Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 34 (1960)

Artikel: Eine hinreichende Bedingung für die Regularität einer komplexen Funktion.

Autor: Meier, Kurt

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26623

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Eine hinreichende Bedingung für die Regularität einer komplexen Funktion

von KURT MEIER, Winterthur

I. Ist die komplexe Funktion $f(z)$ $(z = x + iy)$ im Gebiet G stetig, existieren ferner in jedem Punkt z von G partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$, welche die CAUCHY-RIEMANNsche Bedingung $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ erfüllen, so ist $f(z)$ in G regulär analytisch.

Das ist der Satz von LOOMAN-MENCHOFF[1]). Aus seinem Beweis geht unmittelbar hervor, daß die Voraussetzungen etwas abgeschwächt werden können. So ist eine abzählbare Menge von Punkten des Gebietes G zulässig, in welchen nur die Stetigkeit von $f(z)$ gefordert werden muß. Auch auf die Voraussetzung, daß die CAUCHY-RIEMANNsche Bedingung erfüllt ist, darf in den Punkten einer Menge vom Maß 0 verzichtet werden.

Im Gegensatz dazu strebt nun die vorliegende Arbeit eine gleichmäßige Abschwächung der Voraussetzungen in sämtlichen Punkten von G an. Es soll bewiesen werden, *daß für die Regularität von $f(z)$ im Gebiet G die folgenden Bedingungen hinreichen:*

$$f(z) \text{ sei stetig in } G\,. \tag{1}$$

Es existiere eine gegen 0 konvergierende Folge $r_1, r_2, r_3, \ldots$ von positiven Zahlen mit der Eigenschaft, daß in jedem Punkt z von G die Differenzenquotienten

$$\frac{f(z+r_\varkappa)-f(z)}{r_\varkappa}, \quad \frac{f(z+ir_\varkappa)-f(z)}{ir_\varkappa}, \quad \frac{f(z-r_\varkappa)-f(z)}{-r_\varkappa}, \quad \frac{f(z-ir_\varkappa)-f(z)}{-ir_\varkappa} \tag{2}$$

für $\varkappa \to \infty$ gegen den gleichen endlichen Grenzwert streben.

Der in den folgenden Abschnitten durchgeführte Beweis dieser Regularitätsbedingung stützt sich auf einen Satz von R. BAIRE[2]), den schon LOOMAN und MENCHOFF im selben Sinn angewendet haben: Ist die abgeschlossene Menge F Vereinigungsmenge einer Folge von abgeschlossenen Mengen F_μ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$, so gibt es eine Kreisscheibe K und eine natürliche Zahl m, für welche $0 \subset K \cdot F \subseteq F_m$ ist.

II. Die Punkte z des Gebietes G, in deren Umgebung $f(z)$ nicht überall regulär ist, bilden eine perfekte Menge F. Wir gehen von der Annahme aus, F sei nicht leer.

---

[1]) Der Beweis dieses Satzes ist dargestellt in [2], Seiten 9–16.

[2]) Vgl. [3], Seite 54.

Unter F_μ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ verstehen wir die Menge jener Punkte z von F, für welche $|f(z + r_\varkappa e^{i\varphi}) - f(z)| \leqslant \mu r_\varkappa$ immer dann gilt, wenn $\varkappa \geqslant \mu$ ist und φ einen der Werte $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ annimmt. Der Voraussetzung (1) zufolge sind die Mengen F_μ abgeschlossen. Ihre Vereinigungsmenge ist mit F identisch, denn wegen (2) gehört jeder Punkt von F mindestens einer der Mengen F_μ an.

Nach dem in Abschnitt I erwähnten Satz von R. BAIRE gibt es somit eine natürliche Zahl m, sowie eine Kreisscheibe $K(Z, 2R)$ mit dem Mittelpunkt Z und dem Radius $2R > 0$, für welche die Bedingungen $Z \in F$ und $0 \subset K \cdot F \subseteq F_m$ erfüllt sind.

Nun können wir die natürliche Zahl $M \geqslant m$ so festlegen, daß

$$|f(z + Re^{i\Phi}) - f(z)| \leqslant MR \tag{3}$$

unabhängig von Φ für jeden Punkt z von $K_0 = K(Z, R)$ gilt. Dies ist möglich, weil $f(z)$ in G stetig ist. Damit ist jetzt in jedem Punkt z von $F_0 = F \cdot K(Z, 2R)$ die Bedingung

$$|f(z + r_\varkappa e^{i\varphi}) - f(z)| \leqslant M r_\varkappa \tag{4}$$

immer dann erfüllt, wenn $\varkappa \geqslant m$ ist und φ einen der Werte $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ annimmt.

III. Unter der Voraussetzung, daß $f(z)$ in einer Umgebung des Punktes z_0 von K_0 regulär ist, soll in diesem Abschnitt die Gültigkeit von

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant M\,|z - z_0| \tag{5}$$

für $|z - z_0| \leqslant R$ nachgewiesen werden.

Setzen wir $D(z_0) = f'(z_0)$, so ist $D(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ eine in allen Punkten von G stetige Funktion. Ihr absoluter Betrag nimmt somit auf der Kreisscheibe $K(z_0, R)$ in einem Punkt ζ sein Maximum an. Für $|z - z_0| \leqslant R$ gilt daher

$$|D(z)| \leqslant |D(\zeta)|\ . \tag{6}$$

$D(z)$ ist in einer Umgebung jedes Punktes von $K(Z, 2R) - F_0$ regulär. Dies gilt insbesondere für z_0. ζ liegt infolgedessen entweder auf der Peripherie des Kreises $K(z_0, R)$ oder auf F_0. Im ersten Fall gilt wegen (3) $|D(\zeta)| \leqslant M$ und daraus folgt, unter Berücksichtigung von (6), die Ungleichung (5). Ist hingegen ζ ein innerer Punkt von $K(z_0, R)$, so verläuft der Beweis von (5) wie folgt:

Hat φ einen der Werte $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, so strebt gemäß Voraussetzung (2)

der Differenzenquotient $\dfrac{f(\zeta + r_\varkappa e^{i\varphi}) - f(\zeta)}{r_\varkappa e^{i\varphi}}$ für $\varkappa \to \infty$ gegen einen endlichen Grenzwert $a(\zeta)$. Unter den gleichen Bedingungen konvergiert somit

$$\frac{D(\zeta + r_\varkappa e^{i\varphi}) - D(\zeta)}{r_\varkappa e^{i\varphi}} = \frac{1}{\zeta - z_0 + r_\varkappa e^{i\varphi}} \left[\frac{f(\zeta + r_\varkappa e^{i\varphi}) - f(\zeta)}{r_\varkappa e^{i\varphi}} - D(\zeta)\right] \tag{7}$$

gegen den Grenzwert

$$A(\zeta) = \frac{a(\zeta) - D(\zeta)}{\zeta - z_0}. \tag{8}$$

Nun ist im weiteren Verlauf des Beweises die Annahme $D(\zeta) \neq 0$ erlaubt. Ist nämlich $D(\zeta) = 0$, so folgt aus (5) unmittelbar (6).

Es soll jetzt gezeigt werden, daß $A(\zeta) = 0$ ist. Zu diesem Zweck gehen wir von der Annahme $A(\zeta) \neq 0$ aus und leiten daraus einen Widerspruch her.

Für $\varphi = 0$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi = \pi$, $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$ ist nach (7) und (8)

$$D(\zeta + r_\varkappa e^{i\varphi}) = D(\zeta) + A(\zeta) r_\varkappa e^{i\varphi} + r_\varkappa \varepsilon(r_\varkappa) \tag{9}$$

wobei $\varepsilon(r_\varkappa)$ für $\varkappa \to \infty$ gegen 0 strebt. Es sei $A(\zeta) = |A| e^{i\alpha}$ $(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$ und $D(\zeta) = |D| e^{i\delta}$ $(0 \leqslant \delta < 2\pi)$. Wegen $A \neq 0$ und $D \neq 0$ sind die Argumente α und δ eindeutig bestimmt.

Von den in (9) für φ zulässigen Werten $0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}$ erfüllt sicher einer die Bedingung $\cos(\alpha - \delta + \varphi) > \frac{1}{2}$; wir bezeichnen ihn mit φ^*. Wegen $A \neq 0$ kann man die natürliche Zahl k so festlegen, daß $|\varepsilon(r_k)| < \dfrac{|A|}{2}$ und $r_k < R$ ist. Mit der neuen Bezeichnung $\zeta^* = \zeta + r_k e^{i\varphi^*}$ folgt somit aus (9)

$$e^{-i\delta} D(\zeta^*) = |D| + |A| r_k e^{i(\alpha - \delta + \varphi^*)} + r_k e^{-i\delta} \varepsilon(r_k). \tag{10}$$

Wegen $\cos(\alpha - \delta + \varphi^*) > \frac{1}{2}$ ist aber $\big||D| + |A| r_k e^{i(\alpha-\delta+\varphi^*)}\big| > |D| + \dfrac{|A| r_k}{2}$ und daraus folgt, unter Berücksichtigung von $|\varepsilon(r_k)| < \dfrac{|A|}{2}$, aus (10) $|D(\zeta^*)| > |D(\zeta)|$. Diese Ungleichung steht im Widerspruch zu (6), denn ζ^* ist ein Punkt von $K(z_0, R)$, und damit ist $A(\zeta) = 0$ bewiesen.

Aus (8) folgt jetzt $a(\zeta) = D(\zeta)$ und weiter aus (4) $|a(\zeta)| \leqslant M$. Somit ist auch $|D(\zeta)| \leqslant M$ und endlich wegen (6) $|D(z)| \leqslant M$ für $|z - z_0| \leqslant R$. Das ist aber gleichbedeutend mit der am Anfang dieses Abschnittes aufgestellten Behauptung (5).

IV. Zum Schluß legen wir die natürliche Zahl $k_0 \geqslant m$ so fest, daß $r_\varkappa \leqslant R$ für alle $\varkappa \geqslant k_0$ gilt. Damit erfüllt nach (4) und (5) die Funktion $f(z)$ in jedem

Punkt z_0 von K_0 die Bedingungen

$$|f(z+r_\varkappa)-f(z)| \leqslant M r_\varkappa, \qquad |f(z+ir_\varkappa)-f(z)| \leqslant M r_\varkappa$$

für jedes $\varkappa \geqslant k_0$.

Setzen wir $Q(z_0, r_\varkappa) = \dfrac{f(z_0+r_\varkappa)-f(z_0)}{r_\varkappa} - \dfrac{f(z_0+ir_\varkappa)-f(z_0)}{ir_\varkappa}$ so gilt folglich für $z_0 \in K_0$ und $\varkappa \geqslant k_0$

$$|Q(z_0, r_\varkappa)| \leqslant 2M \tag{11}$$

und weiter wegen (2)

$$\lim_{\varkappa \to \infty} Q(z_0, r_\varkappa) = 0 \tag{12}$$

Aus (1), (11) und (12) geht aber hervor, daß $f(z)$ in K_0 regulär analytisch sein muß[3]). Im Widerspruch dazu enthält aber K_0 den Punkt Z von F. Die am Anfang von Abschnitt II gemachte Annahme $F \supset 0$ trifft daher nicht zu, das heißt $f(z)$ ist im ganzen Gebiet G regulär.

Herrn Prof. W. SAXER bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit zu herzlichem Dank verpflichtet.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] KURT MEIER, *Über die Randwerte meromorpher Funktionen und hinreichende Bedingungen für Regularität von Funktionen einer komplexen Variablen*, Comment. Math. Helv., 24 (1952), 238–259.

[2] D. MENCHOFF, *Les conditions de monogénéité*, Actualités Sci. Ind. 329; Paris 1936.

[3] S. SAKS, *Theory of the Integral*, New York 1937.

(Eingegangen den 21. Februar 1959)

---

[3]) Dies geht aus einem Satz hervor, der schon unter wesentlich schwächeren Voraussetzungen die Regularität von $f(z)$ sichert. Vgl. [1], Seite 258.