Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 33 (1959)

Artikel: Über die Äquivalenz der geometrischen und der analytischen Definition quasikonformer Abbildungen.

Autor: Pfluger, Albert

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26004

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über die Äquivalenz der geometrischen und der analytischen Definition quasikonformer Abbildungen[1])

von ALBERT PFLUGER, Zürich

Meinem verehrten Lehrer, G. PÓLYA, zu seinem siebzigsten Geburtstag

Es wird im folgenden der Satz von A. MORI und L. BERS ([7], [2])[2]) von der Äquivalenz einer geometrischen und einer analytischen Definition quasikonformer Abbildungen neu bewiesen, und zwar unter Vermeidung des RADEMACHER-STEPANOFFschen Theorems von der totalen Differenzierbarkeit, das in dem Beweis von MORI eine wesentliche Rolle spielt. Wir beschränken uns auf eineindeutige Abbildungen.

§ 1. Das zu beweisende Theorem

1.1. H. GRÖTZSCH hat eine (eineindeutige) quasikonforme Abbildung folgendermaßen definiert. Es sei $\zeta(z)$ eine topologische Abbildung eines Gebietes D in die ζ-Ebene, die stetig differenzierbar ist und überall in D eine positive Funktionaldeterminante besitzt. Einem infinitesimalen Kreis in D mit dem Radius ε und dem Mittelpunkt z entspricht dann in der ζ-Ebene eine infinitesimale Ellipse mit den Halbachsen $a\varepsilon$ und $b\varepsilon$, $a \geq b > 0$. Das Verhältnis $a/b = \delta(z)$ ist die *Dilatation* der Abbildung ζ im Punkte z. Gibt es eine Konstante K mit

$$\operatorname*{Sup}_{z \in D} \delta(z) \leq K\,, \tag{1.1}$$

so ist $\zeta(z)$ eine *K-quasikonforme Abbildung* im Sinne von GRÖTZSCH. Die Bedingung (1.1) ist äquivalent damit, daß überall in D die Ungleichung

$$\max_{(\theta)} |\, \zeta_x \cdot \cos\theta + \zeta_y \cdot \sin\theta \,|^2 \leq K \cdot J\,, \quad J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x\,, \tag{1.2}$$

erfüllt ist.

1.2. Für solche Abbildungen gilt die fundamentale *Ungleichung von GRÖTZSCH* [6]: Ein «orientiertes Viereck» Ω_{ABCD} ist eine Figur, bestehend aus einem Jordangebiet Ω und vier verschiedenen Randpunkten A, B, C, D

---

[1]) This research was sponsered by the Office of Naval Research and performed during the authors stay at Stanford University.

[2]) Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schlusse der Arbeit.

(seinen Ecken), deren Anordnung dem positiven Umlaufssinn der Randkurve entspricht. Man kann Ω konform auf ein Rechteck $\{w \mid 0 < \Re w < M, 0 < \Im w < 1\}$ abbilden, so daß die Punkte A, B, C, D entsprechend in die Ecken 0, M, $M + i$ und i übergehen. Die eindeutig bestimmte Zahl M ist der *Modul* von Ω_{ABCD}. Zwischen dem Modul M irgend eines Viereckes Ω_{ABCD} in D und dem Modul M' des entsprechenden Viereckes $\zeta(\Omega_{ABCD})$ unter der Abbildung $\zeta(z)$ in Nr. 1.1 besteht die Ungleichung (von GRÖTZSCH)

$$K^{-1}M \leq M' \leq KM\,. \tag{1.3}$$

1.3 Diese Ungleichung ist fundamental insofern, als aus ihr sozusagen alle Eigenschaften der Abbildung $\zeta(z)$ (in Nr. 1.1) hergeleitet werden können, ohne auf die speziellen Differenzierbarkeits-Voraussetzungen über $\zeta(z)$ zurückgreifen zu müssen. Man könnte deshalb die von GRÖTZSCH betrachteten Abbildungen ohne Verlust durch die wesentlich allgemeineren K-quasikonformen Abbildungen gemäß der folgenden **geometrischen Definition** ersetzen ([1], [7] und [9]).

Ein orientierungstreuer Homöomorphismus $\zeta(z)$ eines Gebietes D in die ζ-Ebene heißt K-quasikonform gemäß der geometrischen Definition, wenn für den Modul M der Vierecke Ω_{ABCD} in D und den Modul M' der entsprechenden Vierecke $\zeta(\Omega_{ABCD})$ unter der Abbildung $\zeta(z)$ die Ungleichung (1.3) *gültig ist.*

Abgesehen von der größeren Allgemeinheit haben *diese* K-quasikonformen Abbildungen gegenüber denjenigen in Nr. 1.1 den folgenden Vorteil: Konvergiert eine Folge von K-quasikonformen Abbildungen $\zeta_n(z)$ (K fest!) des Gebietes D lokal gleichmäßig gegen eine topologische Abbildung $\zeta(z)$, so ist auch $\zeta(z)$ K-quasikonform.

1.4. Außer diesem ziemlich impliziten Begriff ist die folgende **analytische Definition** K-quasikonformer Abbildungen betrachtet worden, die eine unmittelbare Verallgemeinerung der in Nr. 1.1 gegebenen Definition darstellt ([8], [4], [3]).

Ein Homöomorphismus $\zeta(z)$ des Gebietes D in die ζ-Ebene heißt K-quasikonform (gemäß der analytischen Definition), wenn

1. *$\zeta(z)$ im Gebiet D absolut stetig im Sinne von* TONELLI *(AST) ist,*
2. *die (gemäß* 1.*) fast überall in D existierenden und meßbaren partiellen Ableitungen ζ_x und ζ_y lokal quadratisch-integrierbar sind und*
3. *die Ungleichung* (1.2) *fast überall in D erfüllt ist.*

Es ist leicht zu zeigen, daß *diese* Abbildungen auch K-quasikonform gemäß der geometrischen Definition sind (vgl. Nr. 3.1). Daß auch das Umgekehrte gilt, daß also die beiden Definitionen, die geometrische und die analytische, einander äquivalent sind, ist von A. MORI [7] gezeigt worden. Diese Äquivalenz ist gleichwertig mit dem folgenden

Theorem A: *Ein Homöomorphismus $\zeta(z)$ eines Gebietes D in die ζ-Ebene ist K-quasikonform gemäß der geometrischen Definition dann und nur dann, wenn $\zeta(z)$ die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:*

1. *$\zeta(z)$ ist AST in D,*
2. *die Ungleichung* (1.2) *gilt fast überall in D.*

Da die Funktionaldeterminante J eines AST-Homöomorphismus lokal integrierbar ist (vgl. Lemma 5), folgt aus der 2. Bedingung die lokale quadratische Integrierbarkeit von ζ_x und ζ_y.

Wie schon erwähnt, soll Theorem A im folgenden neu bewiesen werden. Wirklich neu dürfte Theorem B (vgl. § 2) sein, das an Stelle des RADEMACHER-STEPANOFFschen Satzes steht. Der in § 3 *ausgeführte* Beweis von Theorem A wiederholt zum Teil schon Bekanntes.

§ 2. AST-Funktionen

Definition: Eine komplexwertige Funktion $w(z)$ der komplexen Variabeln z heißt AST (absolut stetig im Sinne von TONELLI) auf dem Rechteck

$$\bar{R} = \{z = x + iy \mid a_1 \leq x \leq a_2, \quad b_1 \leq y \leq b_2\},$$

wenn sie

1. auf $\bar{R}$ stetig,
2. als Funktion von x absolut stetig ist im Intervall $[a_1, a_2]$ für fast alle y in $[b_1, b_2]$, und als Funktion von y absolut stetig ist im Intervall $[b_1, b_2]$ für fast alle x in $[a_1, a_2]$, und wenn schließlich
3. die *totale Variation* $V_x(y, w, [a_1, a_2])$ von $w(z)$ als einer Funktion von x im Intervall $[a_1, a_2]$ eine in $[b_1, b_2]$ integrierbare Funktion von y ist und entsprechend die totale Variation $V_y(x, w, [b_1, b_2])$ eine in $[a_1, a_2]$ integrierbare Funktion von x ist.

Die Funktion $w(z)$ heißt AST in einem Gebiet D, wenn sie auf jedem abgeschlossenen Rechteck $\bar{R}$ in D AST ist.

Bemerkung: Wie man leicht sieht, kann man in der obigen Definition die Bedingung 3 durch die folgende ersetzen:

3'. die auf Grund der Bedingungen 1 und 2 fast überall in $\bar{R}$ existierenden und meßbaren partiellen Ableitungen w_x und w_y auf $\bar{R}$ integrierbar sind.

Bezeichnung: $Q_\varrho(z)$ bezeichnet das Quadrat mit dem Mittelpunkt z und achsenparallelen Seiten von der Länge 2ϱ,

$$Q_\varrho(z) = \{z' = x' + iy' \mid\mid x' - x \mid < \varrho, \mid y' - y \mid < \varrho\}.$$

$e^{i\alpha}Q_\varrho(z)$ entsteht aus $Q_\varrho(z)$ durch Drehung um den Winkel α um den Mittelpunkt z; $e^{i\alpha}S_\varrho(z)$ bezeichnet den Rand von $e^{i\alpha}Q_\varrho(z)$ und für $\alpha = 0$ schreiben wir einfach $S_\varrho(z)$.

Theorem B: *Es sei $w(z)$ eine AST-Funktion in dem Gebiet D. Dann gibt es in D eine Menge E vom Maß 0 mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $z_0 \in D - E$ und zu jedem Winkel α gibt es zwei Folgen $\{\varrho_n\}$ und $\{\varepsilon_n\}$, $\varrho_n \downarrow 0$, $\varepsilon_n \downarrow 0$, mit*

$$| w(z) - w(z_0) - w_x(z_0)\cdot(x - x_0) - w_y(z_0)\cdot(y - y_0) | < \varepsilon_n \varrho_n \tag{2.1}$$

$$\text{für} \quad z \in e^{i\alpha}S_{\varrho_n}(z_0)\,.$$ [3]

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den folgenden 4 Lemma.

Lemma 1: *Es sei $w(z)$ eine AST-Funktion in dem Gebiet D und $z(\zeta)$ eine eineindeutige und stetig differenzierbare Abbildung des Gebietes Δ auf D mit positiver Funktionaldeterminante. Dann ist $\omega(\zeta) = w(z(\zeta))$ eine AST-Funktion in Δ und es gilt fast überall in Δ*

$$\omega_\xi = w_x\cdot x_\xi + w_y\cdot y_\xi$$
$$\omega_\eta = w_x\cdot x_\eta + w_y\cdot y_\eta\,.$$

Dieses Lemma ist bekannt (vgl. [5], S. 282).

Wir setzen

$$w(z) - w(z_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0) = H(z, z_0, w)$$

und bezeichnen mit $L(\varrho, z_0, w)$ die Oszillation von $H(z, z_0, w)$ auf $S_\varrho(z_0)$:

$$L(\varrho, z_0, w) = \max_{z_1, z_2 \in S_\varrho(z)} | H(z_1, z_0, w) - H(z_2, z_0, w) |\,. \tag{2.2}$$

Lemma 2: *Es seien A und B zwei komplexe Zahlen und $w(z)$ eine AST-Funktion in einer Umgebung des Nullpunktes $z = 0$ mit der Eigenschaft, daß*

$$\int_{Q_\varepsilon(0)} (| w_x(z) - A | + | w_y(z) - B |)\,dx\,dy = o(\varepsilon^2)$$

ist für $\varepsilon \to 0$. Dann gibt es eine Folge $\{\varrho_n\}$, $\varrho_n \downarrow 0$, mit $L(\varrho_n, 0, w) = o(\varrho_n)$, $n \to \infty$.

Beweis: $w(z)$ ist in einem $Q_{\varrho_0}(0)$ als Funktion von x AS (absolut stetig) für fast alle y und als Funktion von y AS für fast alle x. Daraus folgt

$$L(\varrho, 0, w) \leq \int_{S_\varrho(0)} (| w_x(z) - A || dx | + | w_y(z) - B || dy |) \tag{2.3}$$

für fast alle ϱ, $0 < \varrho < \varrho_0$.

[3]) Für $\alpha = 0$ ist die Behauptung des Satzes dasselbe, was RADÓ und REICHELDERFER ([10], S. 324) als «*schwache totale Differenzierbarkeit fast überall*» bezeichnen. Letzteres gilt aber schon, wenn $w(z)$ stetig ist und die partiellen Ableitungen w_x und w_y fast überall existieren ([10], S. 412).

Nun ist für $0 < \varrho \leq \varepsilon < \varrho_0$

$$\int_{S_\varrho(0)} | w_x(z) - A \,||\, dx | \leq \int_{\substack{|y| = \varrho \\ |x| \leq \varepsilon}} | w_x(z) - A \,||\, dx | .$$

Durch Integration nach ϱ bzw. y folgt

$$\int_0^\varepsilon d\varrho \Big(\int_{S_\varrho(0)} | w_x(z) - A \,||\, dx \,| \Big) \leq \int_{Q_\varepsilon(0)} | w_x(z) - A \,|\, dxdy \tag{2.4}$$

und auf entsprechende Weise

$$\int_0^\varepsilon d\varrho \Big(\int_{S_\varrho(0)} | w_y(z) - B \,||\, dy \,| \Big) \leq \int_{Q_\varepsilon(0)} | w_y(z) - B \,|\, dxdy . \tag{2.5}$$

(2.3), (2.4) und (2.5) ergeben zusammen mit der Voraussetzung von Lemma 2

$$\int_0^\varepsilon L(\varrho, 0, w) d\varrho = o(\varepsilon^2), \qquad \varepsilon \to 0,$$

und dies gibt die Behauptung.

Lemma 3: *Es sei $w(z)$ eine* AST-*Funktion in der Umgebung des Nullpunktes $z = 0$ mit folgenden zwei Eigenschaften:*

1. *die partiellen Ableitungen w_x und w_y existieren für $z = 0$,*
2. *für jedes α gilt für $\varepsilon \to 0$*

$$\int_{e^{i\alpha} Q_\varepsilon(0)} (| w_x(z) - w_x(0) | + | w_y(z) - w_y(0) |) \, dxdy = o(\varepsilon^2) .$$

Dann gibt es zu jedem α zwei Folgen $\{\varrho_n\}$, $\{\varepsilon_n\}$, $\varrho_n \downarrow 0$, $\varepsilon_n \downarrow 0$, so daß mit $A = w_x(0)$ und $B = w_y(0)$ gilt $| H(z, 0, w) | < \varepsilon_n \varrho_n$, $z \in e^{i\alpha} S_{\varrho_n}(0)$.

Beweis: Für ein beliebiges, aber festes α setzen wir

$$\omega(\zeta) = w(e^{i\alpha} z) . \tag{2.6}$$

Gemäß Lemma 1 ist $\omega(\zeta)$ AST und

$$\omega_\xi = w_x \cdot \cos\alpha - w_y \cdot \sin\alpha$$
$$\omega_\eta = w_x \cdot \sin\alpha + w_y \cdot \cos\alpha$$

fast überall, aber nicht notwendig für $\zeta = 0$. Wir setzen

$$A = w_x(0) \cos\alpha - w_y(0) \sin\alpha, \qquad B = w_x(0) \sin\alpha + w_y(0) \cos\alpha$$

und erhalten

$$\int_{Q_\varepsilon(0)} (|\omega_\xi - A| + |\omega_\eta - B|) \, d\xi d\eta \leq 2 \int_{e^{i\alpha} Q_\varepsilon(0)} (|w_x(z) - w_x(0)| + |w_y(z) - w_y(0)|) dxdy = o(\varepsilon^2).$$

$\omega(\zeta)$ ist AST in $Q_\varepsilon(0)$. Also gibt es nach Lemma 2 eine Folge $\{\varrho_n\}$, $\varrho_n \downarrow 0$ mit $L(\varrho_n, 0, \omega) = o(\varrho_n)$. Daraus folgt zusammen mit der Existenz von $w_x(0)$

die Behauptung in Lemma 3; denn es ist $w(\varrho_n) - w(0) - w_x(0)\cdot\varrho_n = o(\varrho_n)$ und somit nach (2.2) und (2.6)

$$\begin{aligned} |H(z,0,w)| &\leq |H(z,0,w) - H(\varrho_n,0,w)| + |w(\varrho_n) - w(0) - w_x(0)\varrho_n| \\ &\leq L(\varrho_n,0,\omega) + o(\varrho_n) = o(\varrho_n) \\ &\text{für } z \in e^{i\alpha}S_{\varrho_n}(0)\,. \end{aligned}$$

Lemma 4: *Es sei $w(z)$ eine* AST-*Funktion in D. Dann gibt es eine Menge E vom Maß null, so daß für jedes $z_0 \in D - E$ und $\varepsilon \to 0$ gilt*

$$\int\limits_{e^{i\alpha}Q_\varepsilon(z_0)} (|w_x(z) - w_x(z_0)| + |w_y(z) - w_y(z_0)|)\,dxdy = o(\varepsilon^2)\,.$$

Beweis: Dies ist wohl bekannt. Da die Funktion

$$f_{\alpha_1\alpha_2}(z) = |w_x(z) - \alpha_1| + |w_y(z) - \alpha_2|$$

für jedes α_1 und α_2 lokal integrierbar ist, existiert nach einem Satz von LEBESGUE eine Menge $E_{\alpha_1\alpha_2}$ vom Maß null, so daß für jedes $z_0 \in D - E_{\alpha_1\alpha_2}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{e^{i\alpha}Q_\varepsilon(z_0)} f(z)\,dxdy = f(z_0)$$

ist. Wenn (α_1, α_2) eine abzählbare und in $C \times C$ dichte Menge M durchläuft, so ist auch $E = \bigcup\limits_M E_{\alpha_1\alpha_2}$ vom Maß null und man kann $f(z_0)$ durch geeignete Wahl von (α_1, α_2) beliebig klein machen. Dies ergibt dann leicht die Behauptung des Lemmas.

Aus Lemma 2, 3 und 4 ergibt sich unmittelbar Theorem B.

Wir benötigen für das Folgende noch

Lemma 5: *Es sei $\zeta(z)$ ein orientierungstreuer AST-Homöomorphismus eines Gebietes D auf ein beschränktes Gebiet Δ. Dann ist die Funktionaldeterminante $J = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x \geq 0$ fast überall, L-integrierbar auf D und $\int\limits_D J\,dxdy \leq |\Delta|$, das ist das Flächenmaß von Δ.*

Beweis: Wir bezeichnen mit $\varphi(R)$ den Flächeninhalt des Bildgebietes $\zeta(R)$ eines beliebigen Rechteckes R in D unter der Abbildung $\zeta(z)$. $\varphi(R)$ ist in D eine nichtnegative und subadditive «Rechteckfunktion». Nach einem Theorem von LEBESGUE existiert die Derivierte

$$d(z,\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\varepsilon^2}\varphi(e^{i\alpha}Q_\varepsilon(z))$$

fast überall in D und ist integrierbar mit

$$\int\limits_D d(z,\varphi)\cdot dxdy \leq |\Delta|\,.$$

Gemäß Theorem B und der Orientierungstreue ist aber $J(z) = d(z, \varphi)$ fast überall in D, woraus die Behauptung des Lemma 5 folgt[4]).

§ 3. Beweis von Theorem A

3.1. Es ist leicht zu zeigen (vgl. [2]), daß die Bedingungen 1 und 2 in Theorem A hinreichend sind. Es können die partiellen Ableitungen ζ_x und ζ_y nicht fast überall verschwinden, da $\zeta(z)$ ein AST-Homöomorphismus ist. Gemäß Bedingung 2 ist dann $J > 0$ auf einer Menge von positivem Maß und daraus folgt in Verbindung mit Theorem B die Orientierungstreue der Abbildung $\zeta(z)$. Es sei nun Ω_{ABCD} irgendein orientiertes Viereck in D, $\Omega'_{A'B'C'D'}$ das Bildviereck $\zeta(\Omega_{ABCD})$ unter der Abbildung $\zeta(z)$, sowie M und M' die entsprechenden Moduln. Wir bezeichnen mit Φ die Abbildung von Ω auf Ω', definiert durch die Funktion $\zeta(z)$, Γ sei die konforme Abbildung von Ω_{ABCD} auf ein Rechteck R mit den Ecken O, M, $M + i$ und i, die in dieser Reihenfolge den «Ecken» A, B, C, D entsprechen, sowie Γ' die entsprechende konforme Abbildung von $\Omega'_{A'B'C'D'}$, auf das Rechteck R' mit den Ecken O, M', $M' + i$ und i. Nach Lemma 1 erfüllt die zusammengesetzte Abbildung $\Gamma'_0 \Phi_0 \Gamma^{-1}$: $\bar{R} \to \bar{R}'$ die beiden Bedingungen in Theorem A, mit $D = R$, und ist stetig auf $\bar{R}$. Auf Grund von Lemma 5, der Ungleichung (1.2) und FUBINIS Theorem, der SCHWARZschen Ungleichung, und auf Grund der absoluten Stetigkeit von $\zeta(z)$ als einer Funktion von x für fast alle y folgt

$$K \cdot M' \geq \int_R K J \, dx \, dy \geq \int_0^1 \left(\int_0^M |\zeta_x|^2 \, dx \right) dy$$

$$\geq \frac{1}{M} \int_0^1 \left(\int_0^M |\zeta_x| \, dx \right)^2 dy \geq \frac{(M')^2}{M} \; ;$$

dies ist die Ungleichung von GRÖTZSCH.

3.2. Wir zeigen nun, daß die Bedingung 1 in Theorem A notwendig ist: Eine K-quasikonforme Abbildung (gemäß der geometrischen Definition) ist eine AST-Funktion[5]).

Es sei

$$\bar{R} = \{z = x + iy \mid a_1 \leq x \leq a_2, \quad b_1 \leq y \leq b_2\}$$

---

[4]) Nach dem in Anmerkung 3 angegebenen Satz von RADÓ und REICHELDERFER bleibt die Behauptung von Lemma 5 auch unter der viel schwächeren Voraussetzung richtig, daß $\zeta(z)$ ein orientierungstreuer Homöomorphismus von D auf Δ (beschränkt) mit fast überall existierenden partiellen Ableitungen ist.

[5]) K. STREBEL [12] hat gezeigt, daß $\zeta(z)$ auf fast allen Geraden $y = ax + b$ absolut stetig ist.

irgendein Rechteck in D und

$$\overline{R}_y = \{z = x + iy' \mid a_1 \leq x \leq a_2, \quad b_1 \leq y' \leq y\},$$

$b_1 \leq y \leq b_2$. Das Flächenmaß $A(y)$ des Bildgebietes $\zeta(\overline{R}_y)$ unter der Abbildung $\zeta(z)$ ist fast überall differenzierbar in $[b_1, b_2]$. Es sei y eine solche Stelle, und es seien in dem Intervall $[a_1, a_2]$ irgend endlichviele, nicht überlappende Teilintervalle $j_1, \ldots, j_N$ von der Gesamtlänge ε gegeben,

$$j_k = [x_k, x_k^*], \quad a_1 \leq x_1 \leq x_{k-1} \leq x_k < x_k^* \leq a_2, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Wir wählen ein $y_1 > y$ und bezeichnen die Rechtecke

$$\{z' = x' + iy' \mid x_k \leq x' \leq x_k^*, \quad y \leq y' \leq y_1\} \quad \text{mit} \quad R_k,$$

ihre Ecken sind $x_k + iy = z_k$, $x_k^* + iy = z_k^*$, $x_k^* + iy_1 = z_{1k}^*$ und $x_k + iy_1 = z_{1k}$, $k = 1, \ldots, N$. Wir setzen $P_k = \zeta(R_k)$, das sind die Bilder der Rechtecke R_k unter der Abbildung $\zeta(z)$, und es seien ζ_k, ζ_k^*, ζ_{1k}^* und ζ_{1k} die Bilder der Ecken z_k, z_k^*, z_{1k}^* und z_{1k}, $k = 1, \ldots, N$. Die den vertikalen Seiten $\overline{z_k, z_{1k}}$ und $\overline{z_k^*, z_{1k}^*}$ von R_k entsprechenden Bogen auf der Randkurve von P_k bezeichnen wir mit β_k und β_k^*, l_k sei der (euklidische) Abstand von β_k und β_k^*, und A_k der Flächeninhalt von P_k, $k = 1, \ldots, N$. Sind M_k und M_k' die Moduln der Vierecke R_k bzw. P_k in bezug auf die Eckpunktreihenfolge z_k, z_k^*, z_{1k}^*, z_{1k} bzw. ζ_k, ζ_k^*, ζ_{1k}^*, ζ_{1k}, so gilt $M_k = \dfrac{x_k^* - x_k}{y_1 - y}$ und nach einem bekannten Lemma von RENGEL [11] $M_k' \geq \dfrac{l_k^2}{A_k}$. Nach Voraussetzung ist $K M_k \geq M_k'$, $k = 1, \ldots, N$. Daraus folgt durch Summation und Anwendung der SCHWARZschen Ungleichung:

$$K \cdot \frac{\varepsilon}{y_1 - y} = K \cdot \sum_k M_k \geq \sum_k M_k' \geq \sum_k \frac{l_k^2}{A_k} \geq \frac{(\sum_k l_k)^2}{\sum_k A_k} \geq \frac{(\sum_k l_k)^2}{A(y_1) - A(y)}$$

oder

$$(\sum_k l_k)^2 \leq K \varepsilon \frac{A(y_1) - A(y)}{y_1 - y}.$$

Nun wählen wir η so klein, daß $2N\eta < \sum_k |\zeta_k^* - \zeta_k|$ ist, und dann y_1 so nahe bei y, daß die β_k und β_k^* je in einer η-Umgebung von ζ_k bzw. ζ_k^* liegen, $k = 1, \ldots, N$. Dann ist $\sum_k |\zeta_k^* - \zeta_k| \leq \sum_k l_k + 2N\eta$ und somit

$$(\sum_k |\zeta_k^* - \zeta_k| - 2N\eta)^2 \leq K \varepsilon \cdot \frac{A(y_1) - A(y)}{y_1 - y}.$$

für alle $y_1 > y$ und deshalb

$$\sum_k |\zeta_k^* - \zeta_k| \leq \sqrt{K\varepsilon \cdot \frac{dA}{dy}}\,. \tag{3.1}$$

Daraus folgt, daß $\zeta(z)$ als Funktion von x im Intervall $[a_1, a_2]$ absolut stetig ist für jedes y in $[b_1, b_2]$, wofür $\frac{dA}{dy}$ existiert und das ist fast überall. Ebenso folgt aus (3.1), daß die totale Variation von $\zeta(z)$ als Funktion von x auf dem Intervall $[a_1, a_2]$, das ist $V_x(y, \zeta, [a_1, a_2])$, der Ungleichung

$$V_x(y, \zeta, [a_1, a_2]) \leq \sqrt{(a_2 - a_1)K \cdot \frac{dA}{dx}} \leq \sqrt{K(a_2 - a_1)} \max\left[1, \frac{dA}{dx}\right] \tag{3.2}$$

genügt. Andererseits ist $V_x(y, \zeta, [a_1, a_2])$ von unten halbstetig, wegen der Stetigkeit von $\zeta(z)$, und somit meßbar. Dies ergibt zusammen mit (3.2) die Integrierbarkeit von $V_x(y, \zeta, (a_1, a_2])$ auf dem Intervall $[b_1, b_2]$.

Indem man dasselbe mit vertauschten Rollen von x und y wiederholt, erkennt man, daß $\zeta(z)$ AST ist auf einem beliebigen $\bar{R} \subset D$ und somit in D selbst.

3.3. Nun beweisen wir, daß auch die zweite Bedingung in Theorem A notwendig ist, ganz analog übrigens, wie dies Mori ([7], S. 62) auf Grund der totalen Differenzierbarkeit getan hat (vgl. auch [1], S. 14). Hierfür verwenden wir das folgende Lemma

Lemma 6: *Es bezeichne $\bar{R}$ das Rechteck mit den Ecken 0, M, $M + i$, i $(M \geq 0)$ und den Seiten $S_1 = \widehat{0, M}$, $S_2 = \widehat{M, M + i}$, $S_3 = \widehat{M + i, i}$ und $S_4 = \widehat{i, 0}$, das im Falle $M = 0$ in eine Strecke ausartet. Es sei $\Omega_n(z_1^n, z_2^n, z_3^n, z_4^n)$ eine Folge von «orientierten Vierecken», die im folgenden Sinn gegen $\bar{R}(0, M, M + i, i)$ konvergieren: Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen die «Seiten» $\sigma_k^n = \widehat{z_k^n, z_{k+1}^n}$ von Ω_n bei hinreichend großem n in einer ε-Umgebung von S_k, $k = 1, 2, 3, 4$, $z_5^n = z_1^n$. Dann gilt*[6])

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{mod} \Omega_n(z_1^n, z_2^n, z_3^n, z_4^n) = M.$$

Nun verwenden wir Theorem B. Wir wählen einen Punkt z_0 der Menge $D - E$, setzen

$$L(z) = \zeta_x(z_0)(x - x_0) + \zeta_y(z_0)(y - y_0)$$

---

[6]) Vgl. [1] und [7]. Obwohl der ausgeartete Fall $M = 0$ dort nicht ausdrücklich erwähnt ist, läßt sich die Methode darauf anwenden.

und nehmen an, daß $\zeta_x(z_0)$ oder $\zeta_y(z_0)$ von null verschieden ist, da andernfalls die Ungleichung (1.2) trivial wäre. Dann findet man zwei Winkel α und β, eine positive Zahl a und eine reelle Zahl b, $|b| \leq a$, so daß

$$\Lambda(z') = e^{i\beta} L(z_0 + e^{i\alpha} \cdot z') = ax' + iby' \tag{3.3}$$

ist. Aus Theorem B und der Orientierungstreue der Abbildung $\zeta(z)$ folgt dann $b \geqq 0$. Wir setzen

$$\zeta_n(z') = e^{i\beta} \cdot \zeta\left(z_0 + \frac{e^{i\alpha} \cdot z'}{\varrho_n}\right) - e^{i\beta} \zeta(z_0), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Nach Theorem B konvergieren die ζ_n auf dem Rand $S_1(0)$ des Quadrates $Q_1(0)$ gleichmäßig gegen Λ. Sie bilden $Q_1(0)$ mit der Eckpunktreihenfolge $(-1-i,\ 1-i,\ 1+i,\ -1+i)$ K-quasikonform auf orientierte Vierecke $\Omega_n(\zeta_1^n, \zeta_2^n, \zeta_3^n, \zeta_4^n)$ ab, mit Moduln $M_n \leq K$ gemäß Definition in Nr. 1.3. Die $\Omega_n(\zeta_1^n, \zeta_2^n, \zeta_3^n, \zeta_4^n)$ konvergieren im Sinne des Lemma 6 gegen das Rechteck mit den Ecken $-a-ib$, $a-ib$, $a+ib$, $-a+ib$. Gemäß diesem Lemma gilt deshalb $\lim\limits_{a \to \infty} M_n = a/b$ und somit $a \leq Kb$. Daraus folgt

$$\max_{\theta} |a \cos\theta + ib \sin\theta|^2 \leq a^2 \leq K \cdot ab\,.$$

Dies ist aber in Verbindung mit (3.3) gleichbedeutend mit der Ungleichung (1.2)[7]).

Damit ist Theorem A bewiesen.

3.4. Eine allgemeine (das ist nicht notwendig eineindeutige) K-quasikonforme Abbildung $w(z)$, gemäß der geometrischen Definition, eines Gebietes D in die w-Ebene ist die Zusammensetzung eines K-quasikonformen Homöomorphismus $\zeta(z)$ von D auf Δ und einer analytischen Abbildung $w = f(\zeta)$ von Δ in die w-Ebene: $w(z) = f(\zeta(z))$. Daraus folgt in Verbindung mit Theorem A, daß $w(z)$ auch gemäß der analytischen Definition K-quasikonform ist.

Anderseits ist eine Abbildung $w(z): D \to w$-Ebene, die den Bedingungen 1, 2 und 3 in Nr. 1.4 genügt, die Zusammensetzung eines Homöomorphismus $\zeta(z): D \to \Delta$, der diesen drei Bedingungen genügt, und einer analytischen Abbildung von Δ in die w-Ebene (vgl. [8], [3], [2]). Eine allgemeine (das ist nicht notwendig eineindeutige) quasikonforme Abbildung gemäß der analytischen Definition ist daher auch quasikonform gemäß der geometrischen Definition.

---

[7]) Man beachte, daß die partiellen Ableitungen von ζ_n für $z' = 0$ nicht existieren müssen.

REFERENZEN

[1] L. V. Ahlfors, *On quasiconformal mappings.* Journal d'Analyse Mathématique, 3 (1954), 1–58 und 207–208.

[2] L. Bers, *On a theorem of Mori and the definition of quasiconformality.* Trans. Amer. Math. Soc., 68 (1957), 78–84.

[3] L. Bers und L. Nirenberg, *On a representation theorem for linear elliptic systems with discontinuous coefficients and its applications.* Convegno Internationale sulle Equazioni à Derivate partiali. Agosto 1954, pp. 111–140.

[4] R. Cacciopoli, *Fundamenti per una teoria generale delle funzioni pseudo-analitiche di una variabile complessa.* Academia Nazionale dei Lincei, Rend. 13 (1952), 197–204 und 321–351.

[5] G. C. Evans, *Fundamental points of potential theory.* Rice Institute Pamphlets, VII (1920) No. 4, pp. 252–329.

[6] H. Grötzsch, *Über die Verzerrung bei schlichten nicht-konformen Abbildungen und eine damit zusammenhängende Erweiterung des* Picard*schen Satzes.* Leipziger Berichte, 80 (1928), 503–507.

[7] A. Mori, *On quasi-conformality and pseudo-analyticity.* Trans. Amer. Math. Society, 68 (1957), 56–57.

[8] C. B. Morrey, *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations.* Trans. Amer. Math. Soc., 43 (1938), 126–166.

[9] A. Pfluger, *Quasikonforme Abbildungen und logarithmische Kapazität.* Ann. de l'Inst. Fourier, 2 (1951), 69–80.

[10] T. Radó, P. V. Reichelderfer, *Continuous transformations in analysis.* Grundlehrenband LXXV, Springer-Verlag, Berlin 1955.

[11] E. Rengel, *Über einige Schlitz-Theoreme der konformen Abbildung.* Schr. des Math. Seminars und Institutes f. angew. Math. der Universität Berlin, 1 (1933), 141–162.

[12] K. Strebel, *On the Maximal Dilitation of Quasikonformal Mappings.* Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955), 903–909.

(Eingegangen den 15. März 1958)