Über Extremallängen auf geschlossenen Flächen.

Autor(en): **Blatter, Christian**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **35 (1961)**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-27340

Über Extremallängen auf geschlossenen Flächen

Von CHRISTIAN BLATTER, Basel

§ 1. Problemstellung und Ergebnisse

1.1. Sei $\mathfrak{T}$ eine geschlossene differentialgeometrische Fläche vom Typus des Torus. Dann gilt nach LOEWNER der folgende Satz[1]): Ist A der Flächeninhalt von $\mathfrak{T}$ und l das Infimum der Längen aller nicht nullhomologen Zyklen auf $\mathfrak{T}$, so gilt

$$\frac{l^2}{A} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} . \tag{1.1}$$

In der vorliegenden Arbeit soll dieser Satz auf geschlossene Flächen beliebigen Geschlechts $g \geqslant 1$ verallgemeinert werden. Hiezu läßt sich allerdings das Beweisverfahren LOEWNERs nicht heranziehen; denn es benutzt wesentlich die Tatsache, daß die geschlossenen Riemannschen Flächen vom Geschlecht $g = 1$ eine kontinuierliche Gruppe konformer Automorphismen besitzen. Wir werden unser Ergebnis vielmehr mit Hilfe eines allgemeinen Satzes über Extremallängen auf geschlossenen Riemannschen Flächen herleiten.

Wir geben zunächst eine eingehende Übersicht über unsere Methoden und Sätze.

1.2. Unter einer *differentialgeometrischen Fläche* $\mathfrak{F}$ verstehen wir eine zweidimensionale orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^n $(n \geqslant 3)$, auf der durch das Linienelement

$$ds = \sqrt{\Phi_{\mathfrak{F}}} \tag{1.2}$$

eine Differentialgeometrie festgelegt ist. Dabei bezeichnet

$$\Phi_{\mathfrak{F}} = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 ; \quad E, F, G \in C^2$$

eine positiv definite und gegenüber zulässigen Parametertransformationen invariante quadratische Differentialform.

Wir machen im folgenden entscheidend Gebrauch von der Tatsache, daß $\Phi_{\mathfrak{F}}$ auf der Fläche $\mathfrak{F}$ eine konforme Struktur induziert, vermöge welcher $\mathfrak{F}$ zu einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}$ wird. Das Linienelement (1.2) erscheint in den lokalen konformen Parametern ζ von $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}$ als

$$ds = \varrho_{\mathfrak{F}}(\zeta) \, | d\zeta | , \quad \varrho_{\mathfrak{F}}(\zeta) > 0 , \quad \varrho_{\mathfrak{F}} \in C^1 . \tag{1.3}$$

[1]) Unpubliziert; vgl. [1], p. 71.

Hieran schließt sich folgende Definition: Eine reelle, nichtnegative stetige quadratische Differentialform Φ auf einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ heißt eine *konforme Metrik* auf $\mathfrak{R}$, wenn $ds = \sqrt{\Phi}$ in den lokalen Parametern ζ von $\mathfrak{R}$ die Form

$$ds = \varrho(\zeta)\,|\,d\zeta\,|\,, \qquad \varrho(\zeta) \geqslant 0\,, \qquad \varrho \in C^0$$

annimmt.

1.3. Sei $\mathfrak{R}$ eine geschlossene Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geqslant 1$, sei M die Gesamtheit der konformen Metriken Φ auf $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Z}_0$ ein Element der Homologiegruppe H von $\mathfrak{R}$.

Ist für eine konforme Metrik $\Phi \in M$ A_Φ der Flächeninhalt von $\mathfrak{R}$ und

$$L_\Phi(\mathfrak{Z}_0) = \inf_{\mathfrak{z}_0 \in \mathfrak{Z}_0} \int_{\mathfrak{z}_0} ds$$

die *minimale Länge* aller Zyklen $\mathfrak{z}_0$ aus $\mathfrak{Z}_0$, so heißt

$$\lambda(\mathfrak{Z}_0) = \sup_{\Phi \in M} \frac{L_\Phi^2(\mathfrak{Z}_0)}{A_\Phi} \tag{1.4}$$

nach AHLFORS und BEURLING [2] die *Extremallänge* der Zyklen aus $\mathfrak{Z}_0$. Gilt für eine Metrik $\Phi_0 \in M$ die Beziehung

$$\frac{L_{\Phi_0}^2(\mathfrak{Z}_0)}{A_{\Phi_0}} = \lambda(\mathfrak{Z}_0)\,, \tag{1.5}$$

so heißt Φ_0 *Extremalmetrik* zur Klasse $\mathfrak{Z}_0$.

1.4. Es ist trivialerweise $\lambda(0) = 0$. Wir beweisen in den §§ 2–4 den

Satz 1. Ist ω das zur Klasse $\mathfrak{Z}_0 \neq 0$ duale harmonische Differential auf $\mathfrak{R}$, so gilt

$$\lambda(\mathfrak{Z}_0) = \|\,\omega\,\|^2\,; \tag{1.6}$$

und die konforme Metrik

$$\Phi_0 = |\,\omega + i * \omega\,|^2 \tag{1.7}$$

ist (bis auf einen konstanten Faktor) die einzige Extremalmetrik zur Klasse $\mathfrak{Z}_0$[2]).

1.5. Aus Satz 1 ergibt sich als Korollar noch der folgende

Satz 2. Ist λ_1 die zur Klasse $\mathfrak{Z}_1 = [\mathfrak{z}_1]$, λ_2 die zur Klasse $\mathfrak{Z}_2 = [\mathfrak{z}_2]$ gehörige Extremallänge, so gilt

$$\lambda_1 \lambda_2 \geqslant (\mathfrak{z}_1 \circ \mathfrak{z}_2)^2\,.$$

[2]) Für die Notation verweisen wir auf [3].

Beweis. Sind ω_1 und ω_2 die zu $\mathfrak{Z}_1$ und zu $\mathfrak{Z}_2$ dualen harmonischen Differentiale, so folgt nacheinander

$$\lambda_1\lambda_2 = \| \omega_1 \|^2 \| \omega_2 \|^2 = \| \omega_1 \|^2 \| - * \omega_2 \|^2 \geqslant (\omega_1 , - * \omega_2)^2$$
$$= [\omega_1 , \omega_2]^2 = (\mathfrak{z}_1 \circ \mathfrak{z}_2)^2 .$$

1.6. Den Schlüssel zur Lösung unseres ursprünglichen Problems bildet nun

Satz 3. Es gibt nur von g abhängige Konstanten σ_g mit der folgenden Eigenschaft: Auf jeder geschlossenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ vom Geschlecht $g \geqslant 1$ gibt es eine Klasse $\mathfrak{Z}_0 \in H$, $\mathfrak{Z}_0 \neq 0$, mit

$$\lambda(\mathfrak{Z}_0) \leqslant \sigma_g . \tag{1.8}$$

1.7. *Beweis.* Seien

$$\{\mathfrak{z}_1 , \ldots , \mathfrak{z}_{2g}\} \tag{1.9}$$

eine kanonisch konjugierte Homologiebasis auf $\mathfrak{R}$ und $\omega_1 , \ldots , \omega_{2g}$ die zu den Basiszyklen dualen harmonischen Differentiale. Das zum Zyklus

$$\mathfrak{z} = \sum_{i=1}^{2g} n_i \mathfrak{z}_i , \qquad n_i \quad \text{ganz} \quad (1 \leqslant i \leqslant 2g)$$

duale harmonische Differential ω ist dann gegeben durch

$$\omega = \sum_{i=1}^{2g} n_i \omega_i$$

und somit die Extremallänge zur Klasse $\mathfrak{Z} = [\mathfrak{z}]$ durch

$$\lambda(\mathfrak{Z}) = \| \omega \|^2 = \sum_{i,k=1}^{2g} n_i n_k (\omega_i , \omega_k) . \tag{1.10}$$

1.8. Nach MINKOWSKI[3]) gibt es eine nur von g abhängige Zahl σ_g,

$$0 < \sigma_g < \frac{2}{\pi} \sqrt[g]{(g+1)!} \sim \frac{2g}{\pi e} \, {}^{4)} ,$$

mit der folgenden Eigenschaft: Zu jeder positiv definiten quadratischen Form $\Psi(x_1 , \ldots , x_{2g})$ in $2g$ Variablen der Determinante $\det \Psi = 1$ gibt es einen Gitterpunkt $(n_1 , \ldots , n_{2g}) \neq (0 , \ldots , 0)$ mit $\Psi(n_1 , \ldots , n_{2g}) \leqslant \sigma_g$.

Es genügt daher, zu zeigen, daß die Matrix $\Omega = ((\omega_i , \omega_k))$ die Voraussetzungen dieses Satzes von MINKOWSKI erfüllt.

Ist $S = (s_{lk})$ die Schnittmatrix der Basis (1.9), so gilt

$$s_{lk} = \mathfrak{z}_l \circ \mathfrak{z}_k = \int_{\mathfrak{z}_l} \omega_k \quad (1 \leqslant l,\ k \leqslant 2g) . \tag{1.11}$$

---

[3]) Siehe zum Beispiel [4], p. 23.

[4]) Diese Abschätzung stammt von BLICHFELDT; vgl. [4], p. 24.

Ferner gehört zur Basis (1.9) die die Transformation $*$ erzeugende Matrix $T = (t_{il})$: Für jedes harmonische Differential φ ist

$$\mathfrak{z}_i * \varphi = \sum_{l=1}^{2g} t_{il} \mathfrak{z}_l \varphi \qquad (1 \leqslant i \leqslant 2g) . \tag{1.12}$$

Wegen $(\omega_i, \omega_k) = [\omega_i, * \omega_k] = \mathfrak{z}_i * \omega_k$ folgt nun aus (1.12) mit $\varphi = \omega_k$ und (1.11)

$$(\omega_i, \omega_k) = \sum_{l=1}^{2g} t_{il} \mathfrak{z}_l \omega_k = \sum_{l=1}^{2g} t_{il} s_{lk} \qquad (1 \leqslant i, k \leqslant 2g) ,$$

das heißt aber

$$\Omega = TS . \tag{1.13}$$

Aus der speziellen Gestalt der Schnittmatrix zur Basis (1.9) ergibt sich einerseits unmittelbar $\det S = 1$; anderseits folgt aus $** \varphi = - \varphi$, das heißt $T^2 = - E$, die Relation $\det T = \pm 1$. Da Ω nach (1.10) positiv definit ist, folgt mit (1.13): $\det \Omega = 1$.

1.9. Aus Satz 3 ergibt sich nun unmittelbar die angekündigte Verallgemeinerung des obigen Satzes von LOEWNER:

Satz 4. Ist $\mathfrak{F}$ eine geschlossene differentialgeometrische Fläche vom Geschlecht $g \geqslant 1$, ist A der Flächeninhalt von $\mathfrak{F}$ und l das Infimum der Längen aller nicht nullhomologen Zyklen auf $\mathfrak{F}$, so gilt

$$\frac{l^2}{A} \leqslant \sigma_g .$$

Hierin ist (1.1) enthalten; denn es ist $\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ [5]). Aus unserer Herleitung geht allerdings nicht hervor, daß die Abschätzung (1.1) scharf ist[6]).

1.10. Zum *Beweis* von Satz 4 betrachten wir auf der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}$ eine durch (1.8) charakterisierte Homologieklasse $\mathfrak{Z}_0$. Wegen (1.3) ist $\Phi_{\mathfrak{F}} \in M$, so daß mit (1.4) folgt

$$\frac{L^2_{\Phi_{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{Z}_0)}{A_{\Phi_{\mathfrak{F}}}} \leqslant \sigma_g ;$$

anderseits gilt trivialerweise

$$l = \inf_{\mathfrak{Z} \in H} L_{\Phi_{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{Z}) \leqslant L_{\Phi_{\mathfrak{F}}}(\mathfrak{Z}_0) .$$

---

[5]) Vgl. [4], p. 24.

[6]) Für den Torus von konstanter Krümmung 0, den man aus einem euklidischen Rhombus vom Innenwinkel 60° durch paarweise Identifizierung der Gegenseiten erhält, gilt in (1.1) ersichtlich die Gleichheit.

1.11. Die Sätze 1 und 4 dieser Arbeit wurden (ohne Beweis) bereits in den Comptes Rendus [5] veröffentlicht.

Ich danke Herrn Prof. Dr. H. Huber für zahlreiche Hinweise und Verbesserungen.

§ 2. Die durch ω erzeugte Zerlegung von $\mathfrak{R}$

2.1. Im folgenden bezeichne durchwegs $\mathfrak{R}$ eine geschlossene Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geqslant 1$, ω das zur Homologieklasse $\mathfrak{Z}_0 \neq 0$ duale harmonische Differential auf $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{z}_0$ einen Zyklus aus $\mathfrak{Z}_0$.

Ist das Gebiet $G \subset \mathfrak{R}$ einfach zusammenhängend und $p \in G$, so vermittelt das Integral

$$z = z_p(p') = \int_p^{p'} (\omega + i * \omega) \qquad (p' \in G),\ p \in G \tag{2.1}$$

(die Integrationswege sollen in G verlaufen) eine konforme Abbildung von G in die z-Ebene, $z = x + iy$. Jede Abbildung (2.1) heißt eine *kanonische Darstellung* von G.

2.2. Die Punkte, in denen ω nicht verschwindet, heißen *gewöhnliche Punkte* von ω; jeder gewöhnliche Punkt $p \in \mathfrak{R}$ besitzt eine Umgebung $V(p)$, die durch die kanonische Darstellung z_p uniformisiert wird.

Die Nullstellen von ω heißen *kritische Punkte;* sie bilden eine endliche Menge $Q = \{q_i\}_{1 \leqslant i \leqslant s}$. Die Funktion $z_{q_i}(p')$ besitzt bei $p' = q_i$ eine Nullstelle der Ordnung $n_i > 1$. Es gibt daher eine Umgebung $V(q_i)$, die durch den Parameter t_i mit

$$z_{q_i}(p') = t_i^{n_i}(p') \qquad (p' \in V(q_i),\quad 1 \leqslant i \leqslant s) \tag{2.2}$$

uniformisiert wird.

2.3. Das System $\Sigma = \{V(p)\}_{p \in \mathfrak{R}}$ bildet offenbar eine Überdeckung von $\mathfrak{R}$. Führt man in jedem $V(p) \in \Sigma$ z_p als Parameter ein, so erhalten die Überlappungsrelationen durchwegs die Form

$$z_{p_1}(p') = z_{p_2}(p') + c \qquad (p' \in V(p_1) \cap V(p_2))\ . \tag{2.3}$$

Dabei müssen wir allerdings stets im Auge behalten, daß die kanonische Darstellung z_{q_i} von $V(q_i)$ $(q_i \in Q)$ nach (2.2) im Ursprung einen n_i-fachen Windungspunkt besitzt.

2.4. Die Überlappungsrelationen (2.3) ermöglichen folgende Definition: Ein 2-Simplex $\Delta \subset \mathfrak{R}$ heißt *euklidisches Dreieck*, wenn es in der kanonischen Darstellung als schlichtes euklidisches Dreieck erscheint.

Wir konstruieren nun auf $\mathfrak{R}$ eine aus euklidischen Dreiecken bestehende Triangulation $T = \{\Delta_i\}_{1 \leqslant i \leqslant N}$. In der Nähe der kritischen Punkte $q_i \in Q$ verfahren wir dabei folgendermaßen: Wir betrachten die n_i-blättrige kanonische Darstellung z_{q_i} von $V(q_i)$ und wählen den Punkt $z = 0$ sowie in jedem Blatt die vier Punkte $z = \pm\, \delta$, $\pm\, i\,\delta$ (für ein hinreichend kleines $\delta > 0$) als Eckpunkte, in jedem Blatt die verbindenden Achsenabschnitte sowie die Strecken $|\,x\,| + |\,y\,| = \delta$ als Kanten der Triangulation. Dann wird q_i von $4 n_i$ euklidischen Dreiecken umgeben. Die Triangulierung der Restfläche bietet keine Schwierigkeiten, da dort die kanonische Darstellung im kleinen schlicht ist.

Die Triangulation T sei dabei so fein, daß für die euklidische Länge der Kanten τ_k gilt

$$|\,\tau_k\,| < 1 \quad \left(1 \leqslant k \leqslant \frac{3N}{2}\right). \tag{2.4}$$

2.5. Durch

$$\omega = 0 \tag{2.5}$$

wird auf $\mathfrak{R} - Q$ ein Richtungsfeld erklärt. Seine Integralkurven nennen wir die *Feldlinien* von ω, sie sind nichts anderes als die Niveaulinien der zu ω gehörigen harmonischen Integralfunktionen. Die Schar der Feldlinien bezeichnen wir mit Γ.

Es gilt für den Parameter z, wie man leicht an (2.1) verifiziert,

$$\omega = dx\,, \quad *\,\omega = dy\,. \tag{2.6}$$

Die Feldlinien erscheinen somit in der kanonischen Darstellung als Geraden $x = \text{const.}$; wegen der Gestalt (2.3) der Überlappungsrelationen ist ihnen damit ein positiver Richtungssinn sowie die Längenmessung der z-Ebene invariant aufgeprägt:

$$ds = |\,dy\,|\,. \tag{2.7}$$

2.6. Um das Verhalten des Feldes in der Nähe eines kritischen Punktes q_i zu untersuchen, betrachten wir die kanonische Darstellung z_{q_i} von $V(q_i)$. Man sieht sofort, daß in jedem der n_i Blätter die positive imaginäre Halbachse eine in q_i beginnende und die negative imaginäre Halbachse eine in q_i endende Feldlinie darstellen. Alle andern Feldlinien gehen an q_i vorbei.

Feldlinien, die in einem $q_i \in Q$ beginnen bzw. enden, heißen *links* bzw. *rechts singulär;* wir denken sie uns durch das betreffende q_i (einseitig) abgeschlossen. Alle übrigen Feldlinien heißen *regulär;* sie lassen sich in eindeutiger Weise auf $\mathfrak{R}$ nach beiden Richtungen unbeschränkt fortsetzen.

2.7. Die Komponenten des Durchschnitts der Feldlinie γ mit dem Dreieck $\Delta_i \in T$ heißen die *Spuren* von γ in diesem Dreieck. Offenbar bildet die

Menge der durch die Feldlinien erzeugten Spuren in jedem Δ_i eine Parallelschar.

2.8. Lemma 1. Jedes $\gamma \in \Gamma$ erzeugt in jedem $\Delta_i \in T$ höchstens eine Spur.

Beweis. Erzeuge γ etwa im Dreieck Δ_1 zwei verschiedene Spuren. Wir wählen auf der ersten Spur einen Punkt p_1, auf der zweiten einen Punkt p_2 und verbinden p_2 mit p_1 durch einen in Δ_1 verlaufenden Querbogen, so daß wir zusammen mit dem von p_1 nach p_2 laufenden Wegstück von γ einen Zyklus $\mathfrak{z}'$ erhalten. Da längs γ stets $\omega = 0$ ist, folgt

$$\int_{\mathfrak{z}'} \omega = \int_{p_2}^{p_1} \omega . \tag{2.8}$$

Hier stellt der Betrag der rechten Seite nach (2.6) den euklidischen Abstand d der beiden Spuren, gemessen in dem Parameter z, dar. Nun ist einerseits wegen (2.4) $d < 1$; anderseits aber ist die linke Seite von (2.8) gleich $\mathfrak{z}' \circ \mathfrak{z}_0$ und daher ganz. Somit ist $d = 0$. Dies widerspricht aber unserer Voraussetzung; denn verschiedene Spuren in Δ_1 haben positiven Abstand.

2.9. Satz A. Jedes $\gamma \in \Gamma$ ist entweder beidseitig singulär oder geschlossen.

Beweis. Es genügt offenbar, folgendes zu zeigen: Jedes $\gamma \in \Gamma$, das sich unbeschränkt auf $\mathfrak{R}$ etwa in positiver Richtung fortsetzen läßt, ist geschlossen.

In der Tat: Da die Feldlinie γ jedes $\Delta_i \in T$ glatt durchsetzt, kann sie insbesondere immer in ein nächstes $\Delta_{i'}$, $i' \neq i$, fortgesetzt werden. Wegen der Endlichkeit der Triangulation folgt hieraus, daß γ wenigstens ein Δ_{i_0} zweimal durchsetzt. Wenden wir Lemma 1 auf γ und Δ_{i_0} an, so ergibt sich die Behauptung.

2.10. Eine reguläre Feldlinie heißt in der Folge ein *Feldzyklus*. Für jeden Feldzyklus $\mathfrak{z}$ ist nach (2.6) und nach Definition des positiven Richtungssinns

$$\mathfrak{z} * \omega > 0 ; \tag{2.9}$$

die Feldzyklen sind daher insbesondere nicht nullhomolog.

2.11. Wir denken uns nun die Fläche $\mathfrak{R}$ längs der singulären Feldlinien oder aber, wenn solche fehlen, längs eines beliebig herausgegriffenen Feldzyklus aufgeschnitten. Es entstehen offene Teilflächen $\mathfrak{R}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, $m \geqslant 1$, die je eine singularitätenfreie Schar Γ_i von Feldzyklen $\mathfrak{z}_i$ tragen.

2.12. Lemma 2. Jedes $\mathfrak{R}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ besitzt eine kontinuierliche Gruppe G konformer Automorphismen.

Beweis. Für jedes reelle s wird durch die folgende Vorschrift ein Automorphismus T_s von $\mathfrak{R}_i$ erklärt: Jeder Punkt $p \in \mathfrak{R}_i$ soll auf der durch p gehenden Feldlinie um die Länge $|s|$ in der durch $\operatorname{sgn} s$ gegebenen Richtung verschoben werden.

Nun ist p mit seinem Bild p' verknüpft durch die Relation

$$\int_p^{p'} (\omega + i * \omega) = is ,$$

die man durch Trennung von Real- und Imaginärteil an (2.5) bzw. (2.6) und (2.7) leicht verifiziert. Hieraus ergibt sich aber nach (2.1) für die zu p' und zu p gehörigen Parameterdifferentiale: $dz' - dz = 0$.

2.13. Lemma 3. Jedes $\mathfrak{R}_i\,(1 \leqslant i \leqslant m)$ ist einem Kreisring konform äquivalent.

Beweis. Auf $\mathfrak{R}_i$ gibt es kompakte nicht nullhomologe Zyklen, nämlich die $\mathfrak{z}_i \in \Gamma_i$. Hieraus folgt mit Lemma 2 und einem bekannten Satz über die Automorphismengruppe einer Riemannschen Fläche, daß $\mathfrak{R}_i$ entweder einem Kreisring oder dem punktierten Einheitskreis oder endlich der zweifach punktierten Zahlenkugel konform äquivalent ist.

Es gibt daher eine konforme Abbildung T, die $\mathfrak{R}_i$ in ein Ringgebiet

$$\mathfrak{R}_i^* = \{t \mid e^a < |t| < e^b\}, \quad -\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$$

der t-Ebene überführt. Der Streifen

$$\mathfrak{S}_i = \{\zeta = \xi + i\eta \mid a < \xi < b\}$$

der ζ-Ebene wird vermöge $t = A(\zeta) = e^\zeta$ universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}_i^*$ und somit vermöge $T^{-1}A$ universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}_i$. Die zyklische Gruppe der Decktransformationen von $\mathfrak{S}_i$ wird dabei erzeugt durch die Translation

$$\zeta \to \zeta + 2\pi i\,. \tag{2.10}$$

Anderseits ist $*\omega$ ein auf $\mathfrak{R}_i$ exaktes Differential endlicher Norm, und zwar ist $*\omega$ auf $\mathfrak{R}_i$ nicht cohomolog null, wenn anders (2.9) gelten soll. Erscheint daher ω auf $\mathfrak{S}_i$ in der Gestalt

$$\omega = P(\xi, \eta)d\xi + Q(\xi, \eta)d\eta\,, \tag{2.11}$$

so ist wegen (2.10)

$$\int_0^{2\pi} P(\xi, \eta)d\eta = \alpha \neq 0 \qquad (a < \xi < b)\,. \tag{2.12}$$

Wir erhalten nunmehr für die Norm von $*\omega$ bezüglich $\mathfrak{R}_i$:

$$2\pi \| *\omega \|^2_{\mathfrak{R}_i} = 2\pi \int_a^b \int_0^{2\pi} (P^2 + Q^2) d\xi d\eta$$

$$\geqslant \int_a^b \Big(2\pi \int_0^{2\pi} P^2 d\eta\Big) d\xi \geqslant \int_a^b \Big(\int_0^{2\pi} P d\eta\Big)^2 d\xi ,$$

nach (2.12) somit

$$2\pi \| *\omega \|^2_{\mathfrak{R}_i} \geqslant (b-a)\alpha^2 ,$$

woraus sich die Behauptung des Lemmas unmittelbar ergibt.

2.14. Es ist $T(\Gamma_i)$ die Schar der konzentrischen Kreise; denn die $\mathfrak{z}_i \in \Gamma_i$ werden durch die Automorphismen $T_s \in G$ in sich übergeführt, und diese Eigenschaft haben bei der entsprechenden Gruppe von $\mathfrak{R}_i^*$ genau die Kreise $|t| = \text{const.}$

In $\mathfrak{S}_i$ erscheinen daher die Feldlinien als Geraden $\xi = \text{const.}$, so daß mit (2.5) und (2.11) folgt

$$\omega = P(\xi, \eta) d\xi .$$

Da ω harmonisch ist und nicht identisch verschwindet, ergibt sich hieraus für ein reelles $c \neq 0$:

$$\omega = c\, d\xi \qquad (\zeta \in \mathfrak{S}_i) .$$

2.15. Wir setzen nunmehr $z = c\zeta + d$; dann gilt bei geeigneter Wahl von d:

Lemma 4. (I) $\mathfrak{R}_i$ wird repräsentiert durch einen rechteckigen Fundamentalbereich

$$\mathfrak{B}_i = \{z = x + iy \mid 0 < x < h_i , \quad 0 < y < l_i\} . \tag{2.13}$$

(II) Dabei entspricht jedem $\mathfrak{z}_i \in \Gamma_i$ eine Parallele zu den (senkrechten) Längsseiten von $\mathfrak{B}_i$.

(III) Es gilt (2.6).

(IV) Es ist

$$l_i = \mathfrak{z}_i * \omega . \tag{2.14}$$

Beweis. Die Behauptungen (I), (II) und (III) ergeben sich aus 2.13 und 2.14, (IV) folgt aus (II) und (III).

2.16. Der Inbegriff des in den Lemmata 3 und 4 ausgesprochenen Sachverhaltes heiße die *durch ω erzeugte Zerlegung der Fläche* $\mathfrak{R}$. Mit Rücksicht auf Lemma 4 (III) wollen wir ferner $\mathfrak{B}_i$ als *kanonische Darstellung von* $\mathfrak{R}_i$ bezeichnen[7]).

[7]) Dies ist eine triviale Erweiterung der in 2.1 gegebenen Definition.

2.17. Wir betrachten nun ein beliebiges auf $\mathfrak{R}$ exaktes Differential φ. Erscheint φ in der kanonischen Darstellung (2.13) von $\mathfrak{R}_i$ als

$$\varphi = a(x, y)dx + b(x, y)dy ,$$

so ist nach Lemma 4 (II) für jedes $\mathfrak{z}_i \in \Gamma_i$

$$\mathfrak{z}_i\varphi = \int_0^{l_i} b(x, y)dy \qquad (0 < x < h_i) .$$

Es ergibt sich daher

$$h_i\mathfrak{z}_i\varphi = \int_0^{h_i}\int_0^{l_i} b\,dy\,dx = \iint_{\mathfrak{B}_i} \omega \wedge \varphi ,$$

wie aus (2.6) und der Definition des äußeren Produkts unmittelbar folgt. Es gilt somit

$$h_i\mathfrak{z}_i\varphi = [\omega, \varphi]_{\mathfrak{R}_i} .$$

Durch Summation über alle $\mathfrak{R}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ erhält man

$$(\sum_{i=1}^{m} h_i\mathfrak{z}_i)\varphi = [\omega, \varphi] \tag{2.15}$$

und nach Definition des dualen Differentials somit

$$(\sum_{i=1}^{m} h_i\mathfrak{z}_i)\varphi = \mathfrak{z}_0\varphi .$$

Da dies für jedes exakte Differential φ gilt, erhalten wir den

Satz B. Ist ω das zur Klasse $\mathfrak{Z}_0 \neq 0$ duale harmonische Differential, so gilt für die durch ω erzeugte Zerlegung von $\mathfrak{R}$:

$$\sum_{i=1}^{m} h_i\mathfrak{z}_i \sim \mathfrak{z}_0 . \tag{2.16}$$

Setzt man in (2.15) speziell $\varphi = *\omega$, so folgt noch zusammen mit (2.16)

$$\mathfrak{z}_0 * \omega = \|\omega\|^2 . \tag{2.17}$$

§ 3. Topologische Hilfssätze

3.1. In diesem Paragraphen wird ein Zahlen-m-tupel $(x_1, \ldots, x_m)$ jeweils mit der zugehörigen Majuskel X abgekürzt und als *Vektor* bezeichnet. Ein Vektor X heißt *ganzzahlig*, wenn die x_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ ganz sind, *positiv*, wenn $X \neq 0$ ist und alle $x_i \geqslant 0$ sind. Die Anzahl der nicht verschwindenden Komponenten von X heißt die *Ordnung* von X.

3.2. Lemma 5. Ist $\{\mathfrak{z}_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$ ein System von paarweise punktfremden und zusammen $\mathfrak{R}$ nicht zerlegenden Rückkehrschnitten auf $\mathfrak{R}$, dann gibt es ein System $\{\mathfrak{z}'_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$ von Zyklen, so daß gilt

$$\mathfrak{z}_i \circ \mathfrak{z}'_j = \delta_{ij} \quad (1 \leqslant i, j \leqslant m) . \tag{3.1}$$

Beweis. Da die $\mathfrak{z}_i$ die Fläche nicht zerlegen, läßt sich jedes $p_2 \in \mathfrak{R}$ mit jedem $p_1 \in \mathfrak{R} - p_1, p_2 \notin \mathfrak{z}_i \ (1 \leqslant i \leqslant m)$ – durch einen Weg verbinden, der kein $\mathfrak{z}_i$ trifft. Zur Konstruktion von $\mathfrak{z}'_i$ wähle man nun in einer Umgebung $U \subset \mathfrak{R}$, die von $\mathfrak{z}_i$ durchsetzt wird, p_1 auf dem rechten, p_2 auf dem linken Ufer von $\mathfrak{z}_i$. Indem man zunächst p_1 mit p_2 durch einen in U verlaufenden, mithin $\mathfrak{z}_i$ einmal schneidenden Weg γ_1 verbindet und anschließend p_2 mit p_1 durch einen zu allen $\mathfrak{z}_j \ (1 \leqslant j \leqslant m)$ punktfremden Weg γ_2, erhält man das gesuchte $\mathfrak{z}'_i$ als

$$\mathfrak{z}'_i = \gamma_1 + \gamma_2 \, .$$

3.3. Lemma 6. Ist $\{\mathfrak{z}_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$ ein System von paarweise punktfremden und homolog unabhängigen Rückkehrschnitten auf $\mathfrak{R}$, gilt ferner für einen weiteren Zyklus $\mathfrak{z}_0$ die Homologie

$$\mathfrak{z}_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i \mathfrak{z}_i \, , \tag{3.2}$$

so ist der Vektor $C = (c_1, \ldots, c_m)$ ganzzahlig.

Beweis. Die $\mathfrak{z}_i$ zerlegen zusammen die Fläche nicht: Da sie einfach geschlossen sind, kommen für eine Zerlegung von $\mathfrak{R}$ jedenfalls nicht geschlossene Teile der $\mathfrak{z}_i$ in Frage. Aus der Unabhängigkeit der $\mathfrak{z}_i$ selbst folgt aber insbesondere

$$\sum_{i=1}^{m} e_i \mathfrak{z}_i \not\sim 0 \qquad (e_i \in \{-1, 0, 1\}, E \neq 0) \, .$$

Nach Lemma 5 gibt es nunmehr Zyklen $\mathfrak{z}'_i \ (1 \leqslant i \leqslant m)$, für die (3.1) gilt. Schneidet man die Relation (3.2) mit $\mathfrak{z}'_j$, so folgt

$$\mathfrak{z}_0 \circ \mathfrak{z}'_j = c_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant m)$$

und damit die Behauptung.

3.4. Lemma 7. Ist $\{\mathfrak{z}_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$ ein System von paarweise punktfremden Rückkehrschnitten auf $\mathfrak{R}$ und gilt für einen nicht nullhomologen Zyklus $\mathfrak{z}_0$ und einen positiven Vektor C die Homologie

$$\mathfrak{z}_0 \sim \sum_{i=1}^{m} c_i \mathfrak{z}_i \, , \tag{3.3}$$

so gibt es einen positiven ganzzahligen Vektor $A = (a_1, \ldots, a_m)$ mit

$$\mathfrak{z}_0 \sim \sum_{i=1}^{m} a_i \mathfrak{z}_i\,; \quad a_i = 0\,, \quad \text{wenn} \quad c_i = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant m)\,.$$

Es genügt offenbar, den folgenden Reduktionssatz zu beweisen:

Lemma 7'. Gilt für einen positiven Vektor C der Ordnung $k \leqslant m$ die Homologie (3.3) und ist C nicht ganzzahlig, so läßt sich C ersetzen durch einen positiven Vektor C' kleinerer Ordnung. Dabei ist insbesondere

$$c_i' = 0\,, \quad \text{wenn} \quad c_i = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant m)\,. \tag{3.4}$$

3.5. *Beweis.* Ist C nicht ganzzahlig, so besteht nach Lemma 6, angewandt auf die Summe der nicht verschwindenden Terme in (3.3), eine Relation

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \mathfrak{z}_i \sim 0\,; \quad b_i = 0\,, \quad \text{wenn} \quad c_i = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant m)\,, \tag{3.5}$$

mit wenigstens einem positiven b_i. Es gibt daher ein $\mu > 0$, so daß für ein i_0, $c_{i_0} > 0$, gilt

$$c_{i_0}' = c_{i_0} - \mu b_{i_0} = 0\,,$$

im übrigen aber

$$c_i' = c_i - \mu b_i \geqslant 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant m)\,. \tag{3.6}$$

Mit (3.3) und (3.5) folgt nun

$$\mathfrak{z}_0 \sim \sum_{i=1}^{m} c_i \mathfrak{z}_i - \sum_{i=1}^{m} \mu b_i \mathfrak{z}_i \sim \sum_{i=1}^{m} c_i' \mathfrak{z}_i\,.$$

Da $\mathfrak{z}_0$ nicht nullhomolog ist, ist der Vektor C' positiv. Ferner folgt aus (3.5) und (3.6) die Relation (3.4); endlich ist $c_{i_0}' = 0$, während $c_{i_0} > 0$ war.

3.6. Wenn wir in jedem $\mathfrak{R}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ der durch ω erzeugten Zerlegung von $\mathfrak{R}$ einen Feldzyklus $\mathfrak{z}_i$ als Repräsentanten auswählen, erhalten wir ein System $\{\mathfrak{z}_i\}_{1 \leqslant i \leqslant m}$ von paarweise punktfremden Rückkehrschnitten auf $\mathfrak{R}$. Für diese $\mathfrak{z}_i$ gilt die Homologie (2.16) von Satz B, und es ist nach (2.17) und (2.9)

$$\mathfrak{z}_i * \omega > 0 \quad (0 \leqslant i \leqslant m)\,. \tag{3.7}$$

3.7. Wir verfeinern in § 4 die Zerlegung von $\mathfrak{R}$ mit Hilfe des

Lemma 8. Es gibt positive ganzzahlige Vektoren $A_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jm})$ $(1 \leqslant j \leqslant k_0)$ und Gewichte

$$\mu_j > 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant k_0)\,, \quad \sum_{j=1}^{k_0} \mu_j = 1\,, \tag{3.8}$$

so daß gilt

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji}\mathfrak{z}_i \sim \mathfrak{z}_0 \quad (1 \leqslant j \leqslant k_0)\,, \tag{3.9}$$

$$\sum_{j=1}^{k_0} \mu_j a_{ji} = h_i \quad (1 \leqslant i \leqslant m)\,, \quad \text{bzw.} \quad \sum_{j=1}^{k_0} \mu_j A_j = H\,. \tag{3.10}$$

Es genügt offenbar, den folgenden Reduktionssatz zu beweisen:

Lemma 8′. Gibt es für ein k, $0 \leqslant k < m$, positive ganzzahlige Vektoren $A_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jm})$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ mit

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji}\mathfrak{z}_i \sim \mathfrak{z}_0 \quad (1 \leqslant j \leqslant k) \tag{3.11}$$

und positive Zahlen μ_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$, so daß der Vektor

$$R_k = H - \sum_{j=1}^{k} \mu_j A_j \tag{3.12}$$

positiv ist[8]), dann gibt es einen positiven ganzzahligen Vektor A_{k+1} mit

$$\sum_{i=1}^{m} a_{k+1,i}\mathfrak{z}_i \sim \mathfrak{z}_0$$

und ein $\mu_{k+1} > 0$, so daß der Vektor

$$R_{k+1} = H - \sum_{j=1}^{k+1} \mu_j A_j$$

entweder positiv ist, aber kleinere Ordnung besitzt als R_k, *oder* verschwindet, wobei gleichzeitig gilt

$$\sum_{j=1}^{k+1} \mu_j = 1\,. \tag{3.13}$$

3.8. *Beweis.* Mit (3.12) gilt

$$\sum_{i=1}^{m} r_{ki}\mathfrak{z}_i \sim \sum_{i=1}^{m} h_i\mathfrak{z}_i - \sum_{j=1}^{k} \mu_j \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ji}\mathfrak{z}_i\Big)\,,$$

wegen (2.16) und (3.11) daher

$$\sum_{i=1}^{m} r_{ki}\mathfrak{z}_i \sim \Big(1 - \sum_{j=1}^{k} \mu_j\Big)\mathfrak{z}_0\,. \tag{3.14}$$

Da R_k positiv ist, folgt wegen (3.7) $1 - \sum_{j=1}^{k} \mu_j > 0$ und somit

$$\mathfrak{z}_0 \sim \sum_{i=1}^{m} \frac{r_{ki}}{1 - \sum_{j=1}^{k} \mu_j}\,\mathfrak{z}_i\,.$$

---

[8]) Diese Voraussetzungen sind für $k = 0$ trivialerweise erfüllt, da H positiv ist.

Nach Lemma 7 existiert nunmehr ein positiver ganzzahliger Vektor A_{k+1} mit

$$\sum_{i=1}^{m} a_{k+1,i}\mathfrak{z}_i \sim \mathfrak{z}_0\,; \quad a_{k+1,i} = 0\,, \quad \text{wenn} \quad r_{ki} = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant m)\,. \tag{3.15}$$

Mit (3.14) folgt hieraus für zunächst unbestimmtes μ_{k+1} die Homologie

$$\sum_{i=1}^{m}(r_{ki} - \mu_{k+1}a_{k+1,i})\mathfrak{z}_i \sim (1 - \sum_{j=1}^{k+1}\mu_j)\mathfrak{z}_0\,. \tag{3.16}$$

Nun kann wegen (3.15) $\mu_{k+1} > 0$ so bestimmt werden, daß für ein i_0, $r_{ki_0} > 0$, gilt

$$r_{k+1,i_0} = r_{ki_0} - \mu_{k+1}a_{k+1,i_0} = 0\,,$$

im übrigen aber

$$r_{k+1,i} = r_{ki} - \mu_{k+1}a_{k+1,i} \geqslant 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant m)\,.$$

Dann hat der Vektor R_{k+1} kleinere Ordnung als R_k. Ist nun R_{k+1} positiv, so ist nichts mehr zu beweisen; ist aber $R_{k+1} = 0$, so folgt aus (3.16) und (3.7) die Relation (3.13).

§ 4. Beweis von Satz 1

4.1. Wir betrachten von neuem die in Lemma 4 beschriebene kanonische Darstellung der $\mathfrak{R}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ als Rechtecke (2.13).

Wir entnehmen nun Lemma 8 die $j = 1$ entsprechende Darstellung (3.9) des Zyklus $\mathfrak{z}_0$ und schneiden von jedem Rechteck $\mathfrak{B}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ a_{1i} Streifen der Breite μ_1 ab. Dann legen wir diese Streifen (ohne sie zu drehen) mit den Stirnseiten aneinander in eine Reihe und erhalten ein rechteckiges Band der Breite μ_1, seine Länge ist nach (2.14) und (3.9) gleich $\mathfrak{z}_0 * \omega$. Auf diese Weise verfahren wir für alle j $(1 \leqslant j \leqslant k_0)$; durch (3.10) ist dafür gesorgt, daß dann die einzelnen $\mathfrak{B}_i$ gerade aufgebraucht werden.

4.2. Wir schieben nun sämtliche Bänder mit den Längsseiten aneinander und erhalten wegen (3.8) ein Rechteck $\mathfrak{B}$ der Länge $\mathfrak{z}_0 * \omega$ und der Breite 1:

$$\mathfrak{B} = \{z = x + iy \mid 0 < x < 1\,, \quad 0 < y < \mathfrak{z}_0 * \omega\}\,.$$

$\mathfrak{B}$ ist bis auf eine Nullmenge das eineindeutige und konforme Bild der Fläche $\mathfrak{R}$; mit Ausnahme endlich vieler entspricht dabei jeder Parallelen zu den Längsseiten von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{R}$ ein Zyklus der Klasse $\mathfrak{Z}_0$. Diese Zyklen heißen im folgenden *Extremalzyklen* der Klasse $\mathfrak{Z}_0$.

4.3. Sei nunmehr $\Phi \in M$ eine beliebige konforme Metrik auf $\mathfrak{R}$. Wird $\mathfrak{R}$ in der eben beschriebenen Weise dargestellt, so ist $\Phi = \varrho^2(x, y) \mid dz \mid^2$ fast überall in $\mathfrak{B}$ definiert.

Ist $L_\Phi = L_\Phi(\mathfrak{Z}_0)$ die minimale Länge der Zyklen aus $\mathfrak{Z}_0$, so gilt insbesondere für die Extremalzyklen

$$L_\Phi \leqslant \int_0^{\mathfrak{z}_0 * \omega} \varrho(x, y) dy \qquad (\text{f. a. } x \in [0, 1]),$$

daher auch

$$L_\Phi \leqslant \int_0^1 \int_0^{\mathfrak{z}_0 * \omega} \varrho(x, y) dy dx .$$

Nach Cauchy-Schwarz ist nun

$$\Big(\iint_{\mathfrak{B}} \varrho(x, y) dx dy\Big)^2 \leqslant \iint_{\mathfrak{B}} \varrho^2 dx dy \cdot \iint_{\mathfrak{B}} dx dy , \tag{4.1}$$

so daß folgt

$$L_\Phi^2 \leqslant A_\Phi \cdot \mathfrak{z}_0 * \omega ,$$

wegen (2.17) daher

$$\frac{L_\Phi^2}{A_\Phi} \leqslant || \omega ||^2 \quad (\Phi \in M) . \tag{4.2}$$

4.4. Betrachten wir anderseits die spezielle konforme Metrik (1.7), so gilt für jeden Zyklus $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}_0$:

$$\int_{\mathfrak{z}} ds = \int_{\mathfrak{z}} | \omega + i * \omega | \geqslant \int_{\mathfrak{z}} | * \omega | \geqslant \Big| \int_{\mathfrak{z}} * \omega \Big| = \mathfrak{z}_0 * \omega ,$$

somit auch noch

$$L_{\Phi_0} \geqslant \mathfrak{z}_0 * \omega .$$

Ferner gilt, wie man leicht nachrechnet,

$$A_{\Phi_0} = \iint_{\mathfrak{R}} \omega \wedge * \omega = || \omega ||^2 ,$$

so daß wir wegen (2.17) erhalten

$$\frac{L_{\Phi_0}^2}{A_{\Phi_0}} \geqslant || \omega ||^2 .$$

Dies ergibt zusammen mit (4.2) einerseits (1.6), anderseits aber (1.5); das heißt, (1.7) ist in der Tat Extremalmetrik zur Klasse $\mathfrak{Z}_0$. Daß Φ_0 (bis auf einen konstanten Faktor) die einzige Extremalmetrik zur Klasse $\mathfrak{Z}_0$ ist, folgt unmittelbar daraus, daß in (4.2) nach (4.1) das Gleichheitszeichen höchstens dann gilt, wenn in $\mathfrak{B}$ fast überall $\varrho(x, y) = \text{const.}$ ist.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] P. M. Pu, *Some Inequalities in Certain Nonorientable Riemannian Manifolds.* Pacific J. of Math. *2* (1952), 55–71.

[2] L. V. Ahlfors and A. Beurling, *Conformal Invariants and Function-theoretic Nullsets.* Acta math. *83* (1950), 101–129.

[3] A. Pfluger, *Theorie der Riemannschen Flächen.* Berlin: Springer 1957.

[4] J. F. Koksma, *Diophantische Approximationen.* Erg. der Math. IV/4 (1936).

[5] Chr. Blatter, *Une inégalité de géométrie différentielle.* C. R. Acad. Sci., Paris, *250* (1960), 1167.

(Eingegangen den 27. Februar 1960)