Tensorielle Abbildungen.

Tensorielle Abbildungen

von W. Graeub, Zürich

1. Einleitung. Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf Tensoren in einem festen n-dimensionalen Raume E. Als Koeffizientenbereich soll dabei ein beliebiger kommutativer Körper Λ der Charakteristik Null zugrunde gelegt werden. E_q^p bezeichne die Gesamtheit aller p-fach kontra- und q-fach kovarianten Tensoren über dem Raume E oder, wie wir kurz sagen werden, die Gesamtheit der Tensoren der Stufe (p, q). Diese ist ein linearer Raum der Dimension n^{p+q}. Mittels der wertweisen Multiplikation der Tensoren ist in je zwei Räumen E_q^p und E_s^r eine bilineare Abbildung in den Raum E_{q+s}^{p+r} definiert. Als eine weitere Operation hat man die Verjüngung, die jedem Tensor der Stufe (p, q) einen Tensor der Stufe $(p-1, q-1)$ zuordnet. Diese wird gewöhnlich mit Hilfe einer Basis des Raumes E durch Summation über ein Indexpaar definiert, man kann sie jedoch auch ohne Benützung einer Basis einführen (vgl. [1], Kap. V, § 4). Es ist der Zweck der vorliegenden Arbeit, zu zeigen, daß die oben erwähnten Operationen im wesentlichen die einzigen «kanonischen» sind. Dabei ist unter einer «kanonischen» Operation eine solche verstanden, die sich ohne Zuhilfenahme einer Basis des Raumes E und der Tensorkomponenten erklären läßt. Um dies zu präzisieren, benötigen wir den Begriff der tensoriellen Abbildung.

2. Tensorielle Abbildungen. Wir betrachten neben E den dualen Raum E^* (vgl. [1], Kap. II, § 5) und bezeichnen mit (x^*, x) die bilineare Funktion (mit Werten in Λ), welche die Dualität festlegt. Ein Tensor der Stufe (p, q) ist dann definitionsgemäß eine multilineare Funktion von p Vektoren des Raumes E^* und q Vektoren des Raumes E mit Werten in Λ. Ist α ein Automorphismus des Raumes E und α^* der duale Automorphismus, so kann man jedem Tensor Φ einen Tensor $\alpha\Phi$ derselben Stufe durch die Gleichung

$$\alpha\Phi(x^{*1}, \dots x^{*p};\ x_1 \dots x_q) = \Phi(\alpha^* x^{*1}, \dots \alpha^* x^{*p};\ a^{-1} x_1, \dots \alpha^{-1} x_q) \tag{1}$$

definieren. Das so erklärte Produkt zwischen Automorphismen und Tensoren hat folgende Eigenschaften, die sich unmittelbar aus der Definition ergeben:

(α_1) $\quad \alpha(\Phi_1 + \Phi_2) = \alpha\Phi_1 + \alpha\Phi_2$

(α_2) $\quad \alpha(\Phi\Psi) = \alpha\Phi \cdot \alpha\Psi$

(α_3) $\quad (\alpha\beta)\Phi = \alpha(\beta\Phi)$

(α_4) $\quad \iota\Phi = \Phi$ (ι identischer Automorphismus).

Nun seien E_q^p und E_s^r zwei beliebige Tensorräume über E und A eine lineare Abbildung von E_q^p in E_s^r. Die Abbildung A heißt *tensoriell*, wenn für jeden Automorphismus α die Beziehung

$$A(\alpha\Phi) = \alpha(A\Phi) \tag{2}$$

besteht (vgl. auch [2], § 4, n° 2). Zum Beispiel ist die Verjüngung eines Tensors über ein beliebiges Argumentepaar eine tensorielle Abbildung von E_q^p in E_{q-1}^{p-1}. Entsprechend versteht man unter einer bilinearen tensoriellen Abbildung B zweier Räume E_q^p und $E_{q'}^{p'}$ in einen Raum E_s^r eine bilineare Abbildung, für die

$$B(\alpha\Phi, \alpha\Psi) = \alpha B(\Phi, \Psi) \tag{3}$$

gilt. Die Multiplikation zweier Tensoren der Stufen (p, q) und (p', q') ist eine tensorielle Abbildung der Räume E_q^p und $E_{q'}^{p'}$ in den Raum $E_{q+q'}^{p+p'}$.

Unser Ziel ist, wie bereits erwähnt, eine Übersicht über die tensoriellen Abbildungen zu erhalten. Ist das einmal gelungen, so hat man auch eine Übersicht über die bilinearen tensoriellen Abbildungen. Wegen der Tensorprodukteigenschaft läßt sich nämlich jede bilineare Abbildung B in der Form

$$B(\Phi, \Psi) = A(\Phi\cdot\Psi) \qquad (\Phi \in E_q^p,\ \Psi \in E_{q'}^{p'})$$

schreiben, wobei A eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung ist. Ist nun die Abbildung B tensoriell, so folgt

$$A(\alpha\Phi\cdot\alpha\Psi) = \alpha A(\Phi\Psi)\ ,$$

was man auch in der Form

$$A(\alpha(\Phi\Psi)) = \alpha A(\Phi\Psi)$$

schreiben kann. Da die Produkte $\Phi\cdot\Psi$ den ganzen Raum $E_{q+q'}^{p+p'}$ erzeugen, folgt daraus, daß für jeden Tensor $X \in E_{q+q'}^{p+p'}$ die Beziehung

$$A(\alpha X) = \alpha(AX)$$

bestehen muß, das heißt, die Abbildung A ist tensoriell. Alle bilinearen tensoriellen Abbildungen sind daher von der Form

$$B(\Phi, \Psi) = A(\Phi\cdot\Psi)\ , \tag{4}$$

wobei A eine tensorielle Abbildung ist, und Entsprechendes gilt von den multilinearen tensoriellen Abbildungen.

3. Das duale Produkt. Um die Klassifikation der tensoriellen Abbildungen auf eine einfachere Frage zurückzuführen, führen wir zunächst eine zur Tensormultiplikation duale Operation ein. Dazu beachten wir zunächst, daß man in je zwei Räumen E^p_q und E^q_p eine nichtausgeartete bilineare Funktion (Φ, Ψ) einführen kann mittels der totalen Verjüngung

$$(\Phi, \Psi) = \sum_{(v),(r)} \Phi^{v_1 \ldots v_p}_{r_1 \ldots r_q} \Psi^{r_1 \ldots r_q}_{v_1 \ldots v_p} . \tag{5}$$

Von dieser zeigt man leicht, daß sie die Eigenschaften eines skalaren Produktes (vgl. [1], Kap. II, § 5) zwischen den Tensoren der Räume E^p_q und E^q_p hat. Je zwei solche Räume werden damit zueinander dual. Speziell wird jeder Raum E^p_p zu sich selbst dual. Ist α ein Automorphismus des Raumes E, so besteht die Beziehung

$$(\alpha\Phi, \alpha\Psi) = (\Phi, \Psi) . \tag{6}$$

Es sei jetzt Φ ein fester Tensor des Raumes E^p_q. Dann definiert die Zuordnung

$$A_\Phi : \Psi \to \Phi \cdot \Psi \qquad (\Psi \in E^r_s)$$

eine lineare Abbildung des Raumes E^r_s in den Raum E^{p+r}_{q+s}. Wir betrachten die duale Abbildung

$$A^*_\Phi : E^{q+s}_{p+r} \to E^s_r$$

und setzen

$$A^*_\Phi(X) = X \llcorner \Phi \qquad (X \in E^{q+s}_{p+r}) . \tag{7}$$

Damit ist für je zwei Tensoren $\Phi \in E^p_q$ und $X \in E^{q+s}_{p+r}$ ein Produkt erklärt, das im Raume E^s_r liegt. Aus der Definitionsgleichung (7) ergibt sich zwischen dem gewöhnlichen und dem soeben definierten *dualen Produkt* der Zusammenhang

$$(X \llcorner \Phi, \Psi) = (X, \Phi\Psi) \qquad (\Phi \in E^p_q, \Psi \in E^r_s, X \in E^{q+s}_{p+r}) . \tag{8}$$

Setzt man hier speziell $r = 0$, $s = 0$ und für Ψ den Skalar ε (1-Element von Λ) ein, so ergibt sich die Formel

$$X \llcorner \Phi = (X, \Phi) \qquad (\Phi \in E^p_q, X \in E^q_p) , \tag{9}$$

welche zeigt, daß das duale Produkt als eine Verallgemeinerung des skalaren Produktes (5) anzusehen ist.

Für das duale Produkt gelten neben der Bilinearität folgende Gesetze:

(D_1) $\quad \alpha(X \llcorner \Phi) = \alpha X \llcorner \alpha\Phi \qquad$ (α Automorphismus von E)

(D_2) $\quad$ Aus $X \llcorner \Phi = 0$ für festes X und alle Φ folgt $X = 0$.

Die Formel (D_1) besagt, daß das duale Produkt eine *tensorielle* bilineare Abbildung ist.

Wir zeigen als nächstes, daß sich jede lineare Abbildung A des Raumes

E_q^p in einen Raum E_r^s als duales Produkt mit einem festen Tensor $X \in E_{p+r}^{q+s}$ schreiben läßt. Dazu ordnen wir jedem Tensor $X \in E_{p+r}^{q+s}$ die Abbildung A_X zu, die durch

$$A_X(\Phi) = X \llcorner \Phi \qquad (\Phi \in E_q^p)$$

gegeben ist. Die Zuordnung $X \to A_X$ definiert dann eine lineare Abbildung des Raumes E_{p+r}^{q+s} in den Raum $L(E_q^p, E_r^s)$ der linearen Abbildung von E_q^p nach E_r^s. Aus dem Gesetz (D_2) folgt, daß diese Zuordnung eineindeutig ist. Nun ergibt sich aus einer Dimensionsbetrachtung, daß man auf diese Art wirklich alle Abbildungen von E_q^p in E_r^s erhält. Es ist nämlich

$$\dim E_{p+r}^{q+s} = n^{q+s} \cdot n^{p+r}$$

und

$$\dim L(E_q^p, E_r^s) = n^{p+q} \cdot n^{s+r} = \dim E_{p+r}^{q+s} ,$$

und somit muß die Zuordnung $X \to A_X$ eine Abbildung *auf* den Raum $L(E_q^p, E_r^s)$ sein.

Es sei jetzt speziell A eine *tensorielle* Abbildung und X der durch A bestimmte Tensor, so daß also

$$A(\Phi) = X \cdot \Phi .$$

Dann gilt für jeden Automorphismus α von E

$$A(\alpha\Phi) = \alpha \cdot A(\Phi)$$

und somit

$$X \llcorner \alpha\Phi = \alpha(X \llcorner \Phi) .$$

Andererseits ist aber nach (D_1)

$$\alpha(X \llcorner \Phi) = \alpha X \llcorner \alpha\Phi ,$$

und somit folgt

$$X \llcorner \alpha\Phi = \alpha X \llcorner \alpha\Phi .$$

Da dies bei festem X und α für alle Tensoren Φ gilt, folgt nach (D_2)

$$X = \alpha X .$$

Der Tensor X muß somit gegen alle Automorphismen des Raumes E invariant sein. Ein solcher Tensor soll ein *invarianter Tensor* genannt werden.

Die obige Betrachtung zeigt, daß man jede tensorielle Abbildung als duales Produkt mit einem invarianten Tensor schreiben kann. Damit ist die Frage nach den tensoriellen Abbildungen auf die nach den invarianten Tensoren zurückgeführt[1]).

---

[1]) Wegen ähnlicher Fragen der Invariantentheorie vgl. [3], Chap. II.

4. Eigenschaften invarianter Tensoren. Es sei Φ ein invarianter Tensor des Raumes E_q^p. Dann gilt für jeden Automorphismus α die Beziehung

$$\Phi(\alpha^* x^{*1}, \ldots \alpha^* x^{*p};\ \alpha^{-1} x_1 \ldots \alpha^{-1} x_q) = \Phi(x^{*1} \ldots x^{*p};\ x_1 \ldots x_q) . \quad (10)$$

Setzt man hier speziell

$$\alpha = \lambda \cdot \iota \qquad (\lambda \in \Lambda,\ \lambda \neq 0) ,$$

so ergibt sich

$$\Phi(x^{*1}, \ldots x^{*p};\ x_1 \ldots x_q)\,(\lambda^{p-q} - \varepsilon) = 0$$

und somit, wenn Φ nicht der Nulltensor ist,

$$\lambda^{p-q} = \varepsilon .$$

Dies muß für alle Elemente λ des Körpers Λ gelten und ist, da Λ die Charakteristik Null hat, nur möglich, wenn $p = q$. Ein von Null verschiedener invarianter Tensor hat somit gleich viele kontravariante und kovariante Argumente. Man kann daher einfach von einem p-stufigen invarianten Tensor sprechen.

Mit Hilfe des skalaren Produktes in den Räumen E^* und E kann man sofort $p!$ invariante Tensoren p-ter Stufe angeben, nämlich die Tensoren

$$J_\sigma(x^{*1}, \ldots x^{*p};\ x_1 \ldots x_p) = (x^{*1}, x_{\sigma(1)}) \ldots (x^{*p}, x_{\sigma(p)}) , \quad (11)$$

wobei σ eine beliebige Permutation der Zahlen $(1 \ldots p)$ ist.

Als weitere Eigenschaften invarianter Tensoren merken wir noch die folgenden an:

1. Wird ein invarianter Tensor über irgendein Argumentepaar verjüngt, so erhält man wieder einen solchen. Bezeichnet nämlich V_j^i den Verjüngungsoperator über das i-te und j-te Argument, so gilt für jeden Automorphismus α von E und jeden Tensor $\Phi \in E_p^p$

$$\alpha(V_j^i \Phi) = V_j^i(\alpha \Phi) .$$

Ist nun Φ invariant, so folgt

$$\alpha(V_j^i \Phi) = V_j^i \Phi ,$$

das heißt, auch der Tensor $V_j^i \Phi$ ist invariant.

2. Steht ein Tensor Φ des Raumes E_p^p auf allen Tensoren J_σ p-ter Stufe senkrecht[2]), so steht der verjüngte Tensor $V_j^i \Phi$ auf allen Tensoren J_τ der Stufe $(p - 1)$ senkrecht. Dies ergibt sich aus der Beziehung

$$(V_j^i \Phi, J_\tau) = (\Phi, J_{\sigma\tau'\varrho-1}) ,$$

wobei τ eine beliebige Permutation der Zahlen $(1 \ldots p - 1)$ bezeichnet und

[2]) Dabei ist das Senkrechtstehen in bezug auf das durch (5) definierte Skalarprodukt gemeint.

die Permutationen τ', σ und ϱ durch die Gleichungen

$$\tau'(v) = \begin{cases} \tau(v) & (v = 1 \dots p-1) \\ p & (v = p)\,, \end{cases}$$

$$\sigma(v) = \begin{cases} v & (v = 1 \dots i-1) \\ v+1 & (v = i \dots p-1) \\ i & (v = p)\,, \end{cases} \qquad \varrho(v) = \begin{cases} v & (v = 1 \dots j-1) \\ v+1 & (v = j \dots p-1) \\ j & (v = p) \end{cases}$$

gegeben sind.

5. Die Frage nach der Gesamtheit der invarianten Tensoren wird nun durch den folgenden Satz beantwortet:

Jeder invariante Tensor ist eine lineare Kombination der Tensoren J_σ.

Dem Beweis dieser Behauptung schicken wir zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. Es sei Φ ein invarianter Tensor p-ter Stufe, der auf allen Tensoren J_σ senkrecht steht. Dann gilt

$$\Phi(x^*, \dots x^*;\ x \dots x) = 0\,.$$

Beweis: Setzt man

$$F(x^*, x) = \Phi(x^*, \dots x^*;\ x \dots x)\,, \tag{12}$$

so ist die Funktion F in x^* und x homogen vom Grade p und hat ferner die Invarianzeigenschaft

$$F(\alpha^* x^*, \alpha^{-1} x) = F(x^*, x)\,. \tag{13}$$

Hieraus kann man zunächst schließen, daß der Funktionswert $F(x^*, x)$ nur vom skalaren Produkt (x^*, x) abhängt. Dazu seien a^*, a und b^*, b zwei Vektorpaare, für die

$$(a^*, a) = (b^*, b) \tag{14}$$

gilt. Wir nehmen zunächst an, daß dieser gemeinsame Wert von Null verschieden ist. Die von den Vektoren a und a^* erzeugten eindimensionalen Unterräume bezeichnen wir mit (a) bzw. (a^*). Wegen der Voraussetzung $(a^*, a) \neq 0$ ist a nicht im orthogonalen Komplement von (a^*) enthalten, und man kann daher den Raum E in der Form

$$E = (a) + (a^*)^\perp$$

zerlegen. Entsprechend erhält man zu den Vektoren b und b^* die Zerlegung

$$E = (b) + (b^*)^\perp$$

des Raumes E. Nun sei α ein Automorphismus von E, der a in b und den Raum $(a^*)^\perp$ in den Raum $(b^*)^\perp$ überführt. Der duale Automorphismus führt dann die orthogonalen Komplemente dieser Unterräume ineinander über, insbesondere also b^* in ein Vielfaches von a^*,

$$\alpha^* b^* = \lambda a^* .$$

Dabei ist der Faktor λ durch die Gleichung

$$(\alpha^* b^*, a) = \lambda (a^*, a)$$

gegeben. Hier erhält man für die linke Seite wegen (14)

$$(\alpha^* b^*, a) = (b^*, \alpha a) = (b^*, b) = (a^*, a) ,$$

und somit folgt

$$\lambda (a^*, a) = (a^*, a) .$$

Da nach Voraussetzung $(a^*, a) \neq 0$, erhält man $\lambda = \varepsilon$, das heißt

$$\alpha^* b^* = a^* .$$

Nun ergibt sich aus (13)

$$F(a^*, a) = F(\alpha^* b^*, \alpha^{-1} b) = F(b^*, b) .$$

Es bleibt noch der Fall $(a^*, a) = 0$ zu betrachten. Dann folgt, behaupten wir, $F(a^*, a) = 0$. Um das zu zeigen, zerlegen wir den Raum E in der Form

$$E = (a) + A ,$$

wobei A einen zweiten direkten Summanden bezeichnet. Der duale Raum E^* zerfällt dann in die beiden orthogonalen Komplemente

$$E^* = A^{\perp} + (a)^{\perp} .$$

Nun sei α der Automorphismus, der durch die Zuordnung

$$\alpha = \begin{cases} \lambda \iota & \text{in } (a), \quad (\lambda \neq 0) \\ \iota & \text{in } A \end{cases}$$

bestimmt ist. Dann gilt für den dualen Automorphismus

$$\alpha^* = \begin{cases} \lambda \iota & \text{in } A^{\perp} \\ \iota & \text{in } (a)^{\perp} . \end{cases}$$

Insbesondere ist also $\alpha^* a^* = a^*$, da a^* nach Voraussetzung im Raume $(a)^{\perp}$ enthalten ist. Daher wird

$$F(\alpha^* a^*, \alpha^{-1} a) = F(a^*, \lambda^{-1} a) = \lambda^{-p} F(a^*, a) ,$$

und somit folgt wegen (13)

$$F(a^*, a)\,(\lambda^{p} - \varepsilon) = 0 .$$

Da dies für alle $\lambda \neq 0$ aus Λ gilt, folgt hieraus weiter

$$F(a^*, a) = 0\,,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Nun kann man eine Funktion f im Körper Λ definieren, indem man

$$f(\varrho) = F(x^*, x) \qquad (\varrho \in \Lambda) \tag{15}$$

setzt, wobei x^*, x irgendein Vektorpaar ist, für das

$$(x^*, x) = \varrho$$

gilt. Ersetzt man ϱ durch $\lambda\varrho$, so folgt

$$f(\lambda\varrho) = F(x^*, \lambda x) = \lambda^p F(x^*, x) = \lambda^p \cdot f(\varrho)\,,$$

und man hat daher die Funktionalgleichung

$$f(\lambda\varrho) = \lambda^p \cdot f(\varrho)\,.$$

Setzt man hier insbesondere $\varrho = \varepsilon$, so ergibt sich

$$f(\lambda) = \lambda^p \cdot f(\varepsilon) = \gamma \cdot \lambda^p, \qquad (\gamma = f(\varepsilon))\,. \tag{16}$$

Aus den Gleichungen (15) und (16) ergibt sich jetzt

$$F(x^*, x) = \gamma (x^*, x)^p$$

oder, wenn man zum Tensor Φ zurückgeht,

$$\Phi(x^*, \ldots x^*;\; x \ldots x) = \gamma \cdot J(x^* \ldots x^*;\; x \ldots x)\,, \tag{17}$$

wobei J den invarianten Tensor

$$J(x^{*1}, \ldots x^{*p};\; x_1 \ldots x_p) = (x^{*1}, x_1) \ldots (x^{*p}, x_p)$$

bezeichnet.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Konstante γ den Wert Null hat. Dazu erklären wir den Tensor Ψ mittels

$$\Psi = \Phi - \gamma J\,.$$

Dann lautet die Gleichung (17)

$$\Psi(x^*, \ldots x^*;\; x \ldots x) = 0\,. \tag{18}$$

Hieraus folgt aber, daß der total symmetrische Teil des Tensors Ψ verschwinden muß. Diesen total symmetrischen Teil kann man in der Form

$$\left(\frac{1}{p!}\right)^2 \sum_{\sigma,\tau} \Psi_\sigma^\tau$$

schreiben, wobei Ψ_σ^τ für irgend zwei Permutationen σ und τ den Tensor

$$\Psi_\sigma^\tau(x^{*1}, \dots x^{*p};\ x_1 \dots x_p) = \Psi(x^{*\tau(1)}, \dots x^{*\tau(p)};\ x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p)})$$

bezeichnet. Aus (18) folgt somit

$$\sum_{\sigma,\tau} \Psi_\sigma^\tau = 0$$

oder, wenn man zum Tensor Φ zurückgeht,

$$\sum_{\sigma,\tau} \Phi_\sigma^\tau = \gamma \sum_{\sigma,\tau} J_\sigma^\tau = \gamma \cdot p! \cdot \sum_\sigma J_\sigma .$$

Bildet man nun das Skalarprodukt mit einem festen Tensor J_ϱ, so folgt

$$\sum_{\sigma,\tau} (\Phi_\sigma^\tau, J_\varrho) = \gamma \cdot p! \sum_\sigma (J_\sigma, J_\varrho) . \tag{19}$$

Nun gilt für je zwei Tensoren Φ und Ψ des Raumes E_p^p

$$(\Phi_\sigma^\tau, \Psi) = (\Phi, \Psi_{\sigma^{-1}}^{\tau^{-1}}) , \tag{20}$$

und somit wird die linke Seite von (19) gleich

$$\sum_{\sigma,\tau} (\Phi, J_{\varrho\sigma^{-1}}^\tau)$$

und es folgt

$$\sum_{\sigma,\tau} (\Phi, J_{\varrho\sigma^{-1}}^\tau) = 0 , \tag{21}$$

da Φ nach Voraussetzung auf allen Tensoren J_σ senkrecht steht. Auf der rechten Seite von (19) erhält man für das Skalarprodukt (J_σ, J_ϱ) durch Ausrechnen

$$(J_\sigma, J_\varrho) = \sum_{(v)} \delta_{v_{\sigma\varrho(1)}}^{v_1} \dots . \delta_{v_{\sigma\varrho(p)}}^{v_p} \cdot \varepsilon .$$

Dieses Skalarprodukt ist somit für je zwei Permutationen ein ganzzahliges nicht negatives Vielfaches des Einselementes. Speziell erhält man für die Permutation $\sigma = \varrho^{-1}$

$$(J_{\varrho^{-1}}, J_\varrho) = \sum_{(v)} \delta_{v_1}^{v_1} \dots . \delta_{v_p}^{v_p} = n^p \cdot \varepsilon$$

und somit folgt, da die Charakteristik von Λ nicht Null ist,

$$\sum_\sigma (J_\sigma, J_\varrho) \neq 0 . \tag{22}$$

Aus den Gleichungen (19), (21) und (22) folgt jetzt $\gamma = 0$ und damit nach (17)

$$\Phi(x^*, \dots x^*;\ x \dots x) = 0 ,$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 2. Ein invarianter Tensor, der auf allen Tensoren J_σ senkrecht steht, ist der Nulltensor.

Wir führen den Beweis dieser Behauptung durch eine doppelte Induktion nach der Stufe des Tensors und der Dimension des Raumes und formulieren sie dementsprechend folgendermaßen:

Satz T_n^p. Ein invarianter Tensor p-ter Stufe in einem n-dimensionalen Raum, der auf allen Tensoren J_σ p-ter Stufe senkrecht steht, ist der Nulltensor.

Zum Beweis zeigen wir, daß die folgende Implikation gilt:

$$\left.\begin{matrix} T_n^0, & \ldots T_n^{p-1} \\ T_{n-1}^0 & \ldots T_{n-1}^p \end{matrix}\right\} \Rightarrow T_n^p \qquad (p, n = 1, 2 \ldots) . \tag{23}$$

Es sei also Φ ein invarianter Tensor p-ter Stufe im n-dimensionalen Raume E, so daß

$$(\Phi, J_\sigma) = 0$$

für alle Permutationen σ. Wir wählen zwei Vektoren $a^* \in E^*$ und $a \in E$, so daß

$$(a^*, a) = \varepsilon ,$$

und bezeichnen die orthogonalen Komplemente der Räume (a^*) und (a) mit A bzw. A^*. Dann zerfallen die Räume E und E^* gemäß

$$E = (a) \oplus A$$

und

$$E^* = (a^*) \oplus A^* ,$$

wobei die beiden Räume A und A^* wieder zueinander dual sind. Um zu zeigen, daß Φ der Nulltensor ist, genügt es, festzustellen, daß

$$\Phi(x^{*1}, \ldots x^{*p};\ x_1 \ldots x_p) = 0 , \quad \text{falls} \begin{cases} x^{*v} \in (a^*) \cup A^* \\ x_v \in (a) \cup A \end{cases} \quad (v = 1 \ldots p) ,$$

denn diese beiden Mengen erzeugen die Räume E^* und E. Mit anderen Worten darf man sich darauf beschränken, daß jeder der Vektoren x^{*v} entweder in A^* liegt oder gleich a^* ist und Entsprechendes von den Vektoren x_v $(v = 1 \ldots p)$ gilt. Es ist also zu zeigen, daß für je zwei ganze Zahlen r, s des Intervalles $1 \leqq r \leqq p$ bzw. $1 \leqq s \leqq q$ die Gleichung

$$\Phi(x^{*1}, \ldots x^{*r}, a^* \ldots a^*;\ x_1 \ldots x_s, a \ldots a) = 0 \quad \text{besteht,}$$

$$\text{falls} \begin{cases} x^{*v} \in A^*, & (v = 1 \ldots r) \\ x_v \in A, & (v = 1 \ldots s).^{3)} \end{cases}$$

---

[3]) Dabei ist angenommen, daß jeweils die *ersten* Vektoren bzw. x^{*v} bzw. x_v in A^* bzw. A liegen. Dies kann man immer erreichen, indem man Φ durch den Tensor Φ_τ^σ ersetzt, wobei σ und τ zwei passend gewählte Permutationen sind. Der Tensor Φ_τ^σ hat dann wieder die Eigenschaften, die von Φ vorausgesetzt sind.

Setzt man

$$\Psi(x^{*1}\dots x^{*r};\ x_1\dots x_s) = \Phi(x^{*1},\dots x^{*r}, a^*\dots a^*;\ x_1\dots x_r, a\dots a),$$

so wird Ψ ein Tensor der Stufe (r, s) im Raume A. Dieser ist gegen alle Automorphismen von A invariant. Ist nämlich β ein solcher Automorphismus, so erhält man daraus einen Automorphismus α von E, indem man

$$\alpha = \begin{cases} \iota & \text{in } (a) \\ \beta & \text{in } A \end{cases}$$

setzt. Der duale Automorphismus lautet dann

$$\alpha^* = \begin{cases} \iota & \text{in } (a^*) \\ \beta^* & \text{in } A^* \end{cases}$$

und somit ergibt sich aus der Invarianz des Tensors Φ

$$\begin{aligned}\Psi(\alpha^* x^{*1}\dots\alpha^* x^{*r};\ \alpha^{-1}x_1\dots\alpha^{-1}x_s) &= \Phi(\alpha^* x^{*1},\dots\alpha^* x^{*r}, a^*\dots a^*;\\ &\quad \alpha^{-1}x_1\dots\alpha^{-1}x_s, a\dots a) =\\ &= \Phi(\alpha^* x^{*1}\dots\alpha^* x^{*r}, \alpha^* a^*,\dots\alpha^* a^*;\ \alpha^{-1}x_1\dots\alpha^{-1}x_s, \alpha^{-1}a,\dots\alpha^{-1}a) =\\ &= \Phi(x^{*1},\dots x^{*r}, a^*,\dots a^*;\ x_1\dots x_s, a\dots a) = \Psi(x^{*1}\dots x^{*r};\ x_1\dots x_s).\end{aligned}$$

Hieraus folgt zunächst, daß Ψ der Nulltensor ist, falls $r \neq s$. Man kann also $r = s$ setzen. Wir zeigen weiter, daß der Tensor Ψ auf allen Tensoren J_σ der Stufe r senkrecht steht. Dabei genügt es wieder auf Grund der Beziehung (20), dies für den Tensor

$$J(x^{*1},\dots x^{*r};\ x_1\dots x_r) = (x^{*1}, x_1)\dots(x^{*r}, x_r)$$

zu zeigen. Um das skalare Produkt (Ψ, J) zu bilden, wählen wir in den Räumen A, A^* ein Paar dualer Basen e_v, e^{*v} $(v = 1\dots n-1)$. Dann wird

$$(\Psi, J) = \sum_{(v)} \Psi(e^{*v_1}\dots e^{*v_r};\ e_{v_1}\dots e_{v_r}). \tag{24}$$

Wir führen diese Verjüngung schrittweise aus und beginnen mit den beiden letzten Argumenten. Dann entsteht der Tensor

$$\sum_{v_r} \Psi(x^{*1}\dots x^{*r-1}, e^{*v_r};\ x_1\dots x_{r-1}, e_{v_r}).$$

Fügt man hier noch den Wert

$$\Psi(x^{*1}\dots x^{*r-1}, a^*;\ x_1\dots x_{r-1}, a)$$

hinzu, so erhält man den im Raume E über die beiden r-ten Argumente verjüngten Tensor Φ, also den Tensor $V_r^r\Phi$, und zwar seinen Wert an der Stelle

$$x^{*1}\dots x^{*r-1}, a^*\dots a^*;\ x_1\dots x_{r-1}, a\dots a.$$

Dies ergibt sich daraus, daß die Vektoren e_v, e^{*v} zusammen mit den beiden Vektoren a und a^* ein Paar dualer Basen von E und E^* bilden. Der Tensor $V_r^r\Phi$ ist aber wegen der Eigenschaften 1 und 2 (Nr. 4) ebenfalls invariant und steht auf allen Tensoren J_σ der Stufe $(p-1)$ senkrecht. Er muß daher nach dem Satz T_n^{p-1} gleich Null sein, und es folgt

$$\sum_{v_r} \Psi(x^{*1}, \ldots x^{*r-1}, e^{*v_r}; x_1 \ldots x_{r-1}, e_{v_r}) = -\Psi(x^{*1} \ldots x^{*r-1}, a^*; x_1 \ldots x_{r-1}, a) .$$

Verjüngt man nun über die beiden $(r-1)$-ten Argumente und verfährt wie oben, so erhält man unter Verwendung des Satzes T_n^{p-2}

$$\sum_{v_{r-1}, v_r} \Psi(x^{*1}, \ldots x^{*r-2}, e^{*v_{r-1}}, e^{*v_r}; x_1 \ldots x_{r-2}, e_{v_{r-1}}, e_{v_r})$$
$$= \Psi(x^{*1} \ldots x^{*r-2}, a^*, a^*; x_1 \ldots x_{r-2}, a, a)$$

und schließlich nach r Schritten

$$\sum_{(v)} \Psi(e^{*v_1} \ldots e^{*v_r}; e_{v_1} \ldots e_{v_r}) = (-1)^r \Psi(a^*, \ldots a^*; a \ldots a) .$$

Hier ist die rechte Seite nach Definition von Ψ aber gleich

$$(-1)^r \Phi(a^* \ldots . a^*; a \ldots . a)$$

und somit nach Hilfssatz 1 gleich Null. Es folgt somit aus (24)

$$(\Psi, J) = 0 .$$

Somit ist Ψ ein invarianter Tensor r-ter Stufe im $(n-1)$-dimensionalen Raume A, der auf allen Tensoren J_σ der Stufe r senkrecht steht. Hieraus folgt aber nach Satz T_{n-1}^r $(r = 0 \ldots p)$, daß Ψ der Nulltensor ist, und man hat die Gleichung

$$\Phi(x^{*1} \ldots x^{*r}, a^* \ldots a^*; x_1 \ldots x_r, a \ldots a) = 0 , \qquad (r = 0 \ldots p) .$$

Aus dieser folgt aber, wie bereits zu Anfang erwähnt, daß Φ der Nulltensor ist, und die Implikation (23) ist bewiesen.

Nun ergibt sich der Satz T_n^p, wenn man noch beachtet, daß die Sätze $T_1^p (p = 1, 2 \ldots)$ und $T_n^0 (n = 1, 2 \ldots)$ richtig sind, was sich unmittelbar einsehen läßt. Setzt man in der Implikation (23) $n = 2$, so kann man die zweite Zeile weglassen und erhält die Implikation

$$(T_2^0, \ldots T_2^{p-1}) \Rightarrow T_2^p .$$

Hieraus folgt induktiv der Satz T_2^p. Setzt man nun in (23) $n = 3$ und läßt die untere Zeile weg, so erhält man die Implikation

$$(T_3^0 \ldots T_3^{p-1}) \Rightarrow T_3^p$$

und hieraus den Satz T_3^p. Indem man so weiterschließt, erhält man alle Sätze T_n^p.

6. Beweis des Hauptsatzes. Nun sind wir in der Lage, den in Nr. 5 erwähnten Satz zu beweisen. Dazu bezeichne U_p den Raum aller invarianten Tensoren

p-ter Stufe und V_p den von den Tensoren J_σ erzeugten Raum. Dann gilt jedenfalls die Inklusion
$$V_p \subset U_p\,, \tag{25}$$
und es ist zu zeigen, daß diese unecht ist. Der Hilfssatz 2 läßt sich jetzt durch die Gleichung
$$U_p \cap V_p^\perp = 0 \tag{26}$$
ausdrücken, wobei $V_p^\perp$ das orthogonale Komplement des Raumes V_p bezeichnet. Hieraus folgt wegen (25)
$$V_p \cap V_p^\perp = 0\,.$$

Der Raum V_p hat also mit seinem orthogonalen Komplement nur den Nullvektor gemeinsam, und somit muß die direkte Summe dieser Räume der ganze Raum E_p^p sein,
$$E_p^p = V_p \oplus V_p^\perp\,.$$

Bildet man nun den Durchschnitt mit dem Unterraum U_p und beachtet die Beziehungen (25) und (26), so folgt
$$U_p = V_p\,,$$
womit der Satz bewiesen ist.

7. Lineare Unabhängigkeit der Tensoren J_σ. Im Falle $p \leqq n$ kann man überdies zeigen, daß die Tensoren J_σ linear unabhängig sind und somit eine Basis des Raumes der invarianten Tensoren bilden. Dazu wählen wir in den Räumen E und E^* je p Vektoren a_v und a^{*v} $(v = 1 \dots p)$, so daß
$$(a^{*v}, a_\tau) = \delta_\tau^v \cdot \varepsilon$$
und bilden aus ihnen den Tensor
$$A(x^{*1}, \dots x^{*p};\ x_1 \dots x_p) = (x^{*1}, a_1) \dots (x^{*p}, a_p)(a^{*1}, x_1) \dots (a^{*p}, x_p)$$
und für jede Permutation τ die entsprechenden Tensoren A^τ. Dann wird
$$\begin{aligned}(A^\tau, J_\sigma) &= J_\sigma(a^{*\tau(1)} \dots a^{*\tau(p)};\ a_1 \dots a_p) = \\ &= (a^{*\tau(1)}, a_{\sigma(1)}) \dots (a^{*\tau(p)}, a_{\sigma(p)}) = \delta_{\sigma(1)}^{\tau(1)} \dots \delta_{\sigma(p)}^{\tau(p)}\,.\end{aligned} \tag{27}$$

Dies ist genau dann von Null verschieden, wenn $\sigma = \tau$ und hat dann den Wert $n^p \cdot \varepsilon$. Man kann somit die Gleichung (27) in der Form
$$(A^\tau, J_\sigma) = n^p \cdot \varepsilon \cdot \delta_\sigma^\tau$$
schreiben, woraus sich unmittelbar die lineare Unabhängigkeit der Tensoren J_σ ergibt.

8. Anwendung auf die tensoriellen Abbildungen. Nun kann man leicht ein Erzeugendensystem für die tensoriellen Abbildungen zwischen zwei Räumen E_q^p und E_r^s angeben. Wie bereits in Nr. 3 gezeigt, ist jede solche Abbildung von der Form
$$A(\Phi) = J \llcorner \Phi\,, \tag{28}$$

wobei J einen invarianten Tensor der Stufe $(q+s, p+r)$ bezeichnet. Daraus folgt zunächst, daß eine nichttriviale tensorielle Abbildung zwischen E_q^p und E_r^s nur möglich ist, falls $p+r=q+s$. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann man in (28) für J die Tensoren J_σ einsetzen und erhält so ein Erzeugendensystem für die tensoriellen Abbildungen von E_q^p in E_r^s. Das sind die $(p+r)!$ Abbildungen

$$A_\sigma(\Phi) = J_\sigma \llcorner \Phi .$$

Im Falle $p+r \leqq n$ sind diese überdies linear unabhängig und bilden eine Basis des Raumes der tensoriellen Abbildungen.

Als Beispiel seien noch die möglichen tensoriellen Abbildungen für drei einfache Fälle wirklich aufgezählt:

1. $E_1^1 \to E_0^0$: Dann ist der zugehörige invariante Tensor von erster Stufe und somit bis auf einen Faktor gleich dem Einheitstensor (x^*, x). Die Abbildung besteht dann in der Verjüngung.

2. $E_1^1 \to E_1^1$: Dann hat man für den Tensor J bereits zwei Möglichkeiten, nämlich

$$J(x^{*1}, x^{*2};\ x_1, x_2) = (x^{*1}, x_1)\,(x^{*2}, x_2)$$

und

$$J(x^{*1}, x^{*2};\ x_1, x_2) = (x^{*1}, x_2)\cdot(x^{*2}, x_1) .$$

Im ersten Fall ist die Abbildung A die Identität, im zweiten besteht sie aus der Verjüngung und der Multiplikation mit dem Einheitstensor.

3. $E_2^2 \to E_1^1$: Jetzt hat man für J bereits sechs Möglichkeiten. Ihnen entsprechen folgende tensorielle Abbildungen: Zunächst kann man die Tensoren des Raumes E_2^2 auf vier verschiedene Arten über ein Argumentpaar verjüngen. Ferner kann man sie auf zwei Arten total verjüngen und den erhaltenen Skalar mit dem Einheitstensor multiplizieren.

9. Anwendung auf die invarianten Funktionen von Endomorphismen. Eng verwandt mit dem Begriff des invarianten Tensors ist der der *invarianten Funktion* im Raume der Endomorphismen eines linearen Raumes E. Dieser spielt in der Theorie der linearen Übertragung eine Rolle (vgl. [4], chap. III, n° 4). Es bezeichne $L(E)$ den Raum der linearen Selbstabbildungen des Raumes E und P eine p-fach lineare Funktion im Raume $L(E)$ mit Werten im Koeffizientenkörper Λ. Diese Funktion heißt *invariant*, wenn für jeden Automorphismus α von E die Beziehung

$$P(\alpha^{-1}\varphi_1\alpha, \ldots \alpha^{-1}\varphi_p\alpha) = P(\varphi_1 \ldots . \varphi_p) \qquad (\varphi_\nu \in L(E))$$

besteht. Zwischen diesen invarianten Funktionen und den invarianten Tensoren p-ter Stufe besteht eine umkehrbar eindeutige Beziehung, die mit Hilfe des Tensorproduktes hergestellt werden kann. Dabei wählen wir als Modell des Raumes $E^* \otimes E$ den Raum $L(E)$ und verstehen unter dem Produkt $a^* \otimes a$ die lineare Selbstabbildung

$$x \rightarrow (a^*, x)a$$

des Raumes E. Dann entspricht jeder p-fach linearen Funktion P im Raume $L(E)$ ein Tensor der Stufe (p, p) gemäß

$$\Phi(x^{*1}, \dots x^{*p};\ x_1 \dots x_p) = P(x^{*1} \otimes x_1, \dots x^{*p} \otimes x_p)\,.$$

Die Funktion P sei jetzt insbesondere invariant. Dann erhält man für den entsprechenden Tensor Φ unter Beachtung der Identität

$$\alpha^{-1}(x^* \otimes x)\alpha = \alpha^* x^* \otimes \alpha^{-1} x$$

die Beziehung

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha^* x^{*1}, \dots \alpha^* x^{*p}; \alpha^{-1} x_1, \dots \alpha^{-1} x_p) &= P(\alpha^{-1}(x^{*1} \otimes x_1)\alpha, \dots \alpha^{-1}(x^{*p} \otimes x_p)\alpha) \\ &= P(x^{*1} \otimes x_1, \dots x^{*p} \otimes x_p) = \Phi(x^{*1}, \dots x^{*p};\ x_1 \dots x_p)\,,\end{aligned}$$

das heißt, der Tensor Φ ist invariant. Umgekehrt erhält man aus jedem invarianten Tensor p-ter Stufe eine p-fach lineare invariante Funktion P, indem man diese zunächst für die Tensorprodukte definiert, gemäß

$$P(x^{*1} \otimes x_1, \dots x^{*p} \otimes x_p) = \Phi(x^{*1}, \dots x^{*p};\ x_1 \dots x_p)$$

und dann linear auf den ganzen Raum $L(E)$ erweitert. Nach dem Satz in Nr. 5 bilden somit die invarianten Funktionen, die durch die Gleichung

$$P_\sigma(x^{*1} \otimes x_1, \dots x^{*p} \otimes x_p) = (x^{*1}, x_{\sigma(1)}) \dots (x^{*p}, x_{\sigma(p)}) \tag{29}$$

bestimmt sind, ein Erzeugendensystem für alle invarianten Funktionen. Um hieraus einen expliziten Ausdruck für die Funktion P_σ zu erhalten, zerlegen wir die Permutation σ in ihre Zyklen. Wir beginnen mit der Ziffer 1 und bilden die Zahlen

$$\sigma(1), \sigma^2(1) \dots \sigma^j(1) = 1\,, \tag{30}$$

wobei j der erste Exponent ist, für den man wieder 1 erhält.

Greift man aus dem Produkt (29) die entsprechenden Faktoren heraus, so erhält man das Teilprodukt

$$(x^{*1}, x_{\sigma(1)})(x^{*\sigma(1)}, x_{\sigma^2(1)}) \dots (x^{*\sigma^{j-1}(1)}, x_1)\,. \tag{31}$$

Nun besteht für je p Vektoren $a^{*\nu}$ und a_ν die Beziehung[4])

$$(a^{*1}, a_2)(a^{*2}, a_3) \dots (a^{*p}, a_1) = Sp[(a^{*1} \otimes a_1)(a^{*2} \otimes a_2) \dots (a^{*p} \otimes a_p)]\,,$$

[4]) Dabei ist Sp ein Symbol für die Spur der Abbildung.

die sich unmittelbar aus der Definition des Tensorproduktes ergibt, und somit kann man das Teilprodukt (31) in der Form

$$Sp[(x^{*1}\otimes x_1)(x^{*\sigma(1)}\otimes x_{\sigma(1)})\dots(x^{*\sigma^{j-1}(1)}, x_{\sigma^{j-1}(1)})$$

schreiben.

Kommen in der Reihe (30) noch nicht alle Zahlen $(1\dots .n)$ vor, so wähle man eine Zahl μ, die nicht auftritt, und bilde entsprechend den Zykel

$$\sigma(\mu),\, \sigma^2(\mu)\dots\sigma^l(\mu) = \mu\,. \tag{32}$$

Dieser ist zum Zykel (30) elementfremd, und somit bestimmt er ein neues Teilprodukt

$$(x^{*\mu}, x_{\sigma(\mu)})\dots .(x^{*\sigma^{l-1}(\mu)}, x_\mu) = Sp[(x^{*\mu}\otimes x_\mu)\dots(x^{*\sigma^{l-1}(\mu)}\otimes x_{\sigma^{l-1}(\mu)})]\,.$$

Indem man so fortfährt, bis alle Zahlen $(1\dots n)$ erschöpft sind, erhält man für die invariante Funktion P die Darstellung

$$P(x^{*1}\otimes x_1,\dots x^{*p}\otimes x_p) = Sp[(x^{*1}\otimes x_1)\dots x^{*\sigma^{j-1}(1)}\otimes x_{\sigma^{j-1}(1)}]\,\cdot$$
$$Sp[x^{*\mu}\otimes x_\mu)\dots x^{*\sigma^{l-1}(\mu)}\otimes x_{\sigma^{l-1}(\mu)}]\dots$$

Da die Tensorprodukte $x^*\otimes x$ den ganzen Raum $L(E)$ erzeugen, folgt hieraus

$$P(\varphi_1,\dots\varphi_p) = Sp[\varphi_1\varphi_{\sigma(1)}\dots\varphi_{\sigma^{j-1}(1)}]\cdot Sp[\varphi_\mu\varphi_{\sigma(\mu)}\dots\varphi_{\sigma^{l-1}(\mu)}]\dots$$

Die Funktion P ist somit ein Produkt von Spuren, wobei jeder Faktor einem Zykel der Permutation σ entspricht und in jeder Spur so viele Abbildungen auftreten, als der Zykel Elemente besitzt. Speziell erhält man für die identische Permutation die Funktion

$$P(\varphi_1,\dots\varphi_p) = Sp\,\varphi_1\dots Sp\,\varphi_p$$

und für die zyklische Permutation $\sigma: v\to v+1 \pmod p$ die Funktion

$$P(\varphi_1,\dots\varphi_p) = Sp(\varphi_1\dots\varphi_p)\,.$$

LITERATUR

[1] W. Graeub: *Lineare Algebra.* Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1958.
[2] N. Bourbaki: *Eléments de mathématique.* Première partie, Livre II, Chap. III.
[3] H. Weyl: *The classical groups;* Princeton 1946.
[4] S. S. Chern: *Topics in Differential Geometry;* The Institute for advanced Study 1951.

(Eingegangen den 31. Mai 1960)