Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Band: 35 (1961)

Artikel: Zwei elementare Sätze über positive Lösungen linearer homogener Gleichungssysteme.

Autor: Gross, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27346

Zwei elementare Sätze über positive Lösungen linearer homogener Gleichungssysteme

Von H. GROSS, Zürich

Für positive bzw. nichtnegative Lösungen eines linearen homogenen Gleichungssystems gelten die beiden folgenden Sätze:

1. Satz: Das lineare homogene Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\,\xi_k = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1}$$

hat dann und nur dann eine positive Lösung $\xi_k > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, falls jede Lösung η des transponierten Ungleichungssystems

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik}\eta_i \geqslant 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

sogar eine Lösung des Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik}\eta_i = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

ist.

2. Satz: Das lineare homogene Gleichungssystem (1) besitzt dann und nur dann eine nichtnegative Lösung $\xi_k \geqslant 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, nicht alle $\xi_k = 0$, falls für jede Lösung η des transponierten Ungleichungssystems (2) in mindestens einer Ungleichung das Gleichheitszeichen gilt.

Beweis des 1. Satzes: Der Beweis läßt sich leicht geometrisch führen. Wir betrachten zwei reelle euklidische Vektorräume A^n, B^m der Dimensionen n und m, in denen je eine orthonormierte Basis $(e_1, \ldots, e_n)$, $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_m)$ ausgezeichnet sein möge. φ sei eine lineare Abbildung von A^n in B^m, $\varphi : A^n \to B^m$ mit der Matrix (α_{ik}). Die lineare Abbildung φ^*, die durch die Skalarprodukte in den Räumen A^n, B^m induziert wird, $\varphi^* : B^m \to A^n$, $(\varphi x, y) = (x, \varphi^* y)$ mit $x \in A^n$, $y \in B^m$ hat bekanntlich die zur Matrix (α_{ik}) transponierte Matrix.

Es habe nun das System (1) eine durchwegs positive Lösung, das heißt, es existiere ein Vektor $x_0 \in A^n$ mit $(x_0, e_i) > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ derart, daß $(\varphi x_0, \bar{e}_j) = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$. Die Hyperebene E mit dem Normalenvektor x_0, definiert durch die lineare Gleichung $(x_0, x) = 0$, $x \in A^n$, enthält keinen Vektor x mit $(x, e_i) \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ außer dem Nullvektor. Denn ist mindestens ein $(x, e_i) > 0$, so folgt wegen $(x_0, e_i) > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ daß $(x_0, x) = \Sigma(x_0, e_i)(x, e_i) > 0$, was nicht geht. Nach Voraussetzung ist $(\varphi x_0, \bar{e}_j) = (x_0, \varphi^* \bar{e}_j) = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$, also $\varphi^* B^m \subset E$. Somit enthält $\varphi^* B^m$ außer dem Nullvektor keinen Vektor, dessen sämtliche Komponenten nichtnegativ sind. Damit ist die erste Hälfte des Satzes bewiesen.

Hat umgekehrt der Kegel $K = \{x \mid x = \Sigma \lambda_i e_i,\ \lambda_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n\}$ mit dem Bildraum $\varphi^* B^m$ nur den Nullvektor gemeinsam, so gibt es wegen der Konvexität von K eine Hyperebene E, die mit K nur den Nullvektor gemeinsam hat und $\varphi^* B$ enthält (folgt etwa aus dem Satz von Hahn-Banach). E sei definiert durch die Gleichung $(x_0, x) = 0$, $x_0 \in A^n$. Offenbar liegt K ganz in einem der beiden durch E definierten offenen Halbräume, das heißt, es gilt $(x_0, e_i) > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ oder aber $(x_0, e_i) < 0$, $(i = 1, \ldots, n)$. Also liegt x_0 oder $-x_0$ in K. Es möge x_0 in K liegen. Da $\varphi^* B \subset E$ gilt, ist $(x_0, \varphi^* \bar{e}_j) = 0$, $(j = 1, \ldots, m)$. Somit gibt es einen Vektor $x_0 \in A^n$ mit $(x_0, e_i) > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $(\varphi x_0, \bar{e}_j) = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Die geometrische Überlegung zum Beweis des 2. Satzes entspricht genau der vorangehenden. Beweise zu den einen Hälften der beiden Sätze findet man in Math. Ann. *76* (1915), 340–342: E. Stiemke, *Über positive Lösungen homogener linearer Gleichungen.*

Eine elegante Anwendung des 1. Satzes auf die Theorie der quadratischen Formen findet man in E. S. Barnes, *On a Theorem of Voronoï,* Proc. Cambridge Philos. Soc. *53* (1957), 537–539. (In Gleichung (3) der zuletzt zitierten Arbeit ist offenbar $\geqslant$ durch $=$ zu ersetzen.)

Eingegangen den 20. November 1960