# Sur l'invariant de SMALE d'un plongement.

# Sur l'invariant de SMALE d'un plongement

par MICHEL A. KERVAIRE[1]), New York (USA)

A toute immersion $f: S^p \to R^{p+q}$ d'une sphère dans l'espace euclidien S. SMALE [16] associe un élément $c_f$ du groupe d'homotopie $\pi_p(V_{p+q,p})$, où $V_{p+q,p}$ est la variété de STIEFEL des $p$-repères dans $R^{p+q}$. La définition de $c_f$ est rappelée au § 3. S. SMALE démontre que deux immersions $f, g: S^p \to R^{p+q}$ sont régulièrement homotopes, i. e. qu'il existe une famille d'immersions $f_t: S^p \to R^{p+q}$ avec $f_0 = f$, $f_1 = g$, telle que l'application tangentielle induite dépende continuement de $t$, si et seulement si $c_f = c_g$.

On va étudier le problème de caractériser les éléments de $\pi_p(V_{p+q,p})$ associés aux *plongements* (sans self-intersection) de $S^p$ dans $R^{p+q}$.

D'après [11], l'invariant de SMALE d'un plongement $f: S^p \to R^{p+q}$ avec $p \leqq 2q - 2$ est nul pour $p$ congruent à 2, 4, 5 ou 6 modulo 8. On avait également quelques résultats pour $p = 8s$ et $p = 8s + 1$. (Cf. [11], Corollaires 5.2, 5.3 et 5.4[2]).) On va voir que la nullité de $c_f$ (pour $p \leqq 2q - 2$) ne dépend pas de la classe de reste modulo 8 de $p$ et peut être démontrée indépendemment de la connaissance des groupes d'homotopie stables du groupe orthogonal.

**Theorème.** *Pour tout plongement $f: S^p \to R^{p+q}$, avec $p \leqq 2q - 2$, l'invariant de SMALE $c_f$ de $f$ est nul.*

Autrement dit, compte tenu du théorème de S. SMALE [16], Theorem A, pour tout plongement $f: S^p \to R^{p+q}$ avec $p \leqq 2q - 2$, il existe une famille d'*immersions* $f_t: S^p \to R^{p+q}$, induisant une homotopie (continue) de l'application tangentielle, telle que

(a) $f_0 = f$,

(b) $f_1(x_0, x_1, \dots x_p) = (x_0, x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$.

## § 1. Un lemme préliminaire

Soit $M$ une variété différentiable fermée, presque parallèlisable, de dimension $p + 1$. Le fibré des vecteurs tangents à $M$, restreint à $M - x_0$ ($x_0$, un point de $M$), est trivial par hypothèse[3]). Soit $T_{p+1}$ un champ de $(p + 1)$-repères

[1]) Pendant la préparation du présent article, l'auteur a été titulaire d'une bourse de la National Science Foundation, numéro N.S.F. – G 5863.

[2]) Dans le Corollaire 5.4 de [11], il y a une faute d'impression. On doit lire: *Toute immersion $f: S^{8s} \to R^{n+8s}$, où $n \geqq 8s - 5$, $s \geqq 2$, équivalente à un plongement est équivalente au plongement standard.*

[3]) Toutes les variétés considérées sont connexes.

sur $M - x_0$, et $\mathfrak{o}(\tau, T) \in \pi_p(SO(p+1))$ l'obstruction pour étendre $T_{p+1}$ sur $M$. ($\tau$ est le fibré principal associé au fibré des vecteurs tangents à $M$.)

Dans toute la suite, $\iota^q{}_* : \pi_p(SO(p+1)) \to \pi_p(SO(p+q+1))$ désignera l'homomorphisme induit par l'injection $SO(p+1) \to SO(p+q+1)$ donnée par

$$\iota^q(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_q \end{pmatrix},$$

$A \in SO(p+1)$, $E_q =$ matrice unité à $q$ lignes et $q$ colonnes.

$\psi_* : \pi_p(SO(p+q+1)) \to \pi_p(V_{p+q+1,p+1})$ est induit par $\psi$ qui associe à une matrice de $SO(p+q+1)$ ses $(p+1)$ premiers vecteurs colonnes.

On pose $j_* = \psi_* \circ \iota^q{}_* : \pi_p(SO(p+1)) \to \pi_p(V_{p+q+1,p+1})$.

**Lemme 1.1.** *Si* $p \leqq 2q - 2$, *alors* $j_* \mathfrak{o}(\tau, T) = 0$.

*Démonstration.* On va voir tout d'abord que $\iota^q{}_* \mathfrak{o}(\tau, T)$ est dans le noyau de l'homomorphisme de HOPF-WHITEHEAD $J : \pi_p(SO(r)) \to \pi_{p+r}(S^r)$. Soit $K$ une triangulation de $M$, telle que $x_0$ soit intérieur à un $(p+1)$-simplexe de $K$. On plonge $M^{p+1}$ dans un espace euclidien $R^{p+N+1}$ de grande dimension. ($N \geqq p+2$.) La section $T$ de $\tau \mid M - x_0$ induit alors une application $T^0 : K^p \to V_{p+N+1,p+1}$ qui est homotope à l'application constante. ($K^p$ désigne le $p$-squelette de $K$.) Soit $T^0_t$ une telle homotopie. On désigne par $\pi : V_{p+N+1,p+1} \to G_{p+N+1,p+1}$ et $\pi' : V_{p+N+1,N} \to G_{p+N+1,N} = G_{p+N+1,p+1}$ les projections canoniques sur les variétés de GRASSMANN. En utilisant un relèvement suivant $\pi'$ de l'homotopie $\pi \circ T^0_t$, on obtient une section $F$ du fibré principal $\nu$ de groupe $SO(N)$ associé au fibré normal induit par le plongement $M^{p+1} \subset R^{p+N+1}$ restreint au $p$-squelette $K^p$. Les sections $T$ et $F$ fournissent une section $T \times F$ de $\tau \oplus \nu$ restreint à $K^p$, telle que la valeur du cocycle obstruction $\mathfrak{c}(\tau \oplus \nu, T \times F)$ sur chaque $(p+1)$-simplexe de $K$ soit nulle. Or,

$$\mathfrak{o}(\tau \oplus \nu, T \times F) = \iota^N{}_* \mathfrak{o}(\tau, T) + \iota^{p+1}{}_* \mathfrak{o}(\nu, F) .$$

D'après [15], Lemma 1, $J\mathfrak{o}(\nu, F) = 0$. Comme $J \circ i_* = \pm E \circ J$, on a $J\iota^N{}_* \mathfrak{o}(\tau, T) = \pm E^{N-1} J \iota_* \mathfrak{o}(\tau, T) = 0$. $E^{N-1}$ est un isomorphisme dans les dimensions considérées, donc $J\iota_* \mathfrak{o}(\tau, T) = 0$, d'où la conclusion: $J\iota^q{}_* \mathfrak{o}(\tau, T) = 0$ pour $q \geqq 1$.

Pour en déduire le lemme 1.1, on remarque que d'après I. JAMES [7], Theorem (4.2), (a), pour $p \leqq 2q - 2$, l'homomorphisme $\psi_* : \pi_p(SO(p+q+1)) \to \pi_p(V_{p+q+1,p+1})$ se factorise en $\psi_* = H_{p+1} \circ J$, où

$$H_{p+1} : \pi_{2p+q+1}(S^{p+q+1}) \to \pi_p(V_{p+q+1,p+1})$$

est un invariant de HOPF généralisé. Il résulte donc de $J\iota^q{}_* \mathfrak{o}(\tau, T) = 0$ que

$j_* \mathfrak{o}(\tau, T) = \psi_* \iota^q{}_* \mathfrak{o}(\tau, T) = H_{p+1} J \iota^q{}_* \mathfrak{o}(\tau, T) = 0$. Le lemme 1.1 est démontré.

## § 2. La condition (*C*)

Soit $f: S^p \to R^{p+q}$ une immersion. On va décrire une condition pour $f$, dont on verra au § 3 qu'elle entraine pour $p \leqq 2q - 2$ la nullité de l'invariant de SMALE $c_f$.

(C) Il existe une variété à bord $V^{p+1}$ différentiable, orientable, de bord $S^p$ et une immersion $f': V^{p+1} \to R^{p+q+1}$ telles que:

($C_1$) La restriction de $f'$ au bord de $V^{p+1}$ est égale à l'immersion donnée $f$. (On identifie $R^{p+q}$ au sous-espace $x^{p+q+1} = 0$ de $R^{p+q+1}$.)

($C_2$) $f'(V)$ rencontre $R^{p+q}$ orthogonalement, i. e. la restriction à $S^p$ du fibré normal de $f'$ coincide avec le fibré normal de $f$.

($C_3$) Le fibré normal de $f'$ est trivial.

*Remarque.* La condition (C) entraine que le fibré normal $\nu_f$ de l'immersion donnée $f$ est trivial. Il doit en être ainsi puisque $\nu_f$ trivial est une condition nécessaire pour $c_f = 0$. (Cf. par exemple [11], Lemme (3.4).)

Remarquons encore que si $f$ est le plongement standard $S^p \subset R^{p+1} \subset R^{p+q}$, la condition (C) est réalisée avec pour $V^{p+1}$ une hémisphère.

On forme la variété différentiable fermée $M^{p+1}$, réunion de $V^{p+1}$ et du disque $D^{p+1}$ avec identification des bords (par l'application identité $S^p \to S^p$). Comme $V$ est une $\pi$-variété avec frontière non-vide, elle est parallèlisable. (Cf. [14], Lemma 1.3.) Donc $M^{p+1}$ est presque parallèlisable.

La restriction à $S^p = V \cap D$ du fibré tangent à $M$ est trivialle. (Suspension du fibré tangent à $S^p$.) Soit $A_{p+1}$ un champ de $(p+1)$-repères tangents à $M^{p+1}$, défini sur $S^p$. On peut étendre $f'$, comme immersion, à un voisinage $W$ de $S^p$ dans $M^{p+1}$, et $df' \mid S^p$ appliquée aux repères $A_{p+1}$ fournit une application $\varphi: S^p \to V_{p+q+1, p+1}$.

**Lemme 2.1.** *Il existe un élément* $\varphi_0 \in \pi_p(SO(p+1))$, *tel que* $j_* \varphi_0 = \varphi$, *et satisfaisant*

$$\varphi_0 + \mathfrak{o}(D) = \mathfrak{o}(M),$$

*où* $\mathfrak{o}(M)$ *est une obstruction pour parallèliser* $M$, *et* $\mathfrak{o}(D)$ *est l'obstruction pour étendre* $A_{p+1}$ *à l'intérieur de* $D^{p+1}$.

*Démonstration.* L'application tangentielle $V \to G_{p+q+1, p+1}$ de $V$ dans la GRASSMANNienne des $(p+1)$-plans orientés de $R^{p+q+1}$ est homotope à zéro. (En effet, cette application est couverte par une application $V \to V_{p+q+1, q}$ donnée par une section du fibré normal de $f'$, et $H^{p+1}(V) = 0$.) En utilisant le lemme de relèvement des homotopies, on peut construire sur $V^{p+1}$ un champ

$T_{p+1}$ de $(p+1)$-repères tangents, tel que l'application $V \to V_{p+q+1,p+1}$ donnée par $x \to df'(T_{p+1}(x))$ soit homotope à zéro. Il s'ensuit que la matrice des produits scalaires des vecteurs de $A_{p+1}$ et de $T_{p+1}$ restreint à $S^p$ fournit une application $S^p \to SO(p+1)$ dont la classe d'homotopie $\varphi_0 \in \pi_p(SO(p+1))$ a pour image $\varphi$ par l'homomorphisme $j_*$. On désignera par $\mathfrak{o}(M)$ l'obstruction $\mathfrak{o}(\tau, T)$ pour étendre $T_{p+1}$ comme champ de $(p+1)$-repères tangents sur $M^{p+1}$. $[\mathfrak{o}(M) \in \pi_p(SO(p+1)).]$ On a $\varphi_0 + \mathfrak{o}(D) = \mathfrak{o}(M)$.

## § 3. L'invariant de SMALE

L'invariant de SMALE $c_f$ d'une immersion $f: S^p \to R^{p+q}$ est défini comme suit (cf. [16]): Soit $s: S^p \to R^{p+q}$ une immersion de $S^p$ dans $R^{p+q}$ régulièrement homotope au plongement standard, et telle que pour un voisinage $U_0$ de $a^* = (-1, 0, \ldots, 0) \in S^p$ on ait $s \mid U_0 = f \mid U_0$. Soit $U$ un voisinage sphérique de $a^*$ tel que $U \subset \bar{U} \subset U_0$, et soit $A_p$ un champ de repères tangent à $S^p$ défini et continu sur $X = S^p - U$. On introduit un difféomorphisme $r: E^p_+ \to X$ préservant l'orientation, et $z \to z^*$ la reflexion par rapport au plan de l'équateur $E^p_+ \cap E^p_-$. On pose

$$c_f(z) = \begin{cases} (df)(A_d(rz)) , & \text{pour } z \in E^p_+ , \\ (ds)(A_d(rz^*)) , & \text{pour } z \in E^p_- . \end{cases}$$

$(df \mid X \cap \bar{U} = ds \mid X \cap \bar{U}.)$

$c_f$ est une application continue de $S^p$ dans $V_{p+q,p}$. Sa classe d'homotopie, également notée $c_f$ est par définition l'invariant de SMALE de $f$.

Soit $f'$ l'immersion de $W = S^p \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ dans $R^{p+q+1}$ donnée par $f'(x, t) = f(x) + tn$, où $n = (0, \ldots, 0, 1) \in R^{p+q+1}$ (ou toute autre immersion $f': W \to R^{p+q+1}$, telle que $f' \mid S^p \times \{0\} = f$ et $(df'/dt)_{t=0} = n$).

La restriction à $S^p \times \{0\}$ du fibré tangent à $W$ est trivialle. Soit $A_{p+1}$ un champ de $(p+1)$-repères tangents à $W$, défini sur $S^p \times \{0\}$. L'application prolongée $df$ induit une application $\varphi: S^p \to V_{p+q+1,p+1}$.

Le même procédé appliqué au plongement standard fournit une application $\sigma: S^p \to V_{p+q+1,p+1}$.

Désignons par $k: V_{p+q,p} \to V_{p+q+1,p+1}$ l'application qui adjoint le vecteur $n$ à tout $p$-repère de $R^{p+q}$. On a le

**Lemme 3.1.** $k_*(c_f) = \varphi - \sigma$.

*Démonstration.* $\varphi - \sigma$ est indépendant du choix de $A_{p+1}$. On prendra $A_{p+1} = \{A_p, t\}$ sur $X = S^p - U$.

Soit $Y$ l'espace obtenu à partir de la réunion disjointe de deux copies $S$ et $S'$ de $S^p$ par identification $x \equiv x'$ pour $x \in U$. On a des inclusions naturelles $i : S^p \to Y$, et $i' : S^p \to Y$ par composition avec le passage au quotient des identités $S^p \to S$, $S^p \to S'$ respectivement.

$k \circ c_f$ se factorise par $\gamma \circ h$, où $h : S^p \to Y$, $\gamma : Y \to V_{p+q+1,p+1}$, avec

$$h(z) = \begin{cases} i \circ r(z) & \text{pour} \quad z \in E^p_+ , \\ i' \circ r(z^*) & \text{pour} \quad z \in E^p_- . \end{cases}$$

Il est évident que $h(S^p)$ est homologue à $i(S^p) - i'(S^p)$, et comme $Y$ est $(p-1)$-connexe, $h$ est homotope à $i - i'$. On a donc

$$k \circ c_f = \gamma \circ h \simeq \gamma \circ (i - i') \simeq \gamma \circ i - \gamma \circ i' = \varphi - \sigma .$$

Ceci démontre le Lemme 3.1.

On remarquera que pour $q \geqq 2$, $k_* : \pi_p(V_{p+q,p}) \to \pi_p(V_{p+q+1,p+1})$ est un isomorphisme. (Suite exacte d'homotopie de la fibration $V_{p+q+1,p+1} / V_{p+q,p} = S^{p+q}$.)

**Lemme 3.2.** *Soit* $f : S^p \to R^{p+q}$ *une immersion satisfaisant à la condition* (C) *du* § 2. *Si* $p \leqq 2q - 2$, *alors* $c_f = 0$.

*Démonstration.* On applique le Lemme 2.1 à l'immersion $f$ et au plongement standard $s$. Il existe des éléments $\varphi_0, \sigma_0 \in \pi_p(SO(p+1))$ tels que $j_* \varphi_0 = \varphi$, $j_* \sigma_0 = \sigma$, et satisfaisant

$$\begin{aligned} \varphi_0 + \mathfrak{o}(D) &= \mathfrak{o}(M) \\ \sigma_0 + \mathfrak{o}(D) &= \mathfrak{o}(S^{p+1}) , \end{aligned}$$

où $\mathfrak{o}(S^{p+1})$ est l'obstruction pour parallèliser $S^{p+1}$. Il s'ensuit

$$\varphi_0 - \sigma_0 = \mathfrak{o}(M) - \mathfrak{o}(S^{p+1}) ,$$

et comme $\iota_* \mathfrak{o}(S^{p+1}) = 0$, en appliquant $j_*$:

$$\varphi - \sigma = j_* \mathfrak{o}(M) .$$

On obtient donc, sans restriction de dimensions, sous l'hypothèse (C):

$$k_*(c_f) = j_* \mathfrak{o}(M^{p+1}) .$$

Si $p \leqq 2q - 2$, on peut appliquer le Lemme 1.1, et on conclut $c_f = 0$.

Pour obtenir le théorème de l'introduction, il reste à démontrer que si $f : S^p \to R^{p+q}$ est un plongement, et si $p \leqq 2q - 2$, alors la condition (C) est satisfaite.

## § 4. Fin de la démonstration

$f : S^p \to R^{p+q}$ étant un plongement, il suit de $p \leqq 2q - 2$ que le fibré normal de $f$ est trivial. (Cf. [9], Theorem 8.2.) Soit $F_q$ une section arbitraire du fibré principal associé. ($F_q$ est un champ de $q$-repères orthogonal à $f(S^p)$.)

Par un procédé connu (cf. [9]), on peut associer à $f$ et $F_q$ une classe $\alpha(f, F_q) \in \pi_{p+q}(S^q)$.

**Lemme 4.1.** *Le plongement* $f : S^p \to R^{p+q}$ *étant donné,* $p \leqq 2q - 2$, *on peut choisir* $F_q$ *pour que* $\alpha(f, F_q) = 0$ [4]).

De là résulte immédiatement (cf. [15], démonstration du Lemma 1) qu'il existe une variété à bord $V^{p+1}$ de bord $S^p$, et un plongement $f' : V^{p+1} \to R^{p+q+1}$ satisfaisant aux conditions $(C_1)$, $(C_2)$, $(C_3)$ du § 2.

*Démonstration du lemme* 4.1. La classe $\alpha(f, F_q)$ admet un représentant $\varphi : S^{p+q} \to S^p$ univoquement déterminé après choix d'un voisinage tubulaire de $f(S^p)$ dans $R^{p+q}$ et d'un difféomorphisme relatif $r : (D^q, S^{q-1}) \to (S^q, a^*)$ de degré 1. Le point $a \in S^q$, antipode de $a^*$, est valeur régulière de $\varphi$, et $\varphi^{-1}(a) = f(S^p)$. (On identifie $R^{p+q}$ avec son image dans $S^{p+q}$ par projection stéréographique.)

D'après [9], Lemma 8.1, la restriction $p \leqq 2q - 2$ implique alors que $\alpha(f, F_q)$ est contenu dans l'image de l'homomorphisme $J : \pi_p(SO(q)) \to \pi_{p+q}(S^q)$ de HOPF-WHITEHEAD [5]). Il existe donc une classe $\mu \in \pi_p(SO(q))$ telle que $J\mu = \alpha(f, F_q)$.

D'autre part, à toute application $\xi : S^p \to SO(q)$, on peut associer un nouveau champ $\xi \cdot F_q$ de $q$-repères, orthogonal à $f(S^p)$. Il suffit, pour tout $x \in S^p$ de faire agir la matrice $\xi(x)$ sur les vecteurs de $F_q$ en $f(x)$. Je dis que

$$\alpha(f, \xi \cdot F_q) = \alpha(f, F_q) + \sigma(J\xi) , \tag{*}$$

où $\xi$ désigne également la classe d'homotopie de l'application $\xi : S^p \to SO(q)$, et $\sigma$ est l'automorphisme involutif de $\pi_{p+q}(S^q)$ donné par $\sigma(\alpha) = (-1)^p(\varepsilon \circ \alpha)$, avec $\varepsilon = (-1)^{q-1} i_q$.

La formule (*) ci-dessus implique le lemme 4.1.

Remarquons tout d'abord que $\sigma$ induit un automorphisme de l'image de $J$. Il suffit de vérifier que $\sigma(J\pi_p(SO(q))) \subset J\pi_p(SO(q))$. Or, on sait que

$$(a i_q) \circ \alpha = a\alpha + \frac{a(a-1)}{2} [i_q, i_q] \circ H_0 \alpha .$$

(Cf. [4], formule 6.8.) On applique cette formule avec $\alpha = J\xi$, et on utilise

$$H_0 J\xi = E^q \Phi_* \xi, \qquad \text{au signe près,}$$

(Cf. [3], Lemma 4. $\Phi_* : \pi_p(SO(q)) \to \pi_p(S^{q-1})$ est induite par la projection de $X \in SO(q)$ sur son premier vecteur colonne.)

---

[4]) On comparera ce lemme avec Lemma 6.5 et 6.6 de J. MILNOR [14].

[5]) Dans [9], Lemma 8.1, le lemme reste valable si l'on remplace la stricte inégalité $d < 2n$ portant sur les dimensions par $d \leqq 2n$, la démonstration restant inchangée. La validité pour $d \leqq 2n$ du diagramme utilisé est fournie par le théorème (77) de I. JAMES, *On the suspension sequence*. Ann. of Math. vol. 65 (1957), 74–107. C'est sous cette nouvelle forme que le lemme est appliqué ici.

$$[i_q, i_q] = J\partial i_q ,$$

$\partial : \pi_q(S^q) \to \pi_{q-1}(SO(q))$ étant l'homomorphisme bord de la suite exacte d'homotopie de la fibration $SO(q+1)/SO(q)$. Enfin, $J\beta \circ E^q\gamma = J(\beta \circ \gamma)$, au signe près, $\beta \in \pi_{q-1}(SO(q))$, $\gamma \in \pi_q(S^{q-1})$. On en conclut

$$\sigma(J\xi) = J(\pm \xi + c \cdot \partial i_q \circ \Phi_* \xi) ,$$

$c$ pouvant être $0$, $-1$ ou $+1$ suivant les valeurs de $p$ et $q$.

Il existe donc une classe $\lambda \in \pi_p(SO(q))$, telle que $\alpha(f, F_q) = J\mu = \sigma(J\lambda)$. On prendra $\xi = -\lambda$. D'après (*), on a $\alpha(f, \xi \cdot F_q) = \alpha(f, F_q) - \sigma(J\lambda) = 0$.

Le champ $\xi \cdot F_q$ répond aux exigences du lemme 4.1. Reste à démontrer la formule (*).

Soit $s$: $S^p \to R^{p+q}$ le plongement standard $(s(S^p) \subset R^{p+1})$, et $A_q$ le champ $(x, t_{p+2}, \ldots, t_{p+q})$, où $t_r = (\delta_{r,1}, \ldots, \delta_{r,p+q})$. Considérons $\alpha(s, \xi \cdot A_q)$, où $\xi : S^p \to SO(q)$ est l'application de la formule (*). On a vu dans [9], 1.8, page 349, que $\alpha(s, \xi \cdot A_q) = \sigma(J\xi)$. Il faut donc démontrer

$$\alpha(f, \xi \cdot F_q) = \alpha(f, F_q) + \alpha(s, \xi \cdot A_q) . \qquad (**)$$

Des voisinages tubulaires de $f(S^p)$ et $s(S^p)$ étant choisis, ainsi qu'un difféomorphisme relatif $r : (D^q, S^{q-1}) \to (S^q, a^*)$, on considère les représentants canoniques $\varphi_\xi$, $\varphi$ de $\alpha(f, \xi F_q)$, $\alpha(f, F_q)$, et $\psi_\xi$ de $\alpha(s, \xi \cdot A_q)$.

Pour construire une homotopie entre $\varphi_\xi$ et $\varphi + \psi_\xi$, on part de l'homotopie triviale $h : S^{p+q} \times I \to S^q$ donnée par $h(z, t) = \varphi(z)$. Le point $a \in S^q$ (antipode de $a^*$) est valeur régulière pour $h$, et $h^{-1}(a) = Q$ est difféomorphe à $S^p \times I$ par le plongement $f'(x, t) = (f(x), t)$ dans $R^{p+q} \times I$. Soit $y$ un point intérieur de $Q$ et $c : I \to R^{p+q} \times I$ un chemin différentiable, de point final $y$, dont le point initial se trouve dans $R^{p+q} = R^{p+q} \times \{0\}$, tel que $c(I) \cap Q = \{y\}$. On peut encore supposer que pour $s$ voisin de $0$, on a $c(s) = (c(0), s)$, et qu'en son point final, $c$ rencontre $Q$ orthogonalement. On se sert alors de $c$ et d'un champ de repères normaux à $c(I)$ pour définir un plongement $s' : D^{p+1} \times I \to R^{p+q} \times I$, tel que $s' \mid \{0\} \times I = c$, et l'image de $D^{p+1} \times I$ ne rencontre pas $Q$ excepté en un voisinage sphérique $U$ de $y$ sur lequel $D^{p+1} \times \{1\}$ est appliqué par le difféomorphisme $s' \mid D^{p+1} \times \{1\}$. Soit $N$ la variété obtenue par réunion de $Q - U$ et $s'(S^p \times I)$ après avoir arrondi les angles le long de la frontière de $U$. (Cf. [14], Appendix.) Le champ de $q$-repères normaux sur $Q - U$ s'étend sans difficulté sur $N$. On peut même supposer que la restriction de ce champ à $s'(S^p \times \{0\}) = s(S^p)$ est le champ banal formé de la normale à $s(S^p)$ dans $R^{p+1}$ et des $(q-1)$-vecteurs $t_{p+2}, \ldots, t_{p+q}$.

Comme $N$ est connexe, il existe sur $N$ un chemin différentiable joignant un point de $s(S^p)$ à un point de $f(S^p) \times \{1\} \subset Q$ qui rencontre le bord de $N$ orthogonalement en ses extrémités et n'a pas d'autre point commun avec ce bord. Soit $T$ un voisinage tubulaire de ce chemin dans $N$, et $H : D^p \times I \to T$ un difféomorphisme. L'application $\xi : (S^p, a^*) \to (SO(q), E)$ détermine une application $\xi \circ r = \xi' : (D^p, S^{p-1}) \to (SO(q), E)$, où $E$ est la matrice unité. On remplace alors le champ $F_q$ de $q$-repères sur $N$ par $F'_q$, égal à $F_q$ sur $N - T$ et égal à $\xi'(H^{-1}z) \cdot F_q(z)$ pour $z \in T$. La variété $N$ munie du champ $F'_q$ fournit une homotopie entre $\varphi_\xi$ et $\varphi + \psi_\xi$. D'où la formule (**).

## § 5. Remarques

Soit $f : S^p \to R^{p+q}$ un plongement. Pour que $c_f$ soit nul, il est nécessaire que le fibré normal de $f$ soit trivial.

Or, outre le cas $p \leqq 2q - 2$ que l'on vient d'étudier, on sait que le fibré normal de $f$ est trivial pour $q \leqq 3$. (Bien connu pour $q \leqq 2$. Résultat récent de W. S. MASSEY [13] pour $q = 3$.) Il est donc naturel de se demander si l'invariant de SMALE d'un plongement $f : S^p \to R^{p+q}$ avec $q \leqq 3$ est toujours nul.

J'ignore totalement quelle est la situation pour $q = 2$ ou 3. On trouvera ci-dessous quelques résultats, obtenus en collaboration avec J. MILNOR, concernant le cas $q = 1$.

On commence par un problème de groupes d'homotopie:

**Problème 1.** *On sait* [2] *que* $\pi_{8s}(SO(N))$ *et* $\pi_{8s+1}(SO(N))$ *sont cycliques d'ordre* 2. ($N \geqq 8s + 3$.) *Soient* $\varepsilon_{8s}$ *et* $\varepsilon_{8s+1}$ *les générateurs de ces groupes. Les éléments* $\alpha_{8s} = J\varepsilon_{8s}$ *et* $\alpha_{8s+1} = J\varepsilon_{8s+1}$ *sont-ils nuls?* ($J : \pi_r(SO(N)) \to \pi_{r+N}(S^N)$ *est l'homomorphisme de* HOPF-WHITEHEAD.)

On sait que $J\varepsilon_8 \neq 0$ et $J\varepsilon_9 \neq 0$. En outre, $\varepsilon_{8s+1} = \varepsilon_{8s} \circ \eta_{8s}$ pour tout $s \geqq 1$, où $\eta_{8s}$ est le générateur de $\pi_{8s+1}(S^{8s}) \cong Z_2$. Donc si $J\varepsilon_{8s}$ est nul, alors $J\varepsilon_{8s+1}$ l'est aussi. (Cf. [12], Lemma 1.2.)

On va voir que ce problème est en relation avec les problèmes suivants:

**Problème 2.** *Soit* $f : S^p \to R^{p+1}$ *un plongement. L'invariant de* SMALE $c_f$ *de* $f$ *est-il nul?*

Considérons la région bornée $V^{p+1}$ de $R^{p+1}$ dont le bord est $f(S^p)$. Soit $\Sigma^{p+1}$ la variété différentiable obtenue à partir de la réunion disjointe $V^{p+1} \cup D^{p+1}$ par identification de $x \in S^p$ avec $f(x) \in V^{p+1}$, pour tout $x \in S^p$. La variété $\Sigma^{p+1}$ est une sphère d'homotopie[6]), et un raisonnement

[6]) Dans ce qui suit, «sphère d'homotopie» signifie: Variété différentiable ayant le type d'homotopie d'une sphère. Ces variétés ont été étudiées par J. MILNOR [14].

analogue à celui de la démonstration du Lemme 3.1 montre que

$$c_f = \mathfrak{o}(\Sigma^{p+1}) - \mathfrak{o}(S^{p+1}) , \tag{5.1}$$

où $\mathfrak{o}(\Sigma^{p+1})$, $\mathfrak{o}(S^{p+1}) \in \pi_p(SO(p+1))$ sont les obstructions pour parallèliser $\Sigma^{p+1}$ et $S^{p+1}$ respectivement.

Soient $\tau(\Sigma^{p+1})$, $\tau(S^{p+1}) \in \pi_{p+1}(B_{SO(p+1)})$ les classes d'homotopie des applications tangentielles de $\Sigma^{p+1}$ et $S^{p+1}$. On a

$$\partial\tau(\Sigma^{p+1}) = \mathfrak{o}(\Sigma^{p+1}) , \quad \partial\tau(S^{p+1}) = \mathfrak{o}(S^{p+1}) , \tag{5.2}$$

où $\partial : \pi_{p+1}(B_{SO(p+1)}) \to \pi_p(SO(p+1))$ est l'*iso*morphisme bord de la suite exacte d'homotopie du fibré classifiant pour $SO(p+1)$.

**Problème 3.** *A-t-on* $\tau(\Sigma^{p+1}) = \tau(S^{p+1})$, *quelle que soit la sphère d'homotopie* $\Sigma^{p+1}$*?*

Les formules (5.1) et (5.2) montrent qu'une réponse affirmative au Problème 3 entraîne une réponse affirmative au Problème 2.

On va voir que le Problème 3 est équivalent au

**Problème 4.** *Toute sphère d'homotopie* $\Sigma^{p+1}$ *est-elle une* $\pi$*-variété?* (C'est-à-dire: Toute sphère d'homotopie plongée dans un espace euclidien d'assez grande dimension admet-elle un fibré normal trivial?)

*Remarque:* D'après les résultats de M. HIRSCH [5], $\Sigma^{p+1}$ est une $\pi$-variété si et seulement si l'on peut immerger $\Sigma^{p+1}$ dans $R^{p+2}$.

(3) → (4). Si $\tau(\Sigma) = \tau(S)$, alors aussi $\mathfrak{o}(\Sigma) = \mathfrak{o}(S)$. Donc $\iota_*\mathfrak{o}(\Sigma) = 0$, i. e. $\Sigma$ est une $\pi$-variété.

(4) → (3). Si la sphère d'homotopie $\Sigma^{p+1}$ est une $\pi$-variété, tout plongement $f : \Sigma^{p+1} \to R^{p+N+1}$ avec $N \geqq p+2$ induit un fibré normal trivial. Il s'ensuit que la suspension du fibré tangent (sa classe de $S$-équivalence) est trivialle. Donc $\iota^*\mathfrak{o}(\Sigma) = 0$. Par suite (exacte): $\mathfrak{o}(\Sigma) \in \operatorname{Im} \Delta$, où

$$\Delta : \pi_{p+1}(S^{p+1}) \to \pi_p(SO(p+1)) .$$

Pour $p$ *impair*, $\Phi_*\mathfrak{o}(\Sigma^{p+1}) = \chi(\Sigma^{p+1}) = \chi(S^{p+1}) = \Phi_*\mathfrak{o}(S^{p+1})$, et $\operatorname{Ker} \Phi_* \cap \operatorname{Im} \Delta = 0$. Donc $\mathfrak{o}(\Sigma^{p+1}) = \mathfrak{o}(S^{p+1})$.

Pour $p$ *pair*, $S^{p+1}$ *parallèlisable*, $\mathfrak{o}(S^{p+1}) = 0$, et $\operatorname{Im} \Delta = 0$. Donc $\mathfrak{o}(\Sigma^{p+1}) = 0 = \mathfrak{o}(S^{p+1})$.

Pour $p$ *pair*, $S^{p+1}$ *non parallèlisable*, $\operatorname{Im} \Delta$ est isomorphe à $Z_2$, engendré par $\Delta i_{p+1} = \mathfrak{o}(S^{p+1})$. Si $\mathfrak{o}(\Sigma^{p+1})$ était différent de $\mathfrak{o}(S^{p+1})$, on aurait $\mathfrak{o}(\Sigma^{p+1}) = 0$, donc $\Sigma^{p+1}$ parallèlisable. Or, la semi-caractéristique $\chi^*(\Sigma^{p+1})$ de $\Sigma^{p+1}$ vaut 1. D'après [8], Theorem 9.3, une variété de dimension $p+1$ dont la semi-caractéristique vaut 1 ne peut être parallèlisable que s'il existe dans $\pi_{2p+3}(S^{p+2})$ un élément d'invariant de HOPF 1. D'après J. F. ADAMS [1], ceci implique $S^{p+1}$ parallèlisable. On a donc $\mathfrak{o}(\Sigma^{p+1}) = \mathfrak{o}(S^{p+1})$ dans ce cas également.

Comme $\partial : \pi_{p+1}(B_{SO(p+1)}) \to \pi_p(SO(p+1))$ est un isomorphisme, on a aussi $\tau(\Sigma^{p+1}) = \tau(S^{p+1})$.

*Résultats connus* (pour autant que je sache):

**Théorème 5.1.** *Pour* $p \neq 8s,\ 8s+1$, *toute sphère d'homotopie de dimension* $p+1$ *est une $\pi$-variété.*

**Théorème 5.2.** *Toute sphère d'homotopie de dimension* 9 *ou* 10 *est une $\pi$-variété. Pour* $p = 8s$ *avec* $s \geqq 1$, *les deux propositions suivantes sont équivalentes. Pour* $p = 8s+1$, *la proposition* (b) *entraîne* (a).

(a) *Toute sphère d'homotopie* $\Sigma^{p+1}$ *est une $\pi$-variété*

(b) $J\varepsilon_p \neq 0$.

On se trouve ramené au Problème 1.

*A l'exception des cas* $p = 8s$ *ou* $p = 8s+1$ *avec un* $s \geqq 2$, on a donc, en vertu des remarques qui précèdent:

**Corollaire 5.1.** *Avec la restriction ci-dessus pour $p$, tout plongement* $f: S^p \to R^{p+1}$ *est régulièrement homotope au plongement standard.*

**Corollaire 5.2.** *Avec la même restriction pour $p$, le fibré tangent à toute sphère d'homotopie* $\Sigma^{p+1}$ *est donné par le même élément de* $\pi_{p+1}(B_{SO(p+1)})$ *que le fibré tangent de la sphère ordinaire.*

Ce corollaire s'applique en particulier aux sphères de MILNOR dont les dimensions sont favorables.

*Démonstration du théorème* 5.1.

$f: \Sigma^{p+1} \to R^{p+N+1}$ étant un plongement dans un espace euclidien de grande dimension ($N \geqq p+2$), et $\nu$ le fibré principal normal de groupe $SO(N)$, soit $F_N$ une section de $\nu$ restreint à $\Sigma - x^0$. L'obstruction $\mathfrak{o}(\nu, F_N)$ pour étendre $F_N$ (comme section de $\nu$) sur $\Sigma^{p+1}$ est un élément de $H^{p+1}(\Sigma^{p+1};\ \pi_p(SO(N))) = \pi_p(SO(N))$.

On connaît $\pi_p(SO(N))$ pour $N \geqq p+2$. (Cf. [2].) Les valeurs sont

$$\begin{array}{lcccccccc} & Z_2 & Z_2 & 0 & Z & 0 & 0 & 0 & Z \\ \text{pour} & & & & & & & & \\ p \equiv & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \quad \text{modulo } 8 \end{array}$$

respectivement. ($p \geqq 1$.)

Le théorème 5.1 (qui revient à affirmer que $\mathfrak{o}(\nu, F_N) = 0$) est donc banal pour $p \equiv 2, 4, 5, 6$ modulo 8.

On a exclu $p \equiv 0$, 1 modulo 8. Il reste donc à examiner le cas où $p = 4k - 1$. Pour ces valeurs de $p$, $\mathfrak{o}(\nu, F_N)$ est un entier au signe près. On sait que

$$p_k[\Sigma^{4k}] = a_k \cdot (2k-1)!\,\mathfrak{o}(\nu, F_N),$$

où $p_k \in H^{4k}(\Sigma^{4k}; Z)$ est la classe de Pontrjagin de $\Sigma^{4k}$ en dimension $4k$, et $a_k = 1 + \sin^2(k\pi/2)$. (Cf. [10], Lemma (1.1).)

Comme l'index de $\Sigma^{4k}$ est lié à $p_k$ par

$$I(\Sigma^{4k}) = s_k p_k + P(p_1, \ldots, p_{k-1}),$$

(formule de l'index, F. Hirzebruch [6], Hauptsatz 8.2.2.), et que $H^i(\Sigma^{4k}) = 0$ pour $1 \leqq i \leqq 4k-1$ entraine $I(\Sigma^{4k}) = 0$, $P(p_1, \ldots, p_{k-1}) = 0$, il s'ensuit $p_k = 0$. ($s_k \neq 0$.) Donc aussi $\mathfrak{o}(\nu, F_N) = 0$. Le théorème 5.1 est démontré.

*Démonstration du théorème* 5.2. La première assertion découle des suivantes et de $J\varepsilon_8 \neq 0$, $J\varepsilon_9 \neq 0$.

(b) $\to$ (a): Soit $\Sigma^{p+1}$ une sphère d'homotopie et $f: \Sigma^{p+1} \to R^{p+N+1}$ un plongement. ($N \geqq p+2$.) Soit $F_N$ une section du fibré principal normal $\nu_f$ restreint à $\Sigma - x_0$. Considérons l'obstruction $\mathfrak{o}(\nu, F_N) \in \pi_p(SO(N)) \cong Z_2$ pour $p = 8s$ ou $8s+1$. On sait que $J\mathfrak{o}(\nu_f, F_N) = 0$. (Cf. [15], Lemma 1.) Donc si $J\varepsilon_p \neq 0$, il s'ensuit $\mathfrak{o}(\nu_f, F_N) \neq \varepsilon_p$. Donc $\mathfrak{o}(\nu_f, F_N) = 0$. Autrement dit, $\Sigma^{p+1}$ est une $\pi$-variété.

(a) $\to$ (b): On démontre la contraposition. Supposons $J\varepsilon_p = 0$. D'après [15], Lemma 1, il existe une variété presque parallèlisable $M^{p+1}$ et un plongement $f: M^{p+1} \to R^{p+N+1}$ avec une section $F_N$ du fibré principal normal $\nu_f$ restreint à $M - x_0$, tels que $\mathfrak{o}(\nu_f, F_N) = \varepsilon_p$. On simplifie $M^{p+1}$ par chirurgie. (Cf. J. Milnor [14], § 5.) Le résultat est une sphère d'homotopie $\Sigma_0^{p+1}$ plongée dans $R^{p+N+1}$, et l'application caractéristique du fibré normal est $\varepsilon_p$. Cette sphère d'homotopie $\Sigma_0^{p+1}$ n'est donc pas une $\pi$-variété. D'où le théorème 5.2.

En relation avec le Problème 2 (invariant de Smale d'un plongement $f: S^p \to R^{p+1}$), on a le

**Problème 5.** *Soit* $f: S^p \to R^{p+q}$ *une immersion et* $h: S^p \to S^p$ *un difféomorphisme de degré* 1. *A-t-on* $c_{f\circ h} = c_f$?

On va voir que la réponse est affirmative si $p \leqq 2q-2$ en vertu du théorème des §§ 1–4, et également si $p$ est une dimension pour laquelle le Problème 2 admet une réponse affirmative. (Donc en vertu du Corollaire 5.1, pour $p \neq 8s$, $8s+1$ avec $s \geqq 2$.) Dans ce deuxième cas la réponse au Problème 5 est affirmative sans restriction sur $q$.

On peut regarder $h$ comme un plongement $h: S^p \to R^{p+1}$. L'inclusion $u$:

$R^{p+1} \to R^{p+q}$ induit une application $v: V_{p+1,p} \to V_{p+q,p}$, et on a $c_{u \circ h} = v_*(c_h)$. On va démontrer que

$$c_{f \circ h} = c_f + c_{u \circ h} . \tag{5.3}$$

Il s'ensuit que $c_{f \circ h} = c_f$ si

1.) $p \leqq 2q - 2$, car alors $c_{u \circ h} = 0$ en vertu du théorème de l'introduction;

2.) $p \neq 8s$ et $p \neq 8s + 1$ avec $s \geqq 2$, car alors en vertu du Corollaire 5.1, on a $c_h = 0$, donc aussi $c_{u \circ h} = v_*(c_h) = 0$.

Reste à démontrer la formule (5.3). Soit $W = S^p \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, et $f'$: $W^{p+1} \to R^{p+q+1}$ l'immersion donnée par $f'(x, t) = (f(x), t)$. Soit $A_{p+1}$ la restriction à $S^p \times \{0\}$ d'un champ de $(p + 1)$-repères tangents à $W$ (qui est parallèlisable). $df'$ induit une application $\varphi: S^p \to V_{p+q+1,p+1}$. Le même argument appliqué au plongement standard fournit $\sigma: S^p \to V_{p+q+1,p+1}$. On a vu (Lemme 3.1) que $k_* c_f = \varphi - \sigma$.

Soit $h': W \to W$ le difféomorphisme donné par $h'(x, t) = (h(x), t)$, et soit $A'_{p+1} = dh'(A_{p+1})$.

En utilisant ci-dessus $A'_{p+1}$ au lieu de $A_{p+1}$, on obtient $\varphi'$ et $\sigma'$: $S^p \to V_{p+q+1,p+1}$. Il existe une application $\delta: S^p \to SO(p + 1)$, donnée par la matrice des produits scalaires des vecteurs de $A_{p+1}$ et $A'_{p+1}$, telle que

$$j_* \delta = \varphi' - \varphi = \sigma' - \sigma .$$

On en conclut:

$$\begin{aligned} k_* c_{f \circ h} &= \varphi' - \sigma = \varphi' - \sigma' + \sigma' - \sigma , \\ &= \varphi - \sigma + \sigma' - \sigma , \\ &= k_* c_f + k_* c_{u \circ h} = k_*(c_f + c_{u \circ h}) . \end{aligned}$$

Pour $q \geqq 2$, $k_*$ est un isomorphisme et (5.3) s'ensuit. Pour $q = 1$, le même principe de démonstration s'applique, en faisant appel à un champ de normales à $f(S^p)$.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] J. F. ADAMS, *On the nonexistence of elements of* HOPF *invariant one.* Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958), 279–282.

[2] R. BOTT, *The stable homotopy of the classical groups.* Ann. of Math., 70 (1959), 313–337.

[3] P. J. HILTON, *A note on the P-homomorphism in homotopy groups of spheres.* Proc. of the Cambridge Phil. Soc., 51 (1955), 230–233.

[4] P. J. HILTON, *On the homotopy groups of the union of spheres.* Journal of the London Math. Soc., 30 (1955), 154–172.

[5] M. HIRSCH, *Immersions of manifolds.* Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959), 242–276.

[6] F. HIRZEBRUCH, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie.* Springer (1956).

[7] I. JAMES, *On the iterated suspension.* Quart. Journal of Math., 5 (1954), 1–10.

[8] M. KERVAIRE, *Relative characteristic classes.* Amer. Journal of Math., vol. LXXIX (1957), 517–558.
[9] M. KERVAIRE, *An interpretation of* G. WHITEHEAD'*s generalization of the* HOPF *invariant.* Ann. of Math., 69 (1959), 345–365.
[10] M. KERVAIRE, *On the* PONTRYAGIN *classes of certain* $SO(n)$*-bundles over manifolds.* Amer. Journal of Math., vol. LXXX (1958), 632–638.
[11] M. KERVAIRE, *Sur le fibré à une sphère immergée dans l'espace euclidien.* Comment. Math. Helv., 33 (1959), 121–131.
[12] M. KERVAIRE, *Some non-stable homotopy groups of* LIE *groups.* Illinois J. of Math., à paraître.
[13] W. S. MASSEY, *On the normal bundle of a sphere imbedded in euclidean space.* Proc. Amer. Math. Soc. (à paraître).
[14] J. MILNOR, *Differentiable manifolds which are homotopy spheres* (à paraître).
[15] J. MILNOR and M. KERVAIRE, BERNOULLI *numbers, homotopy groups and a theorem of* ROHLIN. Proc. Int. Math. Congress. Edinburgh (1958). A paraître.
[16] S. SMALE, *The classification of immersions of spheres in euclidean spaces.* Ann. of Math., 69 (1959), 327–344.

(Reçu le 28 septembre 1959)