Zum potentialtheoretischen Aspekt der ALEXANDROWschen Flächentheorie.

Autor(en): **Huber, Alfred**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **34 (1960)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-26627

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Zum potentialtheoretischen Aspekt der ALEXANDROWschen Flächentheorie

von ALFRED HUBER, Zürich

1. Einleitung

Bekanntlich können auf jeder genügend regulären Fläche im kleinen isotherme Parameter eingeführt werden. In neuerer Zeit haben mehrere Autoren – wir erwähnen A. WINTNER [15, 16], S. S. CHERN, P. HARTMAN und A. WINTNER [4], I. G. RESCHETNJAK [13] – sich zum Ziel gesetzt, die Existenz eines solchen Koordinatensystems unter möglichst schwachen Voraussetzungen herzuleiten. Insbesondere hat RESCHETNJAK folgendes Resultat gefunden[1]:

Sei M eine Mannigfaltigkeit beschränkter Krümmung im Sinne von A. D. ALEXANDROW [1, S. 493], *und sei D ein kreishomöomorpher Bereich in M, dessen Berandung eine Schwenkung von beschränkter Variation* [1, S. 358] *besitzt. Dann existieren ein Gebiet G in der komplexen z-Ebene, eine in G definierte, reellwertige Funktion $u(z)$ sowie eine topologische Abbildung Φ von G auf D derart, daß folgendes erfüllt ist:*

1. *Es gilt die Darstellung*

$$u(z) = h(z) + \int_G \log|z-\zeta|\, d\mu(e_\zeta) , \tag{1.1}$$

wobei h eine in G harmonische Funktion, μ eine daselbst definierte vollständig additive Mengenfunktion darstellt.

2. *Φ ist eine Isometrie, falls wir in D die durch M induzierte und in G die Metrik*

$$\varrho(z_1, z_2) = \inf_L \int_L e^{u(z)}\,|dz| \tag{1.2}$$

betrachten, wobei über alle z_1 mit z_2 verbindenden Polygone L in G variiert wird.

3. *Die Mengenfunktion μ entspricht bis auf einen konstanten Faktor der ALEXANDROWschen Krümmung ω. Es ist nämlich*

$$\mu(e) = -\frac{1}{2\pi}\,\omega(\Phi^{-1}(e)) \tag{1.3}$$

für jede BORELmenge e in G.

---

[1]) Für Begriffe und Resultate der ALEXANDROWschen Flächentheorie sei der Leser auf [1] verwiesen. Dort (Seite 503ff.) befindet sich auch eine kurze Orientierung über das RESCHETNJAKsche Ergebnis.

Umgekehrt erweist sich jede Metrik der Form (1.2), *wobei* $u(z)$ *als Differenz subharmonischer Funktionen – also lokal in der Form* (1.1) – *darstellbar ist, als Metrik beschränkter Krümmung.*

Da jeder Punkt von M als innerer Punkt eines solchen Bereiches D aufgefaßt werden darf, und da dann ferner in einer genügend kleinen Umgebung dieses Punktes die Metrik von M mit der durch M in D induzierten übereinstimmt [1, S. 80], sichert dieses Resultat die Existenz lokaler isothermer Parameter auf M. Von diesem Ergebnis ausgehend beweisen wir in der vorliegenden Arbeit den folgenden globalen Darstellungssatz:

Satz A. *Jede (offene oder geschlossene) orientierbare Mannigfaltigkeit beschränkter Krümmung ist isometrisch einem Raum von folgender Art:*

Auf einer RIEMANN*schen Fläche* R *sei ein konform invariantes Linienelement*

$$ds = e^{u(z)} \mid dz \mid \qquad (z = \textit{Ortsuniformisierende}) \tag{1.4}$$

definiert, wobei u *sich als Differenz subharmonischer Funktionen darstellen lasse. Zwei beliebigen Punkten* p *und* q *auf* R *werde sodann der Abstand*

$$\varrho(p, q) = \inf_{L} \int_{L} e^{u(z)} \mid dz \mid \tag{1.5}$$

zugeordnet. Dabei durchlaufe L *die Gesamtheit aller stückweise analytischen Kurven, welche* p *mit* q *verbinden.*

Umgekehrt stellt jeder derartige Raum eine Mannigfaltigkeit beschränkter Krümmung dar.

Verzichtet man darauf, die Orientierbarkeit von M vorauszusetzen, so bleibt dieser Satz trotzdem richtig, falls man unter R eine «verallgemeinerte RIEMANNsche Fläche» versteht, in deren Definition neben den konformen Nachbarrelationen [10, S. 53] auch antikonforme zugelassen sind.

Außer dem Beweis von Satz A enthält die vorliegende Arbeit die Herleitung einer rein potentialtheoretischen Definition der Kurvenlänge (Satz B). Wir beginnen mit einigen Lemmata über subharmonische Funktionen, welche – wie sich nachträglich herausgestellt hat – zwar nicht alle zum Beweis der beiden Sätze benötigt werden, die aber für sich von Interesse sind.

2. Hilfssätze über subharmonische Funktionen

Lemma 1. *In einem einfach zusammenhängenden Gebiet* G *der* z*-Ebene sei eine als Differenz subharmonischer Funktionen darstellbare Funktion* $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$ *definiert. Wir setzen voraus, daß die kleinsten harmonischen Majo-*

ranten[2]) h_1 *von* u_1 *und* h_2 *von* u_2 *in* G *existieren, ferner daß* $\alpha_1, \alpha_2 < 2$, *wobei* $\alpha_1 = \mu_1(G)$ *und* $\alpha_2 = \mu_2(G)$ *die* u_1 *und* u_2 *zugeordneten Totalmassen bezeichnen. Dann ist*

$$\left| \iint_G e^u dx\,dy - \iint_G e^h dx\,dy \right| \leqq \max\left(\frac{\alpha_1}{2}, \frac{\alpha_2}{2-\alpha_2}\right) \cdot \iint_G e^h dx\,dy \qquad (2.1)$$

$$(z = x + iy)$$

wobei $h(z) = h_1(z) - h_2(z)$.

Beweis. Es gelten die Darstellungen von F. RIESZ [14]

$$u_1(z) = h_1(z) - \int_G g(z,\zeta)\,d\mu_1(e_\zeta) \qquad (2.2)$$

und

$$u_2(z) = h_2(z) - \int_G g(z,\zeta)\,d\mu_2(e_\zeta)\,, \qquad (2.3)$$

wobei g die GREENsche Funktion von G, μ_1 und μ_2 die u_1 und u_2 zugeordneten Massenverteilungen bezeichnen. In [6] wurde die Ungleichung

$$\iint_G e^u dx\,dy \leqq \frac{2}{2-\alpha_2} \iint_G e^h dx\,dy \qquad (2.4)$$

bewiesen für $G = [|z| < 1]$. (Sie folgt dort aus den Beziehungen (2.4), (2.5) und (2.11), wobei aber die dortigen Funktionen u und h durch $u/2$ und $h/2$ zu ersetzen sind.) Die Gültigkeit dieser Abschätzung für beliebige einfach zusammenhängende Gebiete G folgt daraus durch konforme Abbildung[3]). Somit ist

$$\left(\iint_G e^h dx\,dy\right)^2 = \left(\iint_G \exp\left\{\frac{h(z)}{2} + \frac{1}{2}\int_G g(z,\zeta)\,d\mu_1(e_\zeta)\right\} \cdot \exp\left\{\frac{h(z)}{2} - \frac{1}{2}\int_G g(z,\zeta)\,d\mu_1(e_\zeta)\right\} dx\,dy\right)^2 \leqq$$

$$\iint_G \exp\left\{h(z) + \int_G g(z,\zeta)\,d\mu_1(e_\zeta)\right\} dx\,dy \cdot \iint_G \exp\left\{h(z) - \int_G g(z,\zeta)\,d\mu_1(e_\zeta)\right\} dx\,dy \leqq$$

$$\frac{2}{2-\alpha_1} \iint_G e^h dx\,dy \iint_G e^u dx\,dy\,.$$

Daraus folgt

$$\iint_G e^u dx\,dy - \iint_G e^h dx\,dy \geqq -\frac{\alpha_1}{2} \iint_G e^h dx\,dy\,. \qquad (2.5)$$

Aus (2.4) und (2.5) ergibt sich die Behauptung.

---

[2]) Wir verwenden Begriffe und Sätze der Theorie der subharmonischen Funktionen, wie sie etwa im Buche von T. RADÓ [11] dargelegt sind.

[3]) Damit ist gleichzeitig bewiesen, daß die Existenz des rechten Integrals in (2.4) diejenige des linken zur Folge hat.

Lemma 2. *Läßt sich die in einem Gebiete G der z-Ebene definierte Funktion u als Differenz subharmonischer Funktionen $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$ darstellen, so gilt*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0|<r} e^u dx dy = e^{u(z_0)} \tag{2.6}$$

für jeden Punkt z_0 von G, in dem $(u_1(z_0), u_2(z_0)) \neq (-\infty, -\infty)$ ist.

Beweis. Zuerst beweisen wir

$$\liminf_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0|<r} e^u dx dy \geqq e^{u(z_0)} . \tag{2.7}$$

Diese Ungleichung ist trivial, wenn $u_1(z_0) = -\infty$ ($u_2(z_0)$ endlich), also $e^{u(z_0)} = 0$ ist.

Ist $u_2(z_0) = -\infty$ ($u_1(z_0)$ endlich, also $e^{u(z_0)} = \infty$), so gibt es zu jeder vorgegebenen Zahl N einen Radius $\varrho_N > 0$ mit der Eigenschaft, daß in $|z - z_0| < \varrho_N$ die Ungleichung $u_2(z) < -N$ erfüllt ist. e^{u_1+N} ist subharmonisch. Für $0 < r < \varrho_N$ gilt somit

$$e^{u_1(z_0)+N} \leqq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0|<r} e^{u_1+N} dx dy \leqq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0|<r} e^u dx dy .$$

Da N beliebig groß gewählt werden darf, folgt daraus (2.7).

Seien nun $u_1(z_0)$ und $u_2(z_0)$ beide endlich. Mit h_{1r} und h_{2r} bezeichnen wir die besten harmonischen Majoranten von u_1 und u_2 für $|z - z_0| < r$. Sei $h_r = h_{1r} - h_{2r}$. e^{h_r} ist subharmonisch. Somit gilt

$$e^{u(z_0)} = \lim_{r \to 0} e^{h_r(z_0)} \leqq \liminf_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0|<r} e^{h_r} dx dy . \tag{2.8}$$

Da $u_1(z_0)$ und $u_2(z_0)$ endlich sind, erfüllen die u_1 und u_2 zugeordneten Massenbelegungen μ_1 und μ_2 die Beziehungen

$$\lim_{r \to 0} \mu_1(|z - z_0| < r) = \lim_{r \to 0} \mu_2(|z - z_0| < r) = 0 .$$

Unter Anwendung von Lemma 1 erhält man

$$\liminf_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0|<r} e^{h_r} dx dy = \liminf_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0|<r} e^u dx dy . \tag{2.9}$$

(Es ist zunächst denkbar, daß diese Beziehung die Form $+\infty = +\infty$ annehmen kann; nachträglich stellt sich allerdings heraus, daß dieser Fall nicht auftritt.) (2.7) folgt aus (2.8) und (2.9).

Wir haben noch

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0|<r} e^u dx\,dy \leqq e^{u(z_0)} \tag{2.10}$$

zu beweisen. Im Falle $u_2(z_0) = -\infty$ ($u_1(z_0)$ endlich) sagt diese Ungleichung nichts aus.

Sei also $u_2(z_0)$ endlich. Wir zeigen: Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\varrho_0(\varepsilon) > 0$ derart, daß für alle $r < \varrho_0(\varepsilon)$

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0|<r} e^{-u_2} dx\,dy \leqq e^{-u_2(z_0)+\varepsilon} \tag{2.11}$$

ist. Zu diesem Zweck betrachten wir die RIESZsche Zerlegung [14]

$$u_2(z) = h_2(z) + \int_K \log|z-\zeta|\, d\mu_2(e_\zeta) \tag{2.12}$$

für eine in G liegende Kreisscheibe K vom Zentrum z_0 und einem Radius < 1. Es ist dann

$$\gamma = h_2(z_0) - u_2(z_0) = -\int_K \log|\zeta|\, d\mu_2(e_\zeta) \geqq 0\,. \tag{2.13}$$

Da $h_2(z)$ harmonisch ist, gibt es ein $\varrho_1(\varepsilon) > 0$ derart, daß für $|z-z_0| < \varrho_1$

$$h_2(z) > h_2(z_0) - \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.14}$$

ist. Ferner behaupten wir die Existenz einer Zahl $\varrho_2(\varepsilon) > 0$ mit der Eigenschaft, daß für $|z-z_0| < \varrho_2$

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0|<r} \exp\{-\int_K \log|z-\zeta|\, d\mu_2(e_\zeta)\} dx\,dy < e^{\gamma+\frac{\varepsilon}{2}} \tag{2.15}$$

ist. Zum Beweise betrachten wir zunächst den Spezialfall, da $\mu_2(e_\zeta)$ aus einer einzigen Punktmasse m in einem Punkte $\zeta_0 \neq z_0$ besteht. (Wegen $u_2(z_0) > -\infty$ kann in z_0 keine Masse liegen.) Dann ist $m = -\gamma/\log|z_0-\zeta_0|$ und es wird

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0|<r} \exp\{-\log|z-\zeta|\, d\mu_2(e_\zeta)\} dx\,dy = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0|<r} |z-\zeta_0|^{\frac{\gamma}{\log|z_0-\zeta_0|}} dx\,dy\,. \tag{2.16}$$

Aus einer elementaren Betrachtung ersieht man, daß dieser Mittelwert stets kleiner ist als

$$\frac{1}{\pi|z_0-\zeta_0|^2} \iint_{|z-\zeta_0|<|z_0-\zeta_0|} |z-\zeta_0|^{\frac{\gamma}{\log|z_0-\zeta_0|}} dx\,dy = -\frac{2e^\gamma}{2+\gamma/\log|z_0-\zeta_0|}\,. \tag{2.17}$$

Aus (2.17) schließen wir, daß es eine Zahl $\delta(\varepsilon, \gamma) > 0$ gibt mit folgender Eigenschaft: Für alle ζ_0 in $|z - z_0| < \delta$ ist der Mittelwert (2.17) – und damit a fortiori (2.16), und zwar letzterer für alle in Frage kommenden Werte von r – kleiner als $e^{\gamma+\varepsilon/2}$. Für $\zeta_0 \in [|z - z_0| \geqq \delta] \cap K$ sind aber die mittelnden Funktionen $|z - \zeta_0|^{\frac{\gamma}{\log|z_0-\zeta_0|}}$ im Punkte z_0 gleichgradig stetig. Da sie ferner für $z = z_0$ alle den Wert e^γ annehmen, folgt: Es gibt eine nicht von ζ_0 abhängige Zahl $\varrho_2(\gamma, \varepsilon) > 0$ derart, daß der Mittelwert (2.16) für alle Werte $r < \varrho_2$ kleiner als $e^{\gamma+\varepsilon/2}$ ist. Damit ist (2.15) für den Spezialfall einer Einzelmasse bewiesen. (Dieser Beweis wäre wesentlich einfacher ausgefallen, falls man sich mit einem von ζ_0 abhängigen ϱ_2 begnügt hätte. Damit ließe sich jedoch der nun folgende Übergang auf allgemeine Massenverteilungen nicht durchführen.)

Nun nehmen wir an, daß μ_2 aus endlich vielen Einzelmassen

$$-\frac{p_1\gamma}{\log|z_0 - \zeta_1|} \text{ in } \zeta_1, \quad -\frac{p_2\gamma}{\log|z_0 - \zeta_2|} \text{ in } \zeta_2, \ldots, \quad -\frac{p_m\gamma}{\log|z_0 - \zeta_m|} \text{ in } \zeta_m$$

bestehe, wobei $p_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. (2.13) ist äquivalent mit $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$. Eine Anwendung der HÖLDERschen Ungleichung [5, S. 140] führt uns auf den bereits behandelten Spezialfall zurück. Für $r < \varrho_2(\gamma, \varepsilon)$ ist nämlich

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0|<r} \exp\{-\int_K \log|z - \zeta|\, d\mu_2(e_\zeta)\} dx\,dy =$$

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0|<r} \prod_{k=1}^{m} (|z - \zeta_k|^{\frac{\gamma}{\log|z_0-\zeta_k|}})^{p_k} dx\,dy \leqq$$

$$\frac{1}{\pi r^2} \prod_{k=1}^{m} (\iint_{|z-z_0|<r} |z - \zeta_k|^{\frac{\gamma}{\log|z_0-\zeta_k|}} dx\,dy)^{p_k} < e^{\gamma+\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Die Tatsache, daß ϱ_2 nur von γ und ε abhängt, ermöglicht es, die Einzelmassen zu verschmieren und (2.15) für beliebige Verteilungen μ_2 zu beweisen. Dies sei dem Leser überlassen. Setzen wir $\varrho_0 = \min[\varrho_1, \varrho_2]$, so folgt (2.11) aus (2.12) bis (2.15).

Ist $u_1(z_0)$ endlich, so gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\varrho_0^*(\varepsilon) > 0$ derart, daß für $|z - z_0| < \varrho_0^*$

$$u_1(z) < u_1(z_0) + \varepsilon \tag{2.18}$$

ist. (2.10) ergibt sich aus (2.11) und (2.18).

Ist $u_1(z_0) = -\infty$, so gibt es zu jeder vorgegebenen Zahl N ein $\varrho_N > 0$

derart, daß für $|z - z_0| < \varrho_N$

$$u_1(z) < -N \tag{2.19}$$

ist. Dann folgt (2.10) aus (2.11) und (2.19). Q.E.D.

Lemma 3. *Im Ringgebiet* $\Omega = [R < |z| < 1]$, $0 < R < 1$, *sei eine als Differenz subharmonischer Funktionen darstellbare Funktion* $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$ *definiert. Wir setzen voraus, daß die kleinsten harmonischen Majoranten* h_1 *von* u_1 *und* h_2 *von* u_2 *in* Ω *existieren und daß die Totalmasse* $\mu_2(\Omega)$ *endlich sei. Dann gilt*

$$\liminf_{r \to 1} \int_{|z|=r} e^u \, |dz| = \lim_{r \to 1} \int_{|z|=r} e^h \, |dz| \,, \tag{2.20}$$

wobei $h(z) = h_1(z) - h_2(z)$.

Bemerkungen. Die Voraussetzung $\mu_2(\Omega) < \infty$ darf nicht weggelassen werden. Dies erhellt aus folgendem Beispiel: Sei

$$u(z) = \tfrac{1}{2} \log |z - 1| + \int_0^1 g(z, t)(1 - t)^{-\frac{3}{2}} dt \,, \tag{2.21}$$

wobei g die GREENsche Funktion für das Innere des Einheitskreises bezeichnet. Dann ist

$$h(z) = -\tfrac{1}{2} \log |z - 1| \,. \tag{2.22}$$

Mit den Bezeichnungen $z = re^{i\varphi}$, $\varrho = 1 - r$ und $\tau = 1 - t$ gilt für $t \geqq r$

$$\begin{aligned} g(z, t) &= \tfrac{1}{2} \log \frac{1 - 2rt\cos\varphi + r^2t^2}{r^2 - 2rt\cos\varphi + t^2} \\ &= \tfrac{1}{2} \log \left[1 + \frac{(1 - r^2)(1 - t^2)}{r^2 - 2rt\cos\varphi + t^2} \right] \geqq \frac{\varrho\tau}{4\,|z - 1|^2} \,. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Man verifiziert leicht, daß für $\frac{1}{2} \leqq r \leqq 1$ und $-\pi \leqq \varphi \leqq +\pi$

$$\frac{|\varphi|}{4} \leqq |z - 1| \leqq |\varphi| + \varrho \tag{2.24}$$

ist. Aus (2.22) und der linken Ungleichung (2.24) schließen wir, daß

$$\lim_{r \to 1} \int_{|z|=r} e^h \, |dz| < \infty \tag{2.25}$$

ist. Aus (2.21), (2.23) und der rechten Ungleichung (2.24) folgt

$$\begin{aligned} \liminf_{r \to 1} \int_{|z|=r} e^u \, |dz| &\geqq \liminf_{r \to 1} \int_{|z|=r} \Big[e^h \int_0^1 g(z, t)\,(1 - t)^{-\frac{3}{2}} dt \Big] |dz| \\ &\geqq \liminf_{\varrho \to 0} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\varrho(1 - \varrho)}{2(\varrho + |\varphi|)^{5/2}} \, d\varphi = +\infty \,. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Aus (2.25) und (2.26) ersehen wir, daß in diesem Fall (2.20) nicht erfüllt ist.

Beweis. Da $h(z)$ harmonisch ist, ist $|z|\, e^{h(z)}$ subharmonisch, somit das auf der rechten Seite von (2.20) stehende Integral (als Mittelwert zu interpretieren) eine konvexe Funktion von $\log r$. Daraus folgt die Existenz des Limes, dessen Wert endlich oder $+\infty$ sein kann. Es gelten die RIESZschen Zerlegungen

$$u_1(z) = h_1(z) - \int_\Omega g(z, \zeta)\, d\mu_1(e_\zeta) \tag{2.27}$$

und

$$u_2(z) = h_2(z) - \int_\Omega g(z, \zeta)\, d\mu_2(e_\zeta)\,, \tag{2.28}$$

wobei nun g die GREENsche Funktion von Ω bezeichnet. Wir beweisen zunächst

$$\lim_{r\to 1} \int_{|z|=r} \exp\{h(z) - \int_\Omega g(z, \zeta)\, d\mu_1(e_\zeta)\}\, |dz| = \lim_{r\to 1} \int_{|z|=r} e^h\, |dz|\,. \tag{2.29}$$

Die Existenz des linken Grenzwerts verifiziert man auf dieselbe Weise wie diejenige des rechten. Wir führen die Abkürzung

$$v(z) = h(z) - \int_\Omega g(z, \zeta)\, d\mu_1(e_\zeta)$$

ein und definieren

$$v_n(z) \begin{cases} = v(z), \text{ falls } 1 - \dfrac{1}{n} \leqq |z| < 1\,, \\ = \text{beste harmonische Majorante von } v \text{ für das Gebiet} \\ \quad R < |z| < 1 - \dfrac{1}{n}, \text{ falls } R < |z| < 1 - \dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$. v_n ist subharmonisch in $R < |z| < 1$. Daraus folgt dasselbe für $|z|\, e^{v_n}$. Also ist $\int_{|z|=r} e^{v_n}\, |dz|$ eine konvexe Funktion von $\log r$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Trivialerweise ist

$$\lim_{r\to 1} \int_{|z|=r} e^{v_n}\, |dz| = \lim_{r\to 1} \int_{|z|=r} e^{v}\, |dz|\,.$$

Für festes r gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|z|=r} e^{v_n}\, |dz| = \int_{|z|=r} e^{h}\, |dz|\,.$$

Aus diesen Aussagen schließen wir, daß

$$\lim_{r\to 1} \int_{|z|=r} e^{h}\, |dz| \leqq \lim_{r\to 1} \int_{|z|=r} e^{v}\, |dz|\,.$$

Da anderseits $h \geqq v$ ist, kommt nur die Gleichheit in Frage. Damit ist (2.29) bewiesen.

Der letzte und wichtigste Schritt im Beweis von Lemma 3 besteht in der Verifikation von

$$\liminf_{r\to 1} \int_{|z|=r} e^{w}\, |dz| \leqq \lim_{r\to 1} \int_{|z|=r} e^{h}\, |dz|\,, \tag{2.30}$$

wobei zur Abkürzung

$$w(z) = h(z) + \int_{\Omega} g(z, \zeta) d\mu_2(e_\zeta) \tag{2.31}$$

gesetzt wurde. Natürlich ist nur der Fall zu betrachten, da der rechte Grenzwert endlich ist.

Wäre (2.30) nicht erfüllt, so gäbe es zwei Zahlen $\eta > 0$ und $R^* < 1$ derart, daß

$$\iint_{\varrho<|z|<1} e^w dx dy \geqq (1+\eta) \iint_{\varrho<|z|<1} e^h dx dy \tag{2.32}$$

für $R^* \leqq \varrho < 1$. Dies wird uns auf einen Widerspruch führen.

Zunächst definieren wir

$$m = \inf_{R^* \leqq r < 1} \int_{|z|=r} e^h |dz|$$

und

$$M = \sup_{R^* \leqq r < 1} \int_{|z|<r} e^h |dz| ,$$

beides positive, endliche Zahlen.

Die Gebietsfolge $\omega_n = \left[1 - \frac{1}{2^n} < |z| < 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right]$ $n = 1, 2, 3, \ldots,$ besitzt folgende Eigenschaft: Jede Niveaulinie

$$g(z, \zeta) = \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \qquad (\zeta \text{ fest}) \tag{2.33}$$

schneidet höchstens zwei dieser Bereiche. Zum Beweis betrachten wir diejenige Halbebene H_ζ, welche Ω enthält und begrenzt wird durch die Tangente an den Einheitskreis im Punkte $\zeta/|\zeta|$. Durch direkte Rechnung weist man nach, daß die Niveaulinie

$$\tilde{g}(z, \zeta) = \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \qquad (\zeta \text{ fest}) \tag{2.34}$$

wobei $\tilde{g}$ die GREENsche Funktion von H_ζ bedeutet, höchstens zwei Gebiete ω_n schneidet, woraus sich dieselbe Eigenschaft für die innerhalb (2.34) verlaufende Kurve (2.33) a fortiori ergibt. Ferner sieht man leicht ein, daß das Innengebiet von (2.33) für $|\zeta| > \frac{3}{4}$ stets einfach zusammenhängend ist.

Aus den bisherigen Definitionen schließen wir noch, daß für $n > 1/(1 - R^*)$

$$\iint_{\omega_{n+1}} e^h dx dy \geqq \frac{m}{2M} \iint_{\omega_n} e^h dx dy \, . \tag{2.35}$$

Seien nun k und l zwei natürliche Zahlen, über die später verfügt werden wird. Vorläufig werde nur vorausgesetzt, daß $k > l > 1/(1 - R^*)$ sei. Wir zerlegen Ω in die Bereiche

$$D = \left[R < |z| < 1 - \frac{1}{2^l}\right],$$
$$E_1 = \left[1 - \frac{1}{2^l} \leqq |z| \leqq 1 - \frac{1}{2^k}\right],$$
$$\omega_k = \left[1 - \frac{1}{2^k} < |z| < 1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right],$$
$$E_2 = \left[1 - \frac{1}{2^{k+1}} \leqq |z| < 1\right]$$

und führen die Bezeichnungen

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \omega_k , \qquad \alpha = \mu_2(\Omega) , \qquad \alpha_l = \mu_2(E)$$

ein. Von nun an setzen wir noch voraus, daß l so groß sei, daß $\alpha_l < 1$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \iint_{E_2} e^w dx dy = \iint_{E_2} \exp \{h(z) + \int_D g(z, \zeta) d\mu_2(e_\zeta) + \int_E g(z, \zeta) d\mu_2(e_\zeta)\} dx dy \leqq \\ C_{kl} \iint_{E_2} \exp \{h(z) + \int_E g(z, \zeta) d\mu_2(e_\zeta)\} dx dy , \end{aligned} \tag{2.36}$$

wobei $C_{kl} = \exp \{\alpha \cdot \sup\limits_{z \in E_2, \zeta \in D} g(z, \zeta)\}$.

Es existiert ein Punkt $Z \in E$ mit der Eigenschaft, daß für alle $\zeta \in E$

$$\begin{aligned} K(\zeta) &= \iint_{E_2} \exp \{h(z) + \alpha_l g(z, \zeta)\} dx dy \\ &\leqq \iint_{E_2} \exp \{h(z) + \alpha_l g(z, Z)\} dx dy . \end{aligned} \tag{2.37}$$

$K(\zeta)$ ist stetig auf E. Die Existenz von Z ist gesichert, falls wir nun noch zeigen, daß für jede gegen einen Punkt des Einheitskreises konvergierende Folge $\{\zeta_n\}$

$$\lim_{n \to \infty} K(\zeta_n) = \iint_{E_2} e^h dx dy \tag{2.38}$$

ist. Offenbar gilt

$$\liminf_{n \to \infty} K(\zeta_n) \geqq \iint_{E_2} e^h dx dy . \tag{2.39}$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt einen Index $N(\varepsilon)$ derart, daß für alle $n > N$ die Niveaulinie $g(z, \zeta_n) = \varepsilon$ einfach geschlossen und in E_2 enthalten ist. Es bezeichne I deren Innengebiet, A das Komplement von I bezüglich E_2. Für

$n > N$ gelten die Abschätzungen

$$\iint_A \exp\{h(z) + \alpha_l g(z, \zeta_n)\} dx\,dy \leqq e^{\alpha_l \varepsilon} \iint_A e^h dx\,dy \tag{2.40}$$

und

$$\begin{aligned} \iint_I \exp\{h(z) + \alpha_l g(z, \zeta_n)\} dx\,dy &= e^{\alpha_l \varepsilon} \iint_I \exp\{h(z) + \alpha_l g_i(z, \zeta_n)\} dx\,dy \\ &\leqq \frac{2 e^{\alpha_l \varepsilon}}{2 - \alpha_l} \iint_I e^h dx\,dy , \end{aligned} \tag{2.41}$$

wobei g_i die GREENsche Funktion von I bedeutet. (2.40) ist evident. In (2.41) wurde zuerst die Beziehung $g(z, \zeta_n) = \varepsilon + g_i(z, \zeta_n)$ verwendet, dann Ungleichung (2.4). Durch Wahl erst eines genügend kleinen ε, dann eines genügend großen N, können wir erreichen, daß sich die rechte Seite von (2.40) beliebig wenig von $\iint_{E_2} e^h dx\,dy$ unterscheidet, während diejenige von (2.41) gleichzeitig beliebig klein wird. Zusammen mit (2.39) ergibt dies (2.38).

Aus (2.36) und (2.37) folgt unter Anwendung der HÖLDERschen Ungleichung

$$\iint_{E_2} e^w dx\,dy \leqq C_{kl} K(Z) . \tag{2.42}$$

Nun unterscheiden wir drei Fälle je nach der Lage der – fortan mit $L(Z)$ bezeichneten – Niveaulinie

$$g(z, Z) = \log \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} .$$

a) $L(Z)$ *liege ganz in* E_2. Aus (2.32) und (2.42) folgt

$$K(Z) \geqq \frac{1}{C_{kl}} \iint_{E_2} e^w dx\,dy \geqq \frac{1 + \eta}{C_{kl}} \iint_{E_2} e^h dx\,dy . \tag{2.43}$$

Anderseits gilt

$$\begin{aligned} K(Z) &\leqq \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right)^{\alpha_l} \iint_A e^h dx\,dy + \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right)^{\alpha_l} \frac{2}{2 - \alpha_2} \iint_I e^h dx\,dy \\ &\leqq \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right)^{\alpha_l} \frac{2}{2 - \alpha_2} \iint_{E_2} e^h dx\,dy . \end{aligned} \tag{2.44}$$

Dabei bezeichnet I das Innengebiet von $L(Z)$, A das Komplement von I bezüglich E_2. Zum Beweise von (2.44) zerlegt man $K(Z)$ in die beiden Teilintegrale über A und I und wendet auf diese die in (2.40) und (2.41) benützten Abschätzungsmethoden an.

b) $L(Z)$ *liege teilweise in* E_2. Auf Grund der oben erwähnten Eigenschaft der Gebietsfolge $\{\omega_n\}$ schließen wir, daß $L(Z)$ in $E_2 \cup \omega_k$ enthalten ist.

Wir führen die Bezeichnungen

$$G_1 = I \cap \omega_k \quad , \qquad G_2 = I \cap E_2 \, ,$$
$$G_3 = E_2 - G_2 \, , \qquad G = \bigcup_{i=1}^{3} G_i$$

ein. Es ist

$$\iint_G \exp \{h(z) + \alpha_l g(z, Z)\} dx dy \geqq \frac{1+\eta}{C_{kl}} \iint_{E_2} e^h dx dy + \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{\alpha_l} \iint_{G_1} e^h dx dy \, . \tag{2.45}$$

Zum Beweise integriert man zunächst getrennt über E_2 und G_1. Das erste Integral wird wie in (2.43) abgeschätzt. Beim zweiten wird lediglich benützt, daß in G_1 die Ungleichung $g \geqq \log \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ erfüllt ist.

Anderseits gilt

$$\begin{aligned}
&\iint_G \exp \{h(z) + \alpha_l g(z, Z)\} dx dy \leqq \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{\alpha_l} \frac{2}{2-\alpha_l} \iint_{G_1 \cup G_2} e^h dx dy \\
&+ \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{\alpha_l} \iint_{G_3} e^h dx dy \leqq \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{\alpha_l} \frac{2}{2-\alpha_l} \Big[\iint_{E_2} e^h dx dy + \iint_{G_1} e^h dx dy\Big] \\
&\leqq \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{\alpha_l} \left[\frac{2}{2-\alpha_l} \iint_{E_2} e^h dx dy + (1+\alpha_l) \iint_{G_1} e^h dx dy\right] \\
&\leqq \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{\alpha_l} \left(\frac{2}{2-\alpha_l} + \frac{2M\alpha_l}{m}\right) \iint_{E_2} e^h dx dy + \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{\alpha_l} \iint_{G_1} e^h dx dy \, .
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Der Beweis der ersten Ungleichung ist ganz analog zu demjenigen von (2.44). Der zweite Schritt ist klar. Beim dritten wurde davon Gebrauch gemacht, daß $\alpha_l < 1$. Schließlich wurde noch die unmittelbar aus (2.35) fließende Ungleichung

$$\iint_{G_1} e^h dx dy \leqq \frac{2M}{m} \iint_{E_2} e^h dx dy$$

verwendet.

c) *$L(Z)$ liege außerhalb E_2.* Die Ungleichung (2.43) ist offenbar auch in diesem Falle gültig. Anderseits ist

$$K(Z) \leqq \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{\alpha_l} \iint_{E_2} e^h dx dy \, . \tag{2.47}$$

Nun wählen wir l groß genug, so daß

$$\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{\alpha_l} \left(\frac{2}{2-\alpha_l} + \frac{2M\alpha_l}{m}\right) < (1+\eta)^{\frac{1}{3}} \, . \tag{2.48}$$

Anschließend verfügen wir über k derart, daß

$$C_{kl} < (1+\eta)^{\frac{1}{3}} \tag{2.49}$$

ist. Aus (2.48) und (2.49) folgt, daß – je nach dem Fall, in dem man sich befindet – (2.43) und (2.44), (2.45) und (2.46) oder (2.43) und (2.47) einander widersprechen. Damit ist (2.30) bewiesen. Lemma 3 folgt aus (2.27) bis (2.31).

3. Beweis von Satz A

Wir zeigen vorerst, daß die durch den Satz von RESCHETNJAK eingeführten Parameterbereiche eine RIEMANNsche Fläche R definieren. Sei D ein Gebiet auf M, dem zwei solche Bereiche G (in einer z-Ebene, Metrik $e^{u(z)}|dz|$) und G^* (in einer w-Ebene, Metrik $e^{u^*(w)}|dw|$) zugeordnet sind. Es entsprechen ihnen die Abbildungen $\Phi(D \to G)$ und $\Phi^*(D \to G^*)$. Wir beweisen: $w = f(z) = \Phi^*(\Phi^{-1}(z))$ ist entweder konform oder antikonform. Ist M orientierbar, so kann eine Klasse von konform zusammenhängenden Parameterbereichen ausgezeichnet werden. Diese definiert R [10, S. 53].

Lemma 4. *Zu vorgegebenen* $z_0 \in G$ $(-\frac{1}{4} < \mu(z_0) = \alpha < \frac{1}{4})$ *und* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $\Delta(z_0, \varepsilon)$ *mit folgender Eigenschaft: Ist* $\delta < \Delta$ *und liegen die Punkte* z' *und* z'' *in* $|z - z_0| < \delta$, *so gilt*

$$|\varrho_\alpha(z', z'') - \Lambda(z_0, \delta)\varrho(z', z'')| < \varepsilon\delta^{1+\alpha}. \tag{3.1}$$

Dabei bezeichnet ϱ_α *die Distanz bezüglich der Metrik* $|z - z_0|^\alpha |dz|$. Λ *ist eine positive Zahl.*

Beweis. In den Gebieten

$$G_t = \cup[z \mid (z_0 + t(z - z_0)) \in G]$$

definieren wir die Metriken

$$\varrho_t(z_1, z_2) = \inf_L \int_L \exp\{u(z_0 + t(z - z_0))\}\,|dz| \qquad (t > 0).$$

Dabei variiere L über alle von z_1 nach z_2 führenden Polygone in G_t.

Wir beweisen vorerst: Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\Delta(\varepsilon) > 0$ derart, daß für $0 < t < \Delta$ die Ungleichung

$$|\varrho_\alpha(z_1, z_2) - \lambda(z_0, t)\varrho_t(z_1, z_2)| < \varepsilon \tag{3.2}$$

für jedes Punktepaar z_1, z_2 in $|z - z_0| < 1$ erfüllt ist. Dabei bedeutet λ eine positive Zahl.

Es bezeichne μ_t die der Funktion $u(z_0 + t(z - z_0))$ zugeordnete Massenverteilung. Wir definieren

$$\begin{aligned} \mu_{ti}(e_\zeta) \quad &= \mu_t(e_\zeta \cap [|\zeta - z_0| < 5]), \\ \mu_{ta}(e_\zeta) \quad &= \mu_t(e_\zeta \cap [|\zeta - z_0| \geqq 5]), \\ \varrho_{ti}(z_1, z_2) &= \inf_L \int_L \exp\{\int \log|z - \zeta|\, d\mu_{ti}(e_\zeta)\}\, |dz|, \end{aligned}$$

wobei L sämtliche z_1 mit z_2 verbindenden Polygone durchlaufen soll.

RESCHETNJAK hat folgendes Resultat bewiesen (Lemma 2 in [13]): *Seien $\mu_1(e), \mu_2(e), \mu_3(e), \ldots$ in der ganzen Ebene definierte, vollständig additive Mengenfunktionen, welche außerhalb eines festen, beschränkten Bereiches identisch verschwinden. Es konvergiere $\{\mu_n(e)\}$ schwach gegen $\mu_0(e)$, die Folge der Variationen $\{\mu_n^+(e) + \mu_n^-(e)\}$ schwach gegen $\nu(e)$. Es bezeichne*

$$u_n(z) = \int \log|z - \zeta|\, d\mu_n(e_\zeta) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

und es werde ϱ_n wie in Formel (1.2) definiert, wobei nun aber L über sämtliche z_1 mit z_2 verbindenden Polygone variiere. Dann streben die Metriken ϱ_n mit wachsendem n gleichmäßig gegen ϱ_0 auf jeder kompakten Menge F, welche keine Punkte ζ mit $\nu(\zeta) \geqq 1$ enthält.

Da μ_{ti} für jede Nullfolge von t-Werten schwach gegen die in z_0 liegende Einzelmasse α konvergiert, existiert somit eine Zahl $\Delta_1(\varepsilon) > 0$ derart, daß

$$|\varrho_{ti}(z_1, z_2) - \varrho_\alpha(z_1, z_2)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.3}$$

für $0 < t < \Delta_1$ und alle Punktepaare z_1, z_2 in $|z - z_0| \leqq 4$.

Zu vorgegebenem $\eta > 0$ – über welches wir später verfügen werden – gibt es ein $\Delta_2(\eta) > 0$ derart, daß für $0 < t < \Delta_2$ Folgendes gilt:

1. $[|z - z_0| \leqq 4] \subset G_t$; 2. die Ungleichung

$$\begin{aligned} |\,(h(z_0 + t(z - z_0)) + \int \log|z - \zeta|\, d\mu_{ta}(e_\zeta)) \\ - (h(z_0) + \int \log|\zeta|\, d\mu_{ta}(e_\zeta))\,| < \eta \end{aligned} \tag{3.4}$$

ist für $|z - z_0| \leqq 4$ erfüllt. Letzteres folgt unmittelbar daraus, daß – wie man leicht nachprüft –

$$\lim_{t \to 0} \max_{|z - z_0| \leqq 4} |\operatorname{grad}_z (h(z_0 + t(z - z_0)) + \int \log|z - \zeta|\, d\mu_{ta}(e_\zeta))| = 0$$

ist. Wir führen die Abkürzung ein

$$\lambda(z_0, t) = \exp\{-h(z_0) - \int \log|\zeta|\, d\mu_{ta}(e_\zeta)\}. \tag{3.5}$$

Seien z_1 und z_2 beliebige Punkte in $|z - z_0| < 1$, L' deren geradlinige Verbindungsstrecke, L'' irgendein von z_1 nach z_2 führendes Polygon, das nicht ganz in $|z - z_0| \leqq 4$ liegt. Aus (3.3), (3.4) und (3.5) folgt für $0 < t < \min[\Delta_1, \Delta_2]$

$$\begin{aligned}&\int\limits_{L''} \exp\{u(z_0 + t(z - z_0))\}\,|dz| \\ &\qquad \geqq \frac{2e^{-\eta}}{\lambda(z_0, t)}\left(\int\limits_1^4 x^{-\frac{1}{4}}dx - \frac{\varepsilon}{2}\right) \geqq \frac{2e^{-\eta}}{\lambda(z_0, t)}\left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Es bezeichne $\beta(t)$ die negative Totalmasse der Verteilung μ_{ti} unter Ausschluß der (eventuell negativen) konzentrierten Masse α in z_0. Es ist $\lim\limits_{t \to 0} \beta(t) = 0$. Für $0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{4}$ folgt aus (3.4) und (3.5) unter Anwendung der HÖLDERschen Ungleichung, daß

$$\int\limits_{L'} \exp\{u(z_0 + t(z - z_0))\}\,|dz| \leqq \frac{2e^{\eta}}{\lambda(z_0, t)} \int\limits_0^1 x^{-\beta}dx = \frac{2e^{\eta}}{(1 - \beta)\lambda(z_0, t)}. \tag{3.7}$$

Für $-\frac{1}{4} \leqq \alpha \leqq 0$ ergibt dieselbe Schlußweise

$$\int\limits_{L'} \exp\{u(z_0 + t(z - z_0))\}\,|dz| \leqq \frac{2e^{\eta}}{\lambda(z_0, t)} \int\limits_0^1 x^{\alpha-\beta}dx \leqq \frac{2e^{\eta}}{(\frac{3}{4} - \beta)\lambda(z_0, t)}. \tag{3.8}$$

Für $\varepsilon < 0{,}1$[4]) folgt aus (3.6), (3.7) und (3.8): Sei Δ_3 so klein, daß $\beta(\Delta_3) < 0{,}1$. Ist $0 < \eta < 0{,}1$ und $0 < t < \min[\Delta_1(\varepsilon), \Delta_2(\eta), \Delta_3]$, so ist für jede Wahl von z_1, z_2 und L'' das Integral längs L'' stets größer als dasjenige längs L'. Dann dürfen in der Definition von $\varrho_t(z_1, z_2)$ diejenigen Polygone L von der Konkurrenz ausgeschlossen werden, welche nicht ganz in $|z - z_0| \leqq 4$ liegen. Also ist

$$\begin{aligned}&\varrho_{ti}\cdot\exp\{\min_{|z-z_0|\leqq 4}[h(z_0 + t(z - z_0)) + \int \log|z - \zeta|\,d\mu_{ta}(e_\zeta)]\} \\ &\leqq \varrho_t \leqq \varrho_{ti}\cdot\exp\{\max_{|z-z_0|\leqq 4}[h(z_0 + t(z - z_0)) + \int \log|z - \zeta|\,d\mu_{ta}(e_\zeta)]\},\end{aligned}$$

woraus sich mit (3.4) und (3.5)

$$\varrho_{ti}e^{-\eta} \leqq \lambda(z_0, t)\varrho_t \leqq \varrho_{ti}e^{\eta}$$

ergibt. Nun wählen wir η $(0 < \eta < 0{,}1)$ so klein, daß

$$|\varrho_{ti}(z_1, z_2) - \lambda(z_0, t)\varrho_t(z_1, z_2)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.9}$$

für $0 < t < \Delta = \min[\Delta_1(\varepsilon), \Delta_2(\eta), \Delta_3]$ und beliebige z_1, z_2 in $|z - z_0| < 1$ ist. (3.2) folgt nun aus (3.3) und (3.9).

---

[4]) Wir nehmen an, daß das vorgegebene ε diese Bedingung erfülle.

Setzt man $z_1 = z_0 + \dfrac{z' - z_0}{t}$ und $z_2 = z_0 + \dfrac{z'' - z_0}{t}$, so ist

$$\varrho(z_1, z_2) = \frac{1}{t}\varrho(z', z'') \tag{3.10}$$

und

$$\varrho_\alpha(z_1, z_2) = \frac{1}{t^{1+\alpha}}\varrho_\alpha(z', z'') . \tag{3.11}$$

Aus (3.2), (3.10) und (3.11) folgt für $0 < t < \varDelta$ und z_1, z_2 in $|z - z_0| < 1$ (das heißt z', z'' in $|z - z_0| < t$), daß

$$|\varrho_\alpha(z', z'') - t^\alpha \lambda(z_0, t)\varrho(z', z'')| < \varepsilon t^{1+\alpha} .$$

Damit ist Lemma 4 bewiesen.

Lemma 5. *Zu vorgegebenen $z_0 \in G$ $(-\frac{1}{4} < \mu(z_0) = \alpha < \frac{1}{4})$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\varDelta(z_0, \varepsilon) > 0$ mit folgender Eigenschaft: Ist $\delta < \varDelta$ und liegen die Punkte z' und z'' in $|z - z_0| < \delta$, so ist*

$$|\varrho_\alpha(z', z'') - K(z_0, \delta)\varrho_\alpha^*(f(z'), f(z''))| < \varepsilon\delta^{1+\alpha} . \tag{3.12}$$

Dabei bezeichnen ϱ_α und ϱ_α^* die Distanzen bezüglich der Metriken $|z - z_0|^\alpha |dz|$ und $|w - f(z_0)|^\alpha |dw|$. K ist eine positive Zahl.

Beweis. Wir definieren

$$\varphi(\delta) = \max_{|z-z_0|=\delta} |f(z) - f(z_0)|$$

und

$$\psi(\delta) = \min_{|z-z_0|=\delta} |f(z) - f(z_0)| .$$

Sei z_1 ein Punkt auf $|z - z_0| = \delta$ derart, daß $|f(z_1) - f(z_0)| = \varphi(\delta)$ ist. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Lemma 4 gilt für genügend kleine Werte von δ

$$\left|\frac{\delta^{1+\alpha}}{1+\alpha} - \varLambda(z_0, \delta)\varrho(z_0, z_1)\right| < \varepsilon\delta^{1+\alpha} . \tag{3.13}$$

Lemma 4 darf auch auf $\varPhi^*$ angewandt werden, und da $\varphi(\delta)$ mit δ gegen 0 strebt, ist für genügend kleine δ

$$\left|\frac{[\varphi(\delta)]^{1+\alpha}}{1+\alpha} - \varLambda^*(w_0, \varphi(\delta))\varrho(w_0, w_1)\right| < \varepsilon[\varphi(\delta)]^{1+\alpha} , \tag{3.14}$$

wobei $w_0 = f(z_0)$, $w_1 = f(z_1)$. Aus (3.13) und (3.14) folgt

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\varrho(z_0, z_1)\varLambda(z_0, \delta)}{\delta^{1+\alpha}} = \lim_{\delta\to 0}\frac{\varrho(w_0, w_1)\varLambda^*(w_0, \varphi(\delta))}{[\varphi(\delta)]^{1+\alpha}} = \frac{1}{1+\alpha}$$

und, da $\varrho(z_0, z_1) = \varrho(w_0, w_1)$,

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\Lambda(z_0, \delta)\,[\varphi(\delta)]^{1+\alpha}}{\Lambda^*(w_0, \varphi(\delta))\,\delta^{1+\alpha}} = 1\,. \tag{3.15}$$

Setzt man

$$K(z_0, \delta) = \frac{\Lambda(z_0, \delta)}{\Lambda^*(w_0, \varphi(\delta))}\,,$$

so gilt für genügend kleine Werte von δ und jedes Punktepaar z', z'' in $|z - z_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |\varrho_\alpha(z', z'') - K(z_0, \delta)\,\varrho_\alpha^*(w', w'')| &\leqq |\varrho_\alpha(z', z'') - \Lambda(z_0, \delta)\,\varrho(z', z'')| \\ &+ \frac{\Lambda(z_0, \delta)}{\Lambda^*(w_0, \varphi(\delta))}\,|\varrho_\alpha^*(w', w'') - \Lambda^*(w_0, \varphi(\delta))\,\varrho(w', w'')|\,, \end{aligned} \tag{3.16}$$

wobei $w' = f(z')$ und $w'' = f(z'')$, somit $\varrho(z', z'') = \varrho(w', w'')$. Für genügend kleine δ ist der erste Summand auf der rechten Seite von (3.16) nach Lemma 4 $< \frac{\varepsilon}{3}\,\delta^{1+\alpha}$, der linke Faktor des zweiten Summanden wegen (3.15) $< 2\,\delta^{1+\alpha}/[\varphi(\delta)]^{1+\alpha}$, der rechte Faktor des zweiten Summanden nach Lemma 4 $< \frac{\varepsilon}{3}\,[\varphi(\delta)]^{1+\alpha}$, somit der ganze Ausdruck $< \varepsilon\,\delta^{1+\alpha}$. Q.E.D.

Lemma 6. *Es existiert eine nach unten halbstetige*[5]*, lokal quadratisch summierbare Funktion $H(z)$ mit folgender Eigenschaft: Jedem Punkt*

$$z_0 \in G\left(-\tfrac{1}{4} < \mu(z_0) = \alpha < \tfrac{1}{4}\right)$$

kann eine Zahl $\Delta(z_0) > 0$ derart zugeordnet werden, daß aus $|\zeta - z_0| < \Delta(z_0)$ stets

$$\left|\frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0}\right| \leqq \min_{|z - z_0| \leqq |\zeta - z_0|} H(z) \tag{3.17}$$

folgt.

Beweis. Mit $z' = z_0$ und $z'' = z_1$[6] lautet (3.12)

$$\left|\frac{\delta^{1+\alpha}}{1+\alpha} - K(z_0, \delta)\,\frac{[\varphi(\delta)]^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right| < \varepsilon\,\delta^{1+\alpha}\,. \tag{3.18}$$

Sei z_2 ein Punkt auf $|z - z_0| = \delta$ derart, daß $|f(z_2) - f(z_0)| = \psi(\delta)$ ist. Mit $z' = z_0$ und $z'' = z_2$ wird (3.12) zu

$$\left|\frac{\delta^{1+\alpha}}{1+\alpha} - K(z_0, \delta)\,\frac{[\psi(\delta)]^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right| < \varepsilon\,\delta^{1+\alpha}\,. \tag{3.19}$$

---

[5]) Der Funktionswert $H = +\infty$ wird zugelassen.

[6]) Bezeichnungen des vorhergehenden Beweises.

Aus (3.18) und (3.19) folgt

$$\lim_{\delta \to 0} K(z_0, \delta) \left(\frac{\varphi(\delta)}{\delta}\right)^{1+\alpha} = \lim_{\delta \to 0} K(z_0, \delta) \left(\frac{\psi(\delta)}{\delta}\right)^{1+\alpha} = 1 .$$

Somit

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\varphi(\delta)}{\psi(\delta)} = 1 . \tag{3.20}$$

Das dem Parameterbereich $|w - w_0| \leqq \psi(\delta)$ entsprechende Stück von M ist enthalten in demjenigen, das $|z - z_0| \leqq \delta$ entspricht. Ein Flächenvergleich liefert [7])

$$\iint\limits_{|w - w_0| \leqq \psi(\delta)} e^{2u^*(w)} d\xi d\eta \leqq \iint\limits_{|z - z_0| \leqq \delta} e^{2u(z)} dx dy \qquad (w = \xi + i\eta). \tag{3.21}$$

Aus (3.20) und (3.21) schließen wir, daß (3.22)

$$\limsup_{\delta \to 0} \left(\frac{\varphi(\delta)}{\delta}\right)^2 = \limsup_{\delta \to 0} \left(\frac{\psi(\delta)}{\delta}\right)^2 \leqq \limsup_{\delta \to 0} \frac{\dfrac{1}{\pi \delta^2} \displaystyle\iint\limits_{|z - z_0| \leqq \delta} e^{2u} dx dy}{\dfrac{1}{\pi [\psi(\delta)]^2} \displaystyle\iint\limits_{|w - w_0| \leqq \psi(\delta)} e^{2u^*} d\xi d\eta} .$$

Wir machen die (lokal stets zulässige) Annahme, daß die in den Darstellungen $u = u_1 - u_2$ und $u^* = u_1^* - u_2^*$ auftretenden subharmonischen Funktionen nicht positiv seien. Wir betrachten eine in einer Umgebung U von z_0 gültige RIESZsche Zerlegung [14]

$$u_2(z) = h_2(z) + \int \log |z - \zeta| \, d\mu_2(e_\zeta) \tag{3.23}$$

und definieren $\mu_{2i}(e_\zeta) = \mu_2(e_\zeta \cap [|\zeta - z_0| < 3\delta])$ und

$$\mu_{2a}(e_\zeta) = \mu_2(e_\zeta \cap [|\zeta - z_0| \geqq 3\delta]) .$$

Es sei U so klein gewählt, daß die Gesamtmasse der Belegung μ_2 kleiner als $\frac{1}{2}$ ist; ferner sei δ so klein, daß $[|z - z_0| \leqq \delta] \subset U$,

$$\beta = \mu_2(|\zeta - z_0| < 3\delta) < \tfrac{1}{4}$$

und

$$\max_{|z - z_0| \leqq \delta} h_2(z) - \min_{|z - z_0| \leqq \delta} h_2(z) < \frac{\log 2}{2}$$

ist. Es bezeichne a einen Punkt auf $|z - z_0| = \delta$, in dem u_2 sein Maximum bezüglich $|z - z_0| \leqq \delta$ annimmt. Aus (3.23) folgt

$$u_2(a) \leqq h_2(a) + \int \log |a - \zeta| \, d\mu_{2a}(e_\zeta) + \beta \log (4\delta) . \tag{3.24}$$

[7]) Bei genügend regulären Metriken ist es klar, daß diese Integrale den Flächeninhalt darstellen; durch Approximation geht man auf allgemeine Metriken über.

Aus $|\zeta - z_0| \geqq 3\delta$, $|a - z_0| = \delta$ und $|z - z_0| \leqq \delta$ folgt $|a - \zeta| \leqq 2|z - \zeta|$. Daraus und aus obigen Annahmen schließen wir von (3.23) auf

$$\begin{aligned} \iint\limits_{|z-z_0|\leqq\delta} e^{2u} dx\,dy &\leqq \iint\limits_{|z-z_0|\leqq\delta} e^{-2u_2} dx\,dy \\ &\leqq 4 \exp\{-2h_2(a) - 2\int \log|a - \zeta|\, d\mu_{2a}(e_\zeta)\} \cdot \\ &\iint\limits_{|z-z_0|\leqq\delta} \exp\{-2\int \log|z - \zeta|\, d\mu_{2i}(e_\zeta)\} dx\,dy \end{aligned} \tag{3.25}$$

Mit Hilfe der HÖLDERschen Ungleichung zeigt man, daß das letzte Integral dann seinen größten Wert annimmt, wenn die Masse β in z_0 konzentriert ist; er beträgt $\dfrac{\pi\delta^{2-2\beta}}{1-\beta}$. Wir erhalten damit aus (3.24) und (3.25)

$$\frac{1}{\pi\delta^2} \iint\limits_{|z-z_0|\leqq\delta} e^{2u} dx\,dy \leqq 10 e^{-2u_2(a)}. \tag{3.26}$$

Sei b ein Punkt auf $|w - w_0| = \varphi(\delta)$, in dem $u_1^*(w)$ sein Maximum bezüglich $|w - w_0| \leqq \varphi(\delta)$ annimmt. Wir wiederholen die obige Überlegung in der w-Ebene, wobei wir $u_2(z)$ durch $u_1^*(w)$ und in den vor Formel (3.25) stehenden Betrachtungen δ durch $\varphi(\delta)$ ersetzen. In der (3.25) entsprechenden Beziehung integrieren wir hingegen nur über $|w - w_0| \leqq \psi(\delta)$. Unter Benützung von (3.20) erhalten wir für genügend kleine δ die Abschätzung

$$\frac{1}{\pi[\psi(\delta)]^2} \iint\limits_{|w-w_0|\leqq\psi(\delta)} e^{-2u_1^*(w)} d\xi\,d\eta \leqq 10 e^{-2u_1^*(b)}.$$

Mit Anwendung der SCHWARZschen Ungleichung

$$(\pi[\psi(\delta)]^2)^2 \leqq \iint\limits_{|w-w_0|\leqq\psi(\delta)} e^{2u_1^*} d\xi\,d\eta \iint\limits_{|w-w_0|\leqq\psi(\delta)} e^{-2u_1^*} d\xi\,d\eta$$

folgt daraus

$$\frac{1}{\pi[\psi(\delta)]^2} \iint\limits_{|w-w_0|\leqq\psi(\delta)} e^{2u^*} d\xi\,d\eta \geqq \frac{1}{\pi[\psi(\delta)]^2} \iint\limits_{|w-w_0|\leqq\psi(\delta)} e^{2u_1^*} d\xi\,d\eta \geqq \frac{1}{10} e^{2u_1^*(b)}. \tag{3.27}$$

Definiert man

$$H(z) = 1 + 10 \exp\{-u_2(z) - u_1^*(f(z))\}, \tag{3.28}$$

so folgt aus (3.22), (3.26), (3.27) und (3.28), daß (3.17) für ein genügend kleines $\Delta(z_0) > 0$ erfüllt ist. H ist nach unten halbstetig.

Sei K eine abgeschlossene Kreisscheibe vom Mittelpunkt z_0 derart, daß $\mu_1(K) + \mu_2(K) < 1$. $u_1(z)$, $u_2(z)$, $u_1^*(w)$ und $u_2^*(w)$ sind Grenzfunktionen monoton fallender Folgen von stetigen Funktionen: $\{u_{1n}\} \downarrow u_1$ und $\{u_{2n}\} \downarrow u_2$ auf K; $\{u_{1k}^*\} \downarrow u_1^*$ und $\{u_{2k}^*\} \downarrow u_2^*$ auf $f(K)$. Durch Anwendung der SCHWARZschen Ungleichung erhält man

$$\Big(\iint_K \exp\{-2u_{2n}(z) - 2u^*_{1k}(f(z))\}dxdy\Big)^2$$
$$\leqq \iint_K \exp\{-2u_{1n}(z) - 2u_{2n}(z)\}dxdy$$
$$\cdot \iint_K \exp\{2u_{1n}(z) - 2u_{2n}(z)\}\cdot\exp\{-4u^*_{1k}(f(z))\}dxdy\,.$$

Läßt man nun $n \to \infty$ streben und berücksichtigt, daß für jede Borelmenge $e \subset K$

$$\iint_e e^{2u}dxdy = \iint_{f(e)} e^{2u^*}d\xi d\eta$$

ist – beide Integrale stellen denselben Flächeninhalt dar –, so folgt

$$\Big(\iint_K \exp\{-2u_2(z) - 2u^*_{1k}(f(z))\}dxdy\Big)^2$$
$$\leqq \iint_K e^{-2u_1-2u_2}dxdy\cdot\iint_{f(K)} \exp\{2u^*_1(w) - 2u^*_2(w) - 4u^*_{1k}(w)\}d\xi d\eta\,.$$

Also, mit $k \to \infty$,

$$\Big(\iint_K \exp\{-2u_2(z) - 2u^*_1(f(z))\}dxdy\Big)^2$$
$$\leqq \iint_K e^{-2u_1-2u_2}dxdy\cdot\iint_{f(K)} e^{-2u^*_1-2u^*_2}\,d\xi d\eta\,.$$

Nach Lemma 1 in [8] ist $\int_{\text{Rand } K} e^{-u_1-u_2}\,|dz| < \infty$.

Bezeichnet I einen abgeschlossenen, stückweise analytisch berandeten Bereich derart, daß $K \subset I$ und $\mu_1(I) + \mu_2(I) < 1$ ist, so gilt ebenso $\int_{\text{Rand } I} e^{-u^*_1-u^*_2}\,|dw| < \infty$. Aus (2.2) in [6] folgt, daß die rechte Seite der letzten Ungleichung endlich ist. Somit ist H^2 summierbar. Q.E.D.

Lemma 7. *Auf jedem Rechteck* $R[a_1 \leqq x \leqq a_2,\ b_1 \leqq y \leqq b_2]$, *das keine Einzelmassen vom Betrag* $\geqq \frac{1}{4}$ *enthält, besitzt* $w = f(z) = \xi(x,y) + i\eta(x,y)$ *folgende Eigenschaften:*

(A) *f ist absolut stetig im Sinne von* TONELLI,

(B) *die (gemäß (A)) fast überall auf R existierenden und meßbaren partiellen Ableitungen f_x und f_y sind quadratisch summierbar,*

(C) *entweder gilt $\xi_x = \eta_y$ und $\xi_y = -\eta_x$ fast überall auf R, oder es ist $\xi_x = -\eta_y$ und $\xi_y = \eta_x$ fast überall auf R.*

Beweis. Sei $\alpha_1 < x < \beta_1, \alpha_2 < x < \beta_2, \ldots$ ein System zueinander fremder Teilintervalle von $[a_1, a_2]$. Aus Lemma 6 schließen wir, daß

$$\sum_k | f(\beta_k, y) - f(\alpha_k, y) | \leqq \sum_k \int_{\alpha_k}^{\beta_k} H(x, y) dx . \tag{3.29}$$

Daraus folgt für die totale Variation von f als einer Funktion von x im Intervall $[a_1, a_2]$

$$V_x(y, f, [a_1, a_2]) \leqq \int_{a_1}^{a_2} H(x, y) dx . \tag{3.30}$$

Da H auf R summierbar ist, folgt aus dem Satz von FUBINI, daß $\int_{a_1}^{a_2} H(x,y) dx$ für fast alle y aus $[b_1, b_2]$ existiert und eine summierbare Funktion von y darstellt. Damit führen (3.29) und (3.30) zu folgenden Aussagen: (1) f ist absolut stetig als Funktion von x auf $[a_1, a_2]$ für fast alle y aus $[b_1, b_2]$; (2) V_x ist eine summierbare[8]) Funktion von y auf $[b_1, b_2]$.

Entsprechende Aussagen gelten, wenn x mit y vertauscht wird. f ist stetig auf R. Damit ist (A) bewiesen.

Aus Lemma 6 schließen wir ferner, daß $|\xi_x|^2, |\eta_x|^2, |\xi_y|^2$ und $|\eta_y|^2$ (soweit sie existieren) nicht größer als H^2 sind. Daraus folgt (B).

Sei f zum Beispiel orientierungstreu. Wir betrachten einen Punkt z_0, in dem $\xi_x, \eta_x, \xi_y, \eta_y$ existieren und $\mu(z_0) = \alpha = 0$ ist; fast überall auf R ist dies erfüllt. Aus

$$\psi(h) \leqq | f(z_0 + h) - f(z_0) | , | f(z_0 + ih) - f(z_0) | \leqq \varphi(h) \qquad (h > 0)$$

folgt

$$\limsup_{h \to 0} \left(\frac{\psi(h)}{h}\right)^2 \leqq \xi_x^2 + \eta_x^2, \xi_y^2 + \eta_y^2 \leqq \liminf_{h \to 0} \left(\frac{\varphi(h)}{h}\right)^2 . \tag{3.31}$$

Aus (3.20) und (3.31) erhält man

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{\psi(h)}{h}\right)^2 = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\varphi(h)}{h}\right)^2 = \xi_x^2 + \eta_x^2 = \xi_y^2 + \eta_y^2 . \tag{3.32}$$

Ist $\xi_x = \eta_x = \xi_y = \eta_y = 0$, so sind die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen trivialerweise erfüllt. Andernfalls ist der Grenzwert (3.32) – von nun an mit σ^2 bezeichnet – positiv und es gilt wegen (3.15)

$$\lim_{h \to 0} K(z_0, h) = \frac{1}{\sigma} . \tag{3.33}$$

Sei $f(z_0) = w_0$, $f(z_0 + h) = w_0 + re^{i\varphi}$, $f(z_0 + ih) = w_0 + \varrho e^{i\vartheta}$. Aus (3.32) folgt

$$\lim_{h \to 0} \frac{r}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\varrho}{h} = \sigma . \tag{3.34}$$

---

[8]) Die Meßbarkeit von Vx folgt aus der Stetigkeit von f [12, Seite 426].

Mit $z' = z_0 + h$ und $z'' = z_0 + ih$ ergeben Lemma 5 und (3.33)

$$\sqrt{2}h - \left(\frac{1}{\sigma} + o(1)\right) \cdot \sqrt{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho\cos(\vartheta - \varphi)} = o(h) . \qquad (3.35)$$

Aus (3.34) und (3.35) schließt man unter Benützung der Orientierungstreue, daß

$$\lim_{h\to 0} (\vartheta - \varphi) = \frac{\pi}{2}, \qquad (3.36)$$

und aus (3.34) und (3.36)

$$\xi_x = \lim_{h\to 0} \frac{\xi(z_0 + h) - \xi(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{r\cos\varphi}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\varrho\sin\vartheta}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\eta(z_0 + ih) - \eta(z_0)}{h} = \eta_y .$$

Analog beweist man $\xi_y = -\eta_x$. Ist f nicht orientierungstreu, so kann man zum Beispiel obige Betrachtung auf $\bar{f} = \xi - i\eta$ anwenden. In jedem Fall ist (C) erfüllt.

Aus Lemma 7 folgt nach einem Resultat von C. B. MORREY [9, S. 141, Lemma 4], daß – abgesehen von einer aus isolierten Punkten bestehenden Ausnahmemenge – entweder f oder $\bar{f}$ konform ist. Da f topologisch ist, sind isolierte Singularitäten hebbar: G wird durch f konform oder antikonform auf G^* abgebildet.

Wir beweisen ferner, daß der Wert von ϱ unverändert bleibt, falls L in (1.2) über alle stückweise analytischen Verbindungskurven in G – statt nur über die Polygone – variiert. Würde dies nicht zutreffen, so gäbe es ein Punktepaar $z_1, z_2 \in G$ und eine stückweise analytische Verbindungskurve γ derart, daß

$$\int_\gamma e^u \,|\, dz \,| < \varrho(z_1, z_2) . \qquad (3.37)$$

Seien $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ JORDANkurven (Innengebiete G_1, G_2, G_3) derart, daß $\gamma \subset G_1$, $(G_1 \cup \Gamma_1) \subset G_2$, $(G_2 \cup \Gamma_2) \subset G_3$ und $(G_3 \cup \Gamma_3) \subset G$. Sei $u = u_1 - u_2$ eine Darstellung von u als Differenz von subharmonischen Funktionen. Es bezeichne u_1' diejenige in G_3 subharmonische Funktion, welche auf $G_1 \cup \Gamma_1$ mit u_1 und in $G_3 - (G_1 \cup \Gamma_1)$ mit der besten harmonischen Majorante $\tilde{h}_1$ von u_1 in diesem Gebiet übereinstimmt. Sei v_{1n} die nach dreimaliger Mittelung über eine Kreisscheibe vom Radius $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ aus u_1' entstehende Funktion. Analog werde v_{2n} definiert. $v_n = v_{1n} - v_{2n}$ ist definiert und zweimal stetig differenzierbar in einem Gebiete Ω_n, welches für $n \to \infty$

gegen G_3 strebt. Da $v_{1n} \downarrow u_1$ und $v_{2n} \downarrow u_2$ in G_1, gibt es Zahlen C und D derart, daß in G_1

$$Ce^{u_1} \leqq e^{v_n} \leqq De^{-u_2} \quad (n - 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{3.38}$$

Wir dürfen annehmen, daß sich auf γ kein Punkt ζ mit $\mu_1(\zeta) + \mu_2(\zeta) \geqq 1$ befindet; denn γ enthält jedenfalls einen Teilbogen, auf dem diese Voraussetzung erfüllt ist und für den (3.37) immer noch gilt. Dann ist nach dem LEBESGUEschen Grenzwertsatz

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma e^{v_n} \,|\, dz \,| = \int_\gamma e^u \,|\, dz \,|\,, \tag{3.39}$$

denn De^{-u_2} ist längs γ summierbar (Lemma 1 in [8]).

Für genügend große Werte von n ist v_n auf $G_3 - G_2$ harmonisch. Dann gelten in G_2 die RIESZschen Darstellungen

$$\left.\begin{aligned} u_k'(z) &= h_k'(z) + \int \log |\, z - \zeta \,|\, d\mu_k'(e_\zeta)\,, \\ v_{kn}(z) &= h_{kn}(z) + \int \log |\, z - \zeta \,|\, d\nu_{kn}(e_\zeta)\,, \\ u_k'(z) &= h_k^*(z) - \int g(z, \zeta) d\mu_k'(e_\zeta)\,, \\ v_{kn}(z) &= h_k^*(z) - \int g(z, \zeta) d\nu_{kn}(e_\zeta)\,, \end{aligned}\right\} \tag{3.40}$$

wobei g die GREENsche Funktion des Gebietes G_2 und h_k^* die Lösung des DIRICHLETschen Problems für G_2 mit den Randwerten $\tilde{h}_k$ auf Γ_2 bezeichnen $(k = 1, 2)$. Mit den Abkürzungen $h' = h_1' - h_2'$, $\mu' = \mu_1' - \mu_2'$, $h_n = h_{1n} - h_{2n}$, $\nu_n = \nu_{1n} - \nu_{2n}$ gilt:

(A) $\{\nu_n(e)\}$ *konvergiert schwach gegen* $\mu'(e)$;

(B) $\{h_n(z)\}$ *konvergiert in* G_1 *gleichmäßig gegen* $h'(z)$.

(A) ist bekannt (F. RIESZ [14]). Aus (3.40) folgt

$$|\, h_n(z) - h'(z) \,| \leqq |\int \varphi(z, \zeta) d\mu'(e_\zeta) - \int \varphi(z, \zeta) d\nu_n(e_\zeta) \,|\,, \tag{3.41}$$

wobei $\varphi(z, \zeta) = g(z, \zeta) + \log |\, z - \zeta \,|$. Wird z als Parameter – der in G_1 variieren darf – aufgefaßt, so ist die Funktionenschar $\varphi(z, \zeta)$ auf jedem kompakten Teilbereich von G_2 gleichgradig stetig bezüglich ζ. (Dies folgt aus der HARNACKschen Ungleichung, da die Funktionen φ gleichmäßig beschränkt sind.) Unter Benützung von (A) schließen wir, daß die rechte Seite von (3.41) für $n \to \infty$ gleichmäßig in z gegen 0 strebt.

Wir definieren

$$\varrho_n(z_1, z_2) = \inf_L \int_L e^{v_n} \,|\, dz \,|\,,$$

wobei alle z_1 mit z_2 verbindenden Polygone L in Ω_n zugelassen werden. Ferner sei

$$\begin{aligned} w(z) &= \int \log |z-\zeta|\, d\mu'(e_\zeta)\,, \\ w_n(z) &= \int \log |z-\zeta|\, d\nu_n(e_\zeta)\,, \\ r(z',z'') &= \inf_L \int_L e^{w}\,|dz|\,, \\ r_n(z',z'') &= \inf_L \int_L e^{w_n}\,|dz|\,, \end{aligned}$$

wobei nun L die Menge aller von z' nach z'' führenden Polygone der Ebene durchlaufe. Aus (A) und dem oben erwähnten Lemma von RESCHETNJAK folgt

$$\lim_{n\to\infty} r_n(z',z'') = r(z',z'') \tag{3.42}$$

für alle Punktepaare z', z''.

Sei z^* ein beliebiger Punkt in G_1, welcher die Bedingung $\mu_1(z^*) + \mu_2(z^*) < 1$ erfüllt, und sei K eine in G_1 liegende Kreisscheibe vom Mittelpunkt z^*, so klein, daß $\mu_1(K) + \mu_2(K) < 1$. Es gibt eine Umgebung U_1 von z^* mit folgender Eigenschaft: Für jedes Punktepaar $z', z'' \in U_1$ dürfen in der Definition von $\varrho_n(z',z'')$ diejenigen Polygone L von der Konkurrenz ausgeschlossen werden, welche nicht ganz in K liegen. Zum Beispiel kann U_1 durch die Gesamtheit aller Punkte definiert werden, deren dreifacher Abstand von z^* in der Metrik $De^{-u_2}\,|dz|$ kleiner ist als der Abstand zwischen z^* und dem Rande von K in der Metrik $Ce^{u_1}\,|dz|$.) Wegen (3.42) existiert eine entsprechende Nachbarschaft U_2 für die Gesamtheit der Metriken r_n [9]). Für einzelne Metriken ist die Existenz solcher Umgebungen trivial; wir bezeichnen die ϱ und r zugeordneten mit U_3 und U_4. Für jedes Punktepaar $z', z'' \in U = \bigcap_{i=1}^{4} U_i$ gilt

$$m_n r_n(z',z'') \leqq \varrho_n(z',z'') \leqq M_n r_n(z',z'')$$

und

$$m\, r(z',z'') \leqq \varrho(z',z'') \leqq M\, r(z',z'')\,,$$

wobei

$$m_n = \min_{z\in K} e^{h_n(z)}\,, \qquad M_n = \max_{z\in K} e^{h_n(z)}\,,$$

$$m = \min_{z\in K} e^{h'(z)} \quad \text{und} \quad M = \max_{z\in K} e^{h'(z)}\,.$$

Daraus folgt

$$\frac{m_n}{M}\,\frac{r_n(z',z'')}{r(z',z'')} \leqq \frac{\varrho_n(z',z'')}{\varrho(z',z'')} \leqq \frac{M_n}{m}\,\frac{r_n(z',z'')}{r(z',z'')}\,. \tag{3.43}$$

Wegen (B) kann bei vorgegebenem ε der Radius von K so klein gewählt wer-

[9]) $\{r_n(z',z'')\}$ konvergiert gleichmäßig für $z', z'' \in K$.

den, daß $\frac{m_n}{M} \geqq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ und $\frac{M_n}{m} \leqq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ für alle n. Aus (3.42) und (3.43) folgt dann

$$(1 - \varepsilon)\varrho(z', z'') \leqq \varrho_n(z', z'') \leqq (1 + \varepsilon)\varrho(z', z'') \tag{3.44}$$

für genügend große n und beliebige $z', z'' \in U$. Durch Anwendung des BOREL-LEBESGUEschen Überdeckungssatzes schließt man: Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\Delta(\varepsilon) > 0$ und ein $N(\varepsilon) < \infty$ derart, daß aus z', $z'' \in \gamma$ und $|z' - z''| < \Delta$ für $n > N$ stets (3.44) folgt. Daraus und aus der Definition der Kurvenlänge [1, S. 69] folgt, daß $(1 - \varepsilon)l \leqq l_n \leqq (1 + \varepsilon)l$, wobei l und l_n die Längen von γ in den Metriken ϱ und ϱ_n bezeichnen. Da ε beliebig klein gewählt werden kann, ist somit

$$l = \lim_{n \to \infty} l_n = \lim_{n \to \infty} \int_{\gamma} e^{v_n} |dz| . \tag{3.45}$$

Aus (3.39) und (3.45) ersieht man, daß die linke Seite von (3.37) l darstellt. Da aber $l \geqq \varrho(z_1, z_2)$ ist [1, S. 32], erhält man damit einen Widerspruch. Q.E.D.

Es existieren somit eine RIEMANNsche Fläche R und eine Metrik (1.5) auf R derart, daß die so definierte Mannigfaltigkeit M' zu M lokal isometrisch ist. Da aber beide Metriken innere sind, zieht die Isometrie im Kleinen die Isometrie im Großen nach sich [1, S. 33, Fußnote 3]. Damit ist der erste Teil von Satz A bewiesen. Der zweite Teil folgt unmittelbar aus dem entsprechenden lokalen Resultat von RESCHETNJAK.

4. Potentialtheoretische Definition der Kurvenlänge

In einem Gebiete G der z-Ebene sei eine Metrik (1.2) definiert, wobei $u(z)$ sich als Differenz von subharmonischen Funktionen $u = u_1 - u_2$ darstellen lasse. Sei Γ eine JORDANkurve, welche samt ihrem Innengebiet Ω zu G gehört. Seien h_1 und h_2 die besten harmonischen Majoranten von u_1 und u_2 in Ω, $h = h_1 - h_2$. Wir wählen einen Punkt $z_0 \in \Omega$. Sei $z = \varphi(\zeta)$ eine konforme Abbildung von $|\zeta| < 1$ auf Ω, welche $\zeta = 0$ in $z = z_0$ überführt. Es bezeichne γ_r das Bild des Kreises $|\zeta| = r$ $(0 < r < 1)$.

Satz B. *Der (stets existierende [10]) und von der Wahl von z_0 unabhängige) Grenzwert*

$$\lambda = \lim_{r \to 1} \int_{\gamma_r} e^{h(z)} |dz| \tag{4.1}$$

[10]) Der Wert $+\infty$ kann angenommen werden.

ist gleich der Länge l von Γ in der Metrik (1.2) *nach der* ALEXANDROW*schen Definition* [1, S. 69].

Beweis. Mit Anwendung von Lemma 3 ist

$$\begin{aligned}\liminf_{r\to 1}\int_{\gamma_r} e^{u(z)}\,|dz| &= \liminf_{r\to 1}\int_{|\zeta|=r}\exp\{u(\varphi(\zeta))+\log|\varphi'(\zeta)|\}\,|d\zeta| \\ &= \lim_{r\to 1}\int_{|\zeta|=r}\exp\{h(\varphi(\zeta))+\log|\varphi'(\zeta)|\}\,|d\zeta| = \lim_{r\to 1}\int_{\gamma_r} e^{h(z)}\,|dz|\,,\end{aligned}\tag{4.2}$$

woraus sich zunächst die Existenz von λ ergibt. Die links in (4.2) stehenden Integrale stellen – wie in Abschnitt 3 für beliebige analytische Kurven γ_r bewiesen wurde – die Längen l_r der Kurven γ_r in der Metrik (1.2) dar. Da $\liminf_{r\to 1} l_r \geqq l$ ist [1, S. 70, Satz 5], folgt aus (4.2)

$$\lambda \geqq l\,. \tag{4.3}$$

Es existiert eine Folge $\{\Omega_n\}$ von einfach zusammenhängenden Gebieten in der z-Ebene mit folgenden Eigenschaften: (1) $z_0 \in \Omega_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; (2) $\lim_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega$; (3) der Rand Γ_n von Ω_n ist ein Polygon und es gilt

$$\int_{\Gamma_n} e^u\,|dz| < l + \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4.4}$$

Sei $z = \varphi_n(\zeta)$ eine konforme Abbildung von $|\zeta| < 1$ auf Ω_n, welche $\zeta = 0$ in $z = z_0$ überführt, und es bezeichne γ_{r_n} das Bild des Kreises $|\zeta| = r$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Seien h_{1n} und h_{2n} die besten harmonischen Majoranten von u_1 und u_2 in Ω_n, $h_n = h_{1n} - h_{2n}$. Es ist [6, S. 241]

$$\int_{\gamma_{rn}} e^{h_n}\,|dz| \leqq \int_{\Gamma_n} e^u\,|dz| \qquad (0 < r < 1;\quad n = 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{4.5}$$

Wir behaupten ferner, daß für eine Teilfolge $\{n_k\}$ von $\{n\}$

$$\lim_{n_k\to\infty}\int_{\gamma_{rn_k}} e^{h_{n_k}}\,|dz| = \int_{\gamma_r} e^h\,|dz| \tag{4.6}$$

$(0 < r < 1)$ ist. Zunächst zeigen wir, daß

$$\lim_{n\to\infty} h_n(z) = h(z) \tag{4.7}$$

ist, wobei die Konvergenz auf jedem kompakten Teilbereich K_z von Ω gleichmäßig erfolgt. Aus den Darstellungen

$$u(z) = h(z) - \int_{\Omega} g(z, \zeta)\,d\mu(e_\zeta) \qquad (z \in \Omega)$$

und

$$u(z) = h_n(z) - \int_{\Omega_n} g_n(z, \zeta)\,d\mu(e_\zeta) \qquad (z \in \Omega_n),$$

in denen g und g_n die GREENschen Funktionen von Ω und Ω_n bezeichnen, folgt

$$\begin{aligned} |h(z) - h_n(z)| \leqq \Big| \int\limits_{\Omega \cap \Omega_n} [g(z, \zeta) - g_n(z, \zeta)] d\mu(e_\zeta) \Big| \\ + \Big| \int\limits_{\Omega - \Omega_n} g(z, \zeta) d\mu(e_\zeta) \Big| + \Big| \int\limits_{\Omega_n - \Omega} g_n(z, \zeta) d\mu(e_\zeta) \Big| . \end{aligned} \tag{4.8}$$

Für $n \to \infty$ streben – gleichmäßig für $z \in K_z$ – die auf der rechten Seite von (4.8) stehenden Terme gegen 0. Daraus folgt (4.7).

Aus bekannten Sätzen über normale Familien und konforme Abbildung (vgl. etwa [3, S. 177, 180, 182] und [2, S. 66]) schließt man, daß für eine Teilfolge $\{n_k\}$ von $\{n\}$

$$\lim_{n_k \to \infty} \varphi_{n_k}(\zeta) = \varphi(\zeta) \tag{4.9}$$

und

$$\lim_{n_k \to \infty} \varphi'_{n_k}(\zeta) = \varphi'(\zeta) \tag{4.10}$$

ist, wobei die Konvergenz auf jedem kompakten Teilbereich K_ζ von $|\zeta| < 1$ gleichmäßig erfolgt. Da $\varphi'(\zeta) \neq 0$ ist, folgt aus (4.10)

$$\lim_{n_k \to \infty} \log |\varphi'_{n_k}(\zeta)| = \log |\varphi'(\zeta)| , \tag{4.11}$$

gleichmäßig auf K_ζ. Unter Benützung der Ungleichung

$$|h_{n_k}(\varphi_{n_k}(\zeta)) - h(\varphi(\zeta))| \leqq |h_{n_k}(\varphi_{n_k}(\zeta)) - h(\varphi_{n_k}(\zeta))| + |h(\varphi_{n_k}(\zeta)) - h(\varphi(\zeta))|$$

schließt man aus (4.7) und (4.9), daß – gleichmäßig auf K_ζ –

$$\lim_{n_k \to \infty} h_{n_k}(\varphi_{n_k}(\zeta)) = h(\varphi(\zeta)) . \tag{4.12}$$

Aus (4.11) und (4.12) folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n_k \to \infty} \int\limits_{|\zeta| = r} \exp \{h_{n_k}(\varphi_{n_k}(\zeta)) + \log |\varphi'_{n_k}(\zeta)|\} |d\zeta| \\ = \int\limits_{|\zeta| = r} \exp \{h(\varphi(\zeta)) + \log |\varphi'(\zeta)|\} |d\zeta| . \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent mit (4.6). (4.4), (4.5) und (4.6) ergeben

$$\lambda \leqq l . \tag{4.13}$$

Satz B folgt aus (4.3) und (4.13).

Von der Annahme, daß das Innengebiet Ω von Γ zu G gehört, kann man sich befreien, indem man an Stelle von Ω ein in G liegendes Ringgebiet betrachtet, dessen eine Randkomponente von Γ gebildet wird. Die γ_r sind dann durch diejenigen Kurven zu ersetzen, die bei einer konformen Abbildung auf $R < |\zeta| < 1$ in die Kreise $|\zeta| = r$ übergehen.

Ist Γ nicht geschlossen, so ergänzt man zunächst Γ zu einer geschlossenen Kurve, integriert dann aber nur über die Γ entsprechenden Teilbogen der γ_r.

Satz B gibt die natürliche potentialtheoretische Definition der Kurvenlänge auf Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung. Mit ihrer Hilfe ist es nun zum Beispiel möglich, den funktionentheoretischen Beweis der isoperimetrischen Ungleichung auf gekrümmten Flächen [6, 7] so auszubauen, daß das Resultat dem entsprechenden – mit ganz andern Mitteln hergeleiteten – Satz von ALEXANDROW [1, S. 416] äquivalent wird.

Herrn Professor PFLUGER verdanken wir folgenden Hinweis: Die Winkeltreue der Abbildung $w = f(z)$ folgt direkt aus (3.20) durch Anwendung eines Satzes von D. MENCHOFF (Sur une généralisation d'un théorème de M. H. BOHR, Mat. Sbornik 44 (1937) 339–354, p. 340), der von F. W. GEHRING (The definitions and exceptional sets for quasiconformal mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn., im Druck) kürzlich neu bewiesen, verschärft und auf quasikonforme Abbildungen verallgemeinert wurde.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] A. D. ALEXANDROW, *Die innere Geometrie der konvexen Flächen.* Akademie-Verlag, Berlin 1955.
[2] C. CARATHÉODORY, *Conformal representation.* 2nd edition, Cambridge University Press 1952.
[3] C. CARATHÉODORY, *Funktionentheorie.* Bd. I, Birkhäuser, Basel 1950.
[4] S. S. CHERN, P. HARTMAN and A. WINTNER, *On isothermic coordinates.* Comment. Math. Helv. 28 (1954), 301–309.
[5] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. PÓLYA, *Inequalities.* 2nd edition, Cambridge University Press 1952.
[6] A. HUBER, *On the isoperimetric inequality on surfaces of variable* GAUSS*ian curvature.* Ann. of Math. 60 (1954), 237–247.
[7] A. HUBER, *Zur isoperimetrischen Ungleichung auf gekrümmten Flächen.* Acta Math. 97 (1957), 95–101.
[8] A. HUBER, *On subharmonic functions and differential geometry in the large.* Comment. Math. Helv. 32 (1957), 13–72.
[9] C. B. MORREY, JR., *On the solutions of quasilinear elliptic partial differential equations.* Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 126–166.
[10] R. NEVANLINNA, *Uniformisierung.* Springer Berlin 1953.
[11] T. RADÓ, *Subharmonic functions.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete V1. Springer, Berlin 1937.
[12] T. RADÓ and P. V. REICHELDERFER, *Continuous transformations in analysis.* Springer 1955.
[13] I. G. RESCHETNJAK, *Isotherme Koordinaten in Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung.* Doklady Akad. Nauk SSSR, 94 (1954), 631–634.
[14] F. RIESZ, *Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel.* I et II, Acta Math. 48 (1926), 329–343 et 54 (1930), 321–360.
[15] A. WINTNER, *On the local rôle of the logarithmic potential in differential geometry.* Amer. J. Math. 75 (1953). 679–690.
[16] A. WINTNER, *Remarks on binary* RIEMANN*ian metrics.* Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 5, (1956), 59–72.

(Eingegangen den 12. August 1959)