

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Band:** 35 (1961)

**Artikel:** Zwei elementare Sätze über positive Lösungen linearer homogener Gleichungssysteme.  
**Autor:** Gross, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-27346>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 13.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Zwei elementare Sätze über positive Lösungen linearer homogener Gleichungssysteme

Von H. GROSS, Zürich

Für positive bzw. nichtnegative Lösungen eines linearen homogenen Gleichungssystems gelten die beiden folgenden Sätze:

**1. Satz:** Das lineare homogene Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \xi_k = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (1)$$

hat dann und nur dann eine positive Lösung  $\xi_k > 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ), falls jede Lösung  $\eta$  des transponierten Ungleichungssystems

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \eta_i \geq 0 \quad (k = 1, \dots, n) \quad (2)$$

sogar eine Lösung des Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \eta_i = 0 \quad (k = 1, \dots, n)$$

ist.

**2. Satz:** Das lineare homogene Gleichungssystem (1) besitzt dann und nur dann eine nichtnegative Lösung  $\xi_k \geq 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ), nicht alle  $\xi_k = 0$ , falls für jede Lösung  $\eta$  des transponierten Ungleichungssystems (2) in mindestens einer Ungleichung das Gleichheitszeichen gilt.

**Beweis des 1. Satzes:** Der Beweis läßt sich leicht geometrisch führen. Wir betrachten zwei reelle euklidische Vektorräume  $A^n$ ,  $B^m$  der Dimensionen  $n$  und  $m$ , in denen je eine orthonormierte Basis  $(e_1, \dots, e_n)$ ,  $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m)$  ausgezeichnet sein möge.  $\varphi$  sei eine lineare Abbildung von  $A^n$  in  $B^m$ ,  $\varphi: A^n \rightarrow B^m$  mit der Matrix  $(\alpha_{ik})$ . Die lineare Abbildung  $\varphi^*$ , die durch die Skalarprodukte in den Räumen  $A^n$ ,  $B^m$  induziert wird,  $\varphi^*: B^m \rightarrow A^n$ ,  $(\varphi x, y) = (x, \varphi^* y)$  mit  $x \in A^n$ ,  $y \in B^m$  hat bekanntlich die zur Matrix  $(\alpha_{ik})$  transponierte Matrix.

Es habe nun das System (1) eine durchwegs positive Lösung, das heißt, es existiere ein Vektor  $x_0 \in A^n$  mit  $(x_0, e_i) > 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) derart, daß  $(\varphi x_0, \bar{e}_j) = 0$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Die Hyperebene  $E$  mit dem Normalenvektor  $x_0$ , definiert durch die lineare Gleichung  $(x_0, x) = 0$ ,  $x \in A^n$ , enthält keinen Vektor  $x$  mit  $(x, e_i) \geq 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) außer dem Nullvektor. Denn ist

mindestens ein  $(x, e_i) > 0$ , so folgt wegen  $(x_0, e_i) > 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) daß  $(x_0, x) = \sum (x_0, e_i)(x, e_i) > 0$ , was nicht geht. Nach Voraussetzung ist  $(\varphi x_0, \bar{e}_j) = (x_0, \varphi^* \bar{e}_j) = 0$  ( $j = 1, \dots, m$ ), also  $\varphi^* B^m \subset E$ . Somit enthält  $\varphi^* B^m$  außer dem Nullvektor keinen Vektor, dessen sämtliche Komponenten nichtnegativ sind. Damit ist die erste Hälfte des Satzes bewiesen.

Hat umgekehrt der Kegel  $K = \{x \mid x = \sum \lambda_i e_i, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$  mit dem Bildraum  $\varphi^* B^m$  nur den Nullvektor gemeinsam, so gibt es wegen der Konvexität von  $K$  eine Hyperebene  $E$ , die mit  $K$  nur den Nullvektor gemeinsam hat und  $\varphi^* B$  enthält (folgt etwa aus dem Satz von HAHN-BANACH).  $E$  sei definiert durch die Gleichung  $(x_0, x) = 0$ ,  $x_0 \in A^n$ . Offenbar liegt  $K$  ganz in einem der beiden durch  $E$  definierten offenen Halbräume, das heißt, es gilt  $(x_0, e_i) > 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) oder aber  $(x_0, e_i) < 0$ , ( $i = 1, \dots, n$ ). Also liegt  $x_0$  oder  $-x_0$  in  $K$ . Es möge  $x_0$  in  $K$  liegen. Da  $\varphi^* B \subset E$  gilt, ist  $(x_0, \varphi^* \bar{e}_j) = 0$ , ( $j = 1, \dots, m$ ). Somit gibt es einen Vektor  $x_0 \in A^n$  mit  $(x_0, e_i) > 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) und  $(\varphi x_0, \bar{e}_j) = 0$  ( $j = 1, \dots, m$ ).

Die geometrische Überlegung zum Beweis des 2. Satzes entspricht genau der vorangehenden. Beweise zu den einen Hälften der beiden Sätze findet man in Math. Ann. 76 (1915), 340–342: E. STIEMKE, *Über positive Lösungen homogener linearer Gleichungen*.

Eine elegante Anwendung des 1. Satzes auf die Theorie der quadratischen Formen findet man in E. S. BARNES, *On a Theorem of Voronoï*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 53 (1957), 537–539. (In Gleichung (3) der zuletzt zitierten Arbeit ist offenbar  $\geq$  durch  $=$  zu ersetzen.)

Eingegangen den 20. November 1960