(H)$. Soit $a \in T_1(H)$; l'élément $a$ est de la forme $a = a_1 \dots a_n$ avec $S(a_1, \dots, a_n) \cap H \neq \emptyset$ et l'on a $S(a_1, \ldots, a_n)x \cap H \neq \emptyset$, ce qui entraîne $S(a_1, \ldots, a_n, x) \cap H \neq \emptyset$. Par conséquent, $S(a_1, \ldots, a_n, x) \subseteq T_1(H)$ et $xa \in T_1(H)$.

Si $M$ est un idéal à droite (à gauche) d'un anneau $A$, nous désignerons par $V_1(M)$ l'idéal engendré par $T_1(M)$. D'après ce qui précède, on voit facilement que tout élément de $V_1(M)$ est la somme d'un nombre fini d'éléments de $T_1(M)$. Nous désignerons par $V_2(M)$ l'idéal $V_2(M) = V_1[V_1(M)]$, et, d'une manière générale, par $V_n(M)$ l'idéal $V_n(M) = V_1[V_{n-1}(M)]$. Posons

$$V(M) = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n(M) .$$

**Proposition 19.** *Si $M$ est un idéal à droite (à gauche) d'un anneau $A$, $V(M)$ est l'idéal complètement réflectif engendré par $M$.*

La démonstration de cette proposition est immédiate.

**Corollaire.** *Un anneau $A$ de carré non nul, dont les seuls idéaux sont* (0) *et $A$, est soit un anneau sans diviseurs de zéro, soit un anneau de la forme $A = V_1(0)$.*

En effet, si $V_1(0) \subset A$, on a, puisque $V_1(0)$ est un idéal, $V_1(0) = (0)$ et donc $V(0) = (0)$. Par conséquent, l'idéal (0) est complètement réflectif et $A$ est un anneau sans diviseurs de zéro, d'après le théorème 33.

Rappelons qu'un idéal $N$ d'un anneau $A$ est dit *compressif* (cf. [14]), si la relation $a_1^2 a_2^2 \ldots a_n^2 \in N$ entraîne $a_1 a_2 \ldots a_n \in N$. Nous avons montré dans [14] que l'intersection $\mathfrak{C}(M)$ de tous les idéaux compressifs contenant un idéal quelconque $M$ de $A$ est un idéal compressif, appelé le *radical compressif* de $M$ et que $\mathfrak{C}(M)$ est l'intersection de tous les idéaux complètement premiers minimaux appartenant à $M$. De là suit que pour qu'un anneau (non réduit à zéro) soit isomorphe à une somme sous-directe d'anneaux sans diviseurs de zéro, il faut et il suffit que l'idéal (0) soit compressif.

**Théorème 34.** *Pour qu'un idéal $N$ de l'anneau $A$ soit compressif, il faut et il suffit que $N$ soit complètement réflectif et complètement semi-premier.*

La condition est nécessaire. L'idéal $N$, étant compressif, coïncide avec son radical compressif. Par conséquent, $N$ est l'intersection d'idéaux complètement premiers, et donc $N$ est complètement semi-premier et complètement réflectif.

La condition est suffisante. Soit $a_1^2 a_2^2 \ldots a_n^2 \in N$. Du théorème 27 suit $(a_1 a_2 \ldots a_n)^2 \in N$ et donc $a_1 a_2 \ldots a_n \in N$, puisque $N$ est complètement semi-premier.

**Corollaire.** *Pour qu'un idéal $N$ soit compressif, il faut et il suffit que les relations $a^2 \in N$ et $bcd \in N$ entraînent respectivement $a \in N$ et $dcb \in N$.*

L'intersection de tous les idéaux complètement réflectifs contenant un idéal $M$ de $A$ est un idéal complètement réflectif, qui sera appelé le *noyau complètement réflectif de $M$*.

**Théorème 35.** *Le radical compressif* $\mathfrak{C}(M)$ *d'un idéal quelconque* $M$ *de* $A$ *coïncide avec le radical réflectif* $\mathfrak{R}(M^*)$ *du noyau complètement réflectif* $M^*$ *de* $M$.

D'après le théorème 16 et la proposition 15, $\mathfrak{R}(M^*)$ est un idéal complètement semi-premier et complètement réflectif, donc compressif d'après le théorème 34. Par conséquent, $\mathfrak{C}(M) \subseteq \mathfrak{R}(M^*)$. L'idéal $\mathfrak{C}(M)$ étant compressif, donc complètement réflectif, on a $M^* \subseteq \mathfrak{C}(M)$. Si $a \in \mathfrak{R}(M^*)$, il existe un entier positif $n$ tel que $a^n \in M^* \subseteq \mathfrak{C}(M)$. D'où $a \in \mathfrak{C}(M)$ et $\mathfrak{C}(M) = \mathfrak{R}(M^*)$.

**Corollaire.** *Le radical réflectif du noyau complètement réflectif d'un idéal quelconque* $M$ *de* $A$ *est l'intersection de tous les idéaux complètement premiers minimaux appartenant à* $M$.

**Théorème 36.** *Pour qu'un anneau* $A$ *(non réduit à zéro) soit isomorphe à une somme sous-directe d'anneaux sans diviseurs de zéro, il faut et il suffit que les relations* $a^2 = 0$ *et* $bcd = 0$ *entraînent respectivement* $a = 0$ *et* $dcb = 0$.

D'après [14], il faut et il suffit que l'idéal (0) soit compressif. Le théorème découle alors immédiatement du corollaire du théorème 34.

**3. Décomposition des idéaux complètement réflectifs.** Un idéal complètement réflectif $M$ d'un demi-groupe (d'un anneau) $D$ sera dit *r-réductible*, si $M$ est de la forme $M = M_1 \cap M_2$, où $M_1$ et $M_2$ sont des idéaux complètement réflectifs de $D$, avec $M \subset M_1$ et $M \subset M_2$. Un idéal complètement réflectif, qui n'est pas $r$-réductible, sera dit *r-irréductible*.

**Théorème 37.** *Tout idéal complètement réflectif r-irréductible* $M$ *d'un demi-groupe* $D$, *vérifiant la condition de chaîne ascendante pour les idéaux complètement réflectifs, est primaire.*

Supposons que $M$ ne soit pas primaire. Il existe alors deux éléments $a$ et $b$ tels que l'on ait $ab \in M$, $a \notin M$, $b^h \notin M$ pour tout entier positif $h$. Posons $M_h = M \cdot . b^h$. D'après la proposition 16, $M_h$ est un idéal complètement réflectif. D'autre part, on a les relations $M \subset M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$.

Comme $D$ vérifie la condition de chaîne ascendante pour les idéaux complètement réflectifs, il existe un entier positif $n$ tel que l'on ait $M_n = M_{n+1} = \ldots$.

Soit $B$ l'idéal complètement réflectif engendré par l'idéal à gauche $Db^n$. D'après la proposition 18, on a $B = T(Db^n)$. L'idéal $C = M \cup B$ est complètement réflectif et l'on a $M \subset C$, car $b^{n+1} \in C$ et $b^{n+1} \notin M$. Par conséquent, $M \subseteq M_1 \cap C$. Soit $c \in M_1 \cap C$. On a $cb \in M$, et $c \in M$ ou $c \in B$. Si $c \in B$, il existe un entier positif $m$ tel que $c \in T_m(Db^n)$ et $c \in T_m(db^n)$, où $d$ est un élément de $D$. Comme $cb \in M$, on a $T_m(db^n) \cdot b \cap M \neq \emptyset$, ce qui entraîne, puisque $M$ est complètement réflectif, $db^n \cdot b = db^{n+1} \in M$. Par conséquent,

$d \in M_{n+1} = M_n$ et $db^n \in M$. D'où $T_m(db^n) \subseteq M$ et $c \in M$. On a donc $M = M_1 \cap C$ et $M$ est $r$-réductible, ce qui est contradictoire.

**Théorème 38.** *Tout idéal complètement réflectif $M$ d'un demi-groupe $D$, vérifiant la condition de chaîne ascendante pour les idéaux complètement réflectifs, est intersection d'un nombre fini d'idéaux complètement réflectifs primaires.*

En effet, tout idéal complètement réflectif de $D$ est intersection d'un nombre fini d'idéaux complètement réflectifs $r$-irréductibles, donc primaires d'après le théorème 37.

Nous allons maintenant étudier les idéaux d'un anneau ou d'un demi-groupe, qui sont intersections d un nombre fini d'idéaux complètement réflectifs primaires. Comme exemples de tels idéaux, nous avons les idéaux complètement réflectifs d'un demi-groupe vérifiant la condition de chaîne ascendante pour les idéaux complètement réflectifs (théorème 38), ainsi que les idéaux d'un anneau réflecteur à droite vérifiant la condition de chaîne ascendante pour les idéaux (théorème 20 et proposition 17). Nous nous dispensons de donner les démonstrations des théorèmes qui suivent, car ces démonstrations sont analogues aux cas correspondants des anneaux et des demi-groupes commutatifs.

D'après le théorème 19, le radical réflectif $P$ d'un idéal complètement réflectif primaire $Q$ est un idéal complètement premier. Nous dirons que $P$ est l'idéal complètement premier associé à $Q$ et que $Q$ est un idéal complètement réflectif primaire appartenant à $P$.

**Théorème 39.** *Dans un anneau ou un demi-groupe, l'intersection*

$$M = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$$

*d'idéaux complètement réflectifs primaires appartenant à un même idéal complètement premier $P$ est un idéal complètement réflectif primaire appartenant à $P$.*

Soit maintenant, dans un anneau ou un demi-groupe, un idéal $M$ possédant une représentation comme intersection d'un nombre fini d'idéaux complètement réflectifs primaires

$$M = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \,. \tag{1}$$

L'idéal $M$ est lui-même complètement réflectif.

Le théorème 39 permet de remplacer dans la représentation (1) tous les idéaux complètement réflectifs primaires appartenant à un même idéal complètement premier par un seul idéal complètement réflectif primaire. D'autre part, si $Q_1$, par exemple, contient l'intersection $Q_2 \cap \cdots \cap Q_n$, on peut le supprimer sans altérer le second membre et $Q_1$ est dit superflu. En appliquant autant que possible ces deux procédés, on aboutit à une *représentation normée* ne comprenant aucun idéal complètement réflectif superflu, et dans laquelle deux idéaux complètement réflectifs primaires appartiennent toujours à des idéaux complètement premiers différents. Les idéaux complètement réflectifs primaires $Q_i$ figurant dans une telle représentation normée seront appelés les *composants complètement réflectifs primaires* de $M$ et les idéaux complètement premiers correspondants $P_i$ seront les *idéaux complètement premiers essentiels* de $M$. On a par conséquent le théorème suivant :

**Théorème 40.** *Tout idéal $M$ d'un anneau ou d'un demi-groupe, qui est intersection d'un nombre fini d'idéaux complètement réflectifs primaires, admet une représentation normée.*

**Théorème 41.** *Un idéal d'un anneau ou d'un demi-groupe qui admet une représentation normée comprenant plus d'un composant complètement réflectif primaire n'est pas primaire.*

**Théorème 42.** *Dans deux représentations normées d'un idéal d'un anneau ou d'un demi-groupe, le nombre des composants complètement réflectifs primaires est le même et les idéaux complètement premiers essentiels sont les mêmes.*

## BIBLIOGRAPHIE


[1] A. H. CLIFFORD and D. D. MILLER, *Semigroups having zeroid elements*, Amer. J. Math. 70 (1948) 117–125.

[2] R. CROISOT, *Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples*, Ann. Ecole Norm. 70 (1953) 361–379.

[3] P. DUBREIL, *Contribution à la théorie des demi-groupes*, Mém. Acad. Sci. Paris 63 (1941) 1–52.

[4] P. DUBREIL, *Algèbre I*, Deuxième édition, Gauthier-Villars, Paris 1954.

[5] A. FORSYTHE and N. H. MCCOY, *On the commutativity of certain rings*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946) 523–526.

[6] N. JACOBSON, *Structure theory for algebraic algebras of bounded degree*, Ann. Math. 46 (1945) 695–707.

[7] N. JACOBSON, *The radical and semi-simplicity for arbitrary rings*, Amer. J. Math. 67 (1945) 300–320.

[8] N. H. MCCOY, *Prime ideals in general rings*, Amer. J. Math. 71 (1949) 823–833.

[9] N. H. MCCOY, *Subdirect sums of rings*, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947) 856–877.

[10] N. H. MCCOY, *Rings and ideals*, Carus Mathematical Monographs, no 8, 1948.

[11] D. REES, *On semigroups*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 36 (1940) 387–400

[12] G. THIERRIN, *Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes*, Bull. Soc. Math. France 83 (1955) 103–159.

[13] G. THIERRIN, *Demi-groupes inversés et rectangulaires*, Bull. Acad. Royale Belgique 41 (1955) 83–92.

[14] G. THIERRIN, *Sur les idéaux complètement premiers d'un anneau quelconque*, Bull. Acad. Royale Belgique 43 (1957) 124–132.

[15] B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra II*, Deuxième édition, Berlin 1940.


(Reçu le 14 mars 1957.)