Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Band: 35 (1961)

Artikel: Sur les variétés à courbure positive de diamètre minimum.

Autor: Berger, Marcel

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27328

Sur les variétés à courbure positive de diamètre minimum

par Marcel Berger, Strasbourg[1])

1. Introduction

Dans [2] et [3], il a été démontré que si une variété riemannienne compacte V, simplement connexe, de dimension paire et de courbure comprise entre 1 et $\frac{1}{4}$, avait un diamètre de valeur minimum π, alors V était nécessairement un espace riemannien symétrique compact de rang un (muni de sa structure riemannienne canonique, c'est-à-dire l'un des espaces suivants: sphère, espace projectif complexe ou quaternionien, plan projectif des octaves de Cayley. Dans la démonstration apparaissait en particulier le fait que *toutes* les géodésiques de V (issues d'un point quelconque et de direction quelconque) étaient fermées et de longueur 2π. Dans le présent article, on démontre que ce dernier résultat subsiste si la variété V satisfait toutes les hypothèses ci-dessus à l'exception de celle concernant la courbure qui est affaiblie en: la courbure de V est inférieure ou égale à 1 et strictement positive. Le résultat obtenu (théorème 4 ci-dessous) impose alors à la topologie de V des restrictions très fortes que l'on précisera dans un article ultérieur.

2. Notations et définitions

Dans toute la suite, V désignera une variété riemannienne, de dimension plus grande que 1 et T_p l'espace des vecteurs tangents à V en un point p de V; pour tout $p \in V$, par $\| \ \|$ (resp. $\langle \ , \ \rangle$), on désignera la norme (resp. le produit scalaire associé) qui définit la structure riemannienne de V, structure qui sera supposée indéfiniment différentiable. La courbure de V dans le sous-espace μ à deux dimensions de T_p, engendré par deux vecteurs linéairement indépendants X et Y, est, par définition, le scalaire:

$$\varrho(\mu) = \varrho(X, Y) = -\frac{\langle R(X,Y)\,X, Y\rangle}{\|X\|^2\,\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$$

où $R(X, Y)$ désigne l'endomorphisme de T_p défini par le tenseur de courbure de V, que l'on associe canoniquement à la structure riemannienne de V (si $\dim V = 2$, la fonction $\varrho(T_p) = \varrho(p)$ n'est autre que la courbure de Gauss de la surface considérée au point p). *La variété riemannienne V est dite δ-pincée si l'on a: $\delta \leqslant \varrho(\mu) \leqslant 1$ quel que soit μ* (ou, plus généralement,

[1]) Le résultat de cet article a été présenté au Colloque international de Géométrie différentielle et de Topologie de Zurich de juin 1960.

si $\delta\Delta \leqslant \varrho(\mu) \leqslant \Delta$ avec $\Delta > 0$, mais on supposera dans toute suite, ce qui est banalement toujours possible, avoir normé la structure riemannienne de V en sorte que $\Delta = 1$). Toutes les géodésiques considérées dans V seront paramétrées par la longueur de leur arc à partir de leur origine. Si $\Lambda = \{\lambda(s)\}$ $(0 \leqslant s \leqslant s_0)$ est une telle géodésique, $\lambda'(s)$ désignera son vecteur tangent en $\lambda(s)$ et l'on aura $\|\lambda'(s)\| = 1$ quel que soit s. Par $d(p,q)$ on désignera la distance des deux points p, q de V dans la structure d'espace métrique de V canoniquement associée à sa structure riemannienne; la borne supérieure (éventuellement infinie) des $d(p,q)$, lorsque p et q parcourent V, est appelée le *diamètre* de V et notée $d(V)$. *Par* $|||p,q|||$ *on entendra l'ensemble des géodésiques de* V *qui ont pour extrémités* p, q *et dont la longueur est égale à* $d(p,q)$. Si p est un point de V et X un élément de T_p tel que $\|X\| = 1$, on sait qu'il existe une géodésique et une seule $\Lambda(X) = \{\lambda(s, X)\}$ $(0 \leqslant s \leqslant \varepsilon(X))$ d'origine p et telle que $\lambda'(0, X) = X$, avec $\varepsilon(X) > 0$. Il est classique que si la variété V est compacte, alors on peut prendre $\varepsilon(X) = \infty$ pour tout $X \in T_p$ tel que $\|X\| = 1$ et tout $p \in V$, autrement dit $\lambda(s, X)$ a un sens quel que soit s. Le point p étant fixé, on peut alors définir une application de T_p dans V, notée $\exp(p)$ et dite application exponentielle d'origine p, en posant pour tout $Z \in T_p$:

$$\exp(p)(Z) = \lambda\left(\|Z\|, \frac{Z}{\|Z\|}\right).$$

3. Rappel de résultats connus

Les résultats suivants seront nécessaires dans la suite:

Théorème 1 (HOPF-RINOW). *Si la variété* V *est compacte, quels que soient* $p, q \in V$, *l'ensemble* $|||p,q|||$ *n'est pas vide.*

En particulier, quel que soit p, l'exponentielle $\exp(p)$ est surjective. Le résultat suivant est un critère pour qu'une certaine restriction de $\exp(p)$ soit injective (il utilise le théorème 1):

Théorème 2 (KLINGENBERG [4], théorème 1, p. 655). *Soit* V *une variété riemannienne compacte, simplement connexe, de dimension paire et* δ*-pincée avec* $\delta > 0$. *Alors, quels que soient les deux points* p, q *de* V *tels que* $d(p,q) < \pi$, *l'ensemble* $|||p,q|||$ *a un élément et un seul. En particulier, le diamètre de* V *vérifie:* $d(V) \geqslant \pi$.

Théorème 3 ([3], lemme 3, p. 165). *Soit* V *une variété riemannienne compacte, simplement connexe, de dimension paire et* δ*-pincée avec* $\delta > 0$. *Soient* p, q *deux points de* V *tels que* $d(p,q) = \pi$ *et* Θ, Θ_1 *deux géodésiques appar-*

tenant à $|||\, p, q\, |||$ $(\theta(0) = \theta_1(0) = p,\ \theta(\pi) = \theta_1(\pi) = q)$ *telles que* $\theta'(0) \neq \pm \theta_1'(0)$. *Soit* $\Theta(\lambda, \mu)$ *la géodésique d'origine* p, *de longueur* π *et dont le vecteur tangent en* p *est* $\dfrac{\lambda\theta'(0) + \mu\theta_1'(0)}{\|\lambda\theta'(0) + \mu\theta_1'(0)\|}$. *Alors, quels que soient* $\lambda > 0$, $\mu > 0$, *on a* $\Theta(\lambda, \mu) \in |||\, p, q\, |||$. *En outre, le sous-ensemble de* V *constitué par la réunion des* $\Theta(\lambda, \mu)$ $(\lambda \geqslant 0, \mu \geqslant 0)$ *est une sous-variété totalement géodésique de dimension* 2 *de* V, *et de courbure constante égale à* 1.

4. Enoncé du résultat

Dans toute la suite, V sera une variété riemannienne compacte, simplement connexe, de dimension paire, δ-pincée avec $\delta > 0$, et dont le diamètre a la valeur minima dans l'inégalité du théorème 2, c'est-à-dire telle que $d(V) = \pi$. Sous ces conditions, nous allons démontrer le résultat suivant: pour deux points quelconques p, q de V, désignons par $A_{p,q}$ le sous-ensemble de T_q constitué par les vecteurs tangents en q aux éléments de $|||\, p, q\, |||$; $A_{p,q}$ est un sous-ensemble de la sphère S_q des vecteurs unitaires d'origine q.

Théorème 4. *Quels que soient* p, q *tels que* $d(p, q) = \pi$, *le sous-ensemble* $A_{p,q}$ *de* S_q *est l'intersection de* S_q *avec un sous-espace vectoriel de* T_q.

Il en résultera en particulier que, si $X \in A_{p,q}$, on a aussi $-X \in A_{p,q}$ ce qui montre que toute géodésique $\Gamma \in |||\, p, q\, |||$, dont le vecteur tangent en q est X, se prolonge en la géodésique $\Gamma \cup \Gamma'$ de longueur 2π constituée par la réunion de Γ avec la géodésique $\Gamma' \in |||\, p, q\, |||$ dont le vecteur tangent en q est $-X$. D'où, puisque p, q et $X \in A_{p,q}$ sont arbitraires et d'après le lemme 2 de [2], le fait que toutes les géodésiques de V (d'origine et de direction initiale quelconques) sont fermées et de longueur 2π. Il est d'autre part facile de voir que tous les $A_{p,q}$ ont même dimension et que, pour q fixe et p variable, ce sont les fibres d'une fibration de S_q. Enfin, pour tout $p \in V$, l'ensemble $C(p) = \{q \mid d(p, q) = \pi\}$, qui n'est autre que le lieu résiduel de p (voir par exemple: [2], p. 57, et lemme 3, p. 61) est alors une sous-variété de V de codimension égale à la dimension des $A_{p,q}$. Tout ceci implique de très fortes restrictions sur la topologie de V; nous les préciserons ultérieurement.

5. Démonstration d'icelui

Les hypothèses sont toujours celles du no 4; et p, q deux points de V, fixés une fois pour toutes, tels que $d(p, q) = \pi$. Posons $A_{p,q} = U$; d'après le no 7, p. 169 de [3], sous de telles hypothèses, il existe $X_0 \in U$ tel que aussi

$-X_0 \in U$. Appelons T'_q l'orthogonal de X_0 dans T_q et posons $U' = U \cap T'_q$. Nous devons montrer que U est l'intersection de S_q avec un sous-espace vectoriel de T_q. *Pour cela, il suffit de montrer que U' est l'intersection de S_q avec un sous-espace vectoriel de T_q.* En effet, supposons qu'il en soit ainsi; alors $Z \in U'$ entraîne $-Z \in U'$. Comme U vérifie le théorème 3, il suffit de montrer que, quel que soit $X \in U$, alors aussi $-X \in U$. Supposons d'abord que l'on ait $\langle X, X_0 \rangle \leqslant 0$; alors, si $X \in U$, on a aussi $Z \in U$ (d'après le théorème 3), où Z est défini par: $Z = \dfrac{Y}{\|Y\|}$, avec $Y = X - \langle X, X_0 \rangle X_0$. Mais, par construction: $Z \in U'$; mais $-Z \in U'$ par hypothèse. Comme X est une combinaison linéaire à coefficients positifs de Z et de X_0, c'est que $-X$ sera une combinaison linéaire à coefficients positifs de $(-Z)$ et de $(-X_0)$, donc appartiendra à U d'après le théorème 3. Dans le cas où $\langle X, X_0 \rangle \geqslant 0$, le raisonnement ci-dessus reste valable en y échangeant les rôles de X_0 et $-X_0$.

Démontrons maintenant que U' est l'intersection de S_q avec un sous-espace vectoriel de T_q, ce qui nécessite d'abord quelques lemmes.

Lemme 1. *Soit P le sous-espace vectoriel de T_q engendré par U'. Pour tout $X \in P$ tel que $\|X\| = 1$, il existe un $\varepsilon > 0$ et un $\eta > 0$ tels que: quel que soit le vecteur unitaire Y de T_q qui vérifie $\langle Y, X \rangle \geqslant 1 - \eta$, on a: $d(p, \exp(q)(tY)) < d(p, q) = \pi$ pour tout t tel que $0 < t < \varepsilon$.*

Comme l'ensemble des vecteurs unitaires Y de T_q qui sont tels que $\langle X, Y \rangle \geqslant 1 - \eta$ est un compact, il suffit, pour démontrer le lemme, de montrer que, pour tout Y dans ce compact, il existe un $\varepsilon(Y)$ tel que: $d(p, \exp(q)(tY)) < d(p, q)$ pour tout t tel que $0 < t < \varepsilon(Y)$. Il est d'abord classique que, si $\langle Z, X_0 \rangle < 0$, il existe $\varepsilon(Z)$ tel que $d(p, \exp(q)(tZ)) < d(p, q)$ pour tout t tel que $0 < t < \varepsilon(Z)$; ceci parce qu'il existe un élément de $|||p, q|||$ dont le vecteur tangent en q est X_0. Changeant X_0 en $-X_0$, on voit qu'il suffit de trouver un $\varepsilon(Y)$ ayant la propriété demandée pour tous les Y tels que $\langle Y, X \rangle \geqslant 1 - \eta$ et $\langle Y, X_0 \rangle = 0$.

Utilisons maintenant le fait que X appartient à l'espace vectoriel P engendré par U'. Appelons $\Gamma = \{\gamma(s)\}$ $(0 \leqslant s \leqslant 2\pi)$ la géodésique constituée par la réunion des deux géodésiques de $|||p, q|||$ dont les vecteurs tangents en q sont X_0 et $-X_0$ respectivement $(\gamma(\pi) = q, \gamma(0) = \gamma(2\pi) = p)$. Pour tout $Z \in T'_q$, définissons un champ $\mathfrak{Y}(Z) = \{Z(s)\}$ $(0 < s < 2\pi)$ le long de Γ par les deux conditions: 1. $\nabla_{\gamma'(s)} Z(s) = 0$ quel que soit s 2. $Z(\pi) = Z$ (autrement dit, $Y(Z)$ est le champ obtenu en transportant parallèlement Z le long de Γ). D'après le théorème 3, si $Z \in U'$, alors la courbure $\varrho(\gamma'(s), Z(s))$ est telle que: $\varrho(\gamma'(s), Z(s)) = 1$ pour tout s tel que $0 < s < 2\pi$. Mais le raisonnement fait au bas de la page 63 de [2] montre que les champs $Y(Z)$, tels que $\varrho(\gamma'(s), Z(s)) = 1$ quel que soit s, forment un sous-espace vectoriel de T'_q; c'est donc que l'on a, puisque P est le sous-espace vectoriel engendré par U': $\varrho(\gamma'(s), X(s)) = 1$ quel que soit s et quel que soit $X \in P$.

Soit maintenant $Y \in T'_q$ quelconque et introduisons le champ $\mathfrak{X}(Y) = \{\sin(ks) Y(s)\}$ $(0 \leqslant s \leqslant \pi)$. La formule de la variation seconde ([1], p.97, formule (1)) donne:

$$l''(0)(\mathfrak{X}(Y)) = \int_0^\pi (k^2 \cos^2(ks) - \varrho(\gamma'(s), Y(s)) \sin^2(ks))\, ds .$$

On vient de voir que $\varrho(\gamma'(s), X(s)) = 1$ pour tout s et tout $X \in P$; puisque la courbure $\varrho(\gamma'(s), Y(s))$ est continue en le vecteur $Y(s)$ et que « Y voisin de X » entraîne « $Y(s)$ voisin de $X(s)$ quel que soit s », il est clair que, pour tout $\zeta > 0$, il existe un $\eta(\zeta) > 0$ tel que, quel que soit Y tel que $\langle Y, X\rangle \geqslant 1 - \eta(\zeta)$, on ait: $\varrho(\gamma'(s), Y(s)) \geqslant 1 - \zeta$ quel que soit s tel que $0 \leqslant s \leqslant \pi$. On a alors, par une intégration directe:

$$l''(0)(\mathfrak{X}(Y)) \leqslant (\pi/2)(k^2 - (1 - \zeta)) + (1/4k)(1 - \zeta + k^2) \sin(2\pi k) .$$

Prenons k tel que $3/4 < k < 1$ et $\zeta = 1 - k^2$; alors, si l'on pose $\eta = \eta(\zeta = 1 - k^2)$, on a bien, pour tout Y vérifiant $\langle Y, X\rangle \geqslant 1 - \eta$: $l''(0)(\mathfrak{X}(Y)) < 0$. Il est alors banal que cela entraîne l'existence d'un $\varepsilon(Y) > 0$ tel que $d(p, \exp(q)(tY)) < d(p, q)$ pour tout t tel que $0 < t < \varepsilon(Y)$.

Lemme 2. *Quel que soit $X \in P$, il existe $Z' \in U'$ tel que $\langle X, Z'\rangle > 0$.*

Il suffit de démontrer qu'il existe $Z \in U$ tel que $\langle X, Z\rangle > 0$, car alors $Z' = \dfrac{Z - \langle X_0, Z\rangle X_0}{||Z - \langle X_0, Z\rangle X_0||}$ est un vecteur de U' qui répond à la question, puisque $\langle X_0, X\rangle = 0$ et $||Z - \langle X_0, Z\rangle X_0|| \leqslant 1$ entraînent $\langle Z', X\rangle \geqslant \langle Z, X\rangle$. Pour exhiber un tel Z, utilisons d'abord le lemme 1 dans le cas particulier de X lui-même. Posons $q(t) = \exp(q)(tX)$ $(0 < t < \varepsilon)$; on a donc $d(p, q(t)) < \pi$ et l'on posera $d(p, q(t) = d(t)$ et $e(t) = \pi - d(t)$. D'après le théorème 2, l'ensemble $|||\, p, q(t)\, |||$ n'a qu'un seul élément que l'on désignera par $\Lambda(t) = \{\lambda(u, t\}$ $(0 \leqslant u \leqslant d(t),\ 0 < t < \varepsilon)$ (avec $\lambda(0, t) = p$, $\lambda(d(t), t) = q(t)$). Appelons $q'(t)$ le vecteur tangent en $q(t)$ à la géodésique $\exp(q)(tX)$ et posons: $\alpha(t) = \langle q'(t), \lambda'_t(d(t), t)\rangle$. On a $d(q, q(t)) = t$, donc, d'après le théorème 6 de [3], p. 164: $d(p, q)^2 \leqslant d(t)^2 + t^2 + 2t\alpha(t)d(t)$. De $d(p, q) = \pi$, on déduit l'inégalité:

$$\alpha(t) \geqslant \frac{\pi e(t)}{t} - \frac{t^2 + e(t)^2}{2td(t)} . \tag{1}$$

Soit $r(t)$ le point défini en prolongeant $\Lambda(t)$ jusqu'à la distance π de p

c'est-à-dire $r(t) = \lambda(\pi, t)$. Lorsque $t \to 0 : d(t) \to \pi$ et $e(t) \to 0$, donc $d(q, r(t)) \to 0$ d'après l'inégalité du triangle; il existe donc $\varepsilon' > 0$ tel que $d(q, r(t)) < \varepsilon$ quel que soit $t < \varepsilon'$. Appliquons alors le lemme 1 en prenant pour vecteur Y le vecteur tangent $Y(t)$ en q à la géodésique unique de $|||\, q, r(t)\, |||$. D'après ce lemme, si $Y(t)$ était tel que $\langle Y(t), X\rangle \geqslant 1 - \eta$, on aurait $d(p, r(t)) < \pi$; comme $d(p, r(t)) = \pi$ par construction, c'est donc que $\langle Y(t), X\rangle \leqslant 1 - \eta$. Considérons le triangle de V dont les trois sommets sont les points $q, q(t), r(t)$ et les trois côtés les éléments uniques de $|||\, q, q(t)\, |||$, $|||\, q(t), r(t)\, |||$, $|||\, q, r(t)\, |||$ respectivement. L'angle en q de ce triangle étant tel que $\langle Y(t), X\rangle \leqslant 1 - \eta$ et la métrique de V étant, lorsque $t \to 0$, euclidienne au deuxième ordre près, c'est donc que, si $s(t)$ désigne le pied de la perpendiculaire abaissée de $q(t)$ sur $|||\, q, r(t)\, |||$, l'on a: $d(q(t), r(t)) \geqslant d(q(t), s(t))$ et:

$$\frac{d(q(t), s(t))}{d(q, q(t))} = \frac{e(t)}{t} \geqslant \sin\beta(t)\ (t \to 0)$$

(où l'on a posé $\cos\beta(t) = \langle Y(t), X\rangle$). Donc on a:

$$\frac{e(t)}{t} \geqslant a(t \to 0) \quad \text{avec} \quad a \geqslant \sin\beta(t) \geqslant (1 - (1 - \eta)^2)^{1/2} > 0\,. \tag{2}$$

De (1) et (2) on déduit qu'il existe $\varepsilon'' > 0$ tel que:

$$\alpha(t) \geqslant b > 0 \quad \text{quel que soit } t \text{ tel que } 0 < t < \varepsilon''\,. \tag{3}$$

De la famille des géodésiques $\alpha(t)$, on extrait une suite convergente, dont on notera la géodésique limite par Λ ($\Lambda \in |||\, p, q\, |||$). Si Z désigne le vecteur tangent à Λ en q, comme $\alpha(t) = \langle q'(t), \lambda'_t(d(t), t)\rangle$ et que $q'(t) \to X (t \to 0)$, $\lambda'_t(d(t), t) \to Z\ (t \to 0)$, l'inégalité (3) entraîne $\langle Z, X\rangle > 0$.

Déduisons maintenant le théorème 4 du lemme 2. Dans l'espace vectoriel P engendré par U', soit CU' le cône ensemble des kX pour tous les $X \in U'$ et tous les $k \geqslant 0$; le théorème 3 affirme que CU' est *convexe* et il faut montrer que $CU' = P$. Soit donc un point $Y \in P$ tel que $Y \notin CU'$; il existe un point Z de CU' tel que la distance euclidienne dans P de Y à Z soit un minimum absolu en Z pour l'ensemble des points de CU'. Si H désigne l'hyperplan de P qui est orthogonal à $Y - Z$, il est classique que le cône convexe CU' est alors tout entier dans la région fermée de H qui ne contient pas Y (car s'il existait un $Z' \in CU'$ dans la région ouverte qui contient Y, le segment fermé d'extrémités Z et Z' aurait des points situés strictement à l'intérieur de la sphère de centre Y qui passe par Z). On a donc $\langle Y - Z, S\rangle \leqslant 0$ quel que soit $S \in CU'$, a fortiori $\langle Y - Z, S\rangle \leqslant 0$ quel que soit $S \in U'$. Mais ceci contredit le lemme 2 appliqué au vecteur $Y - Z$ de P.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Berger, *Les variétés riemanniennes à courbure positive.* Bull. Soc. math. Belgique, *10* (1958), 89–104.
[2] M. Berger, *Sur quelques variétés riemanniennes suffisamment pincées.* Bull. Soc. math. France, *88* (1960), 57–71.
[3] M. Berger, *Les variétés riemanniennes.* (¼)-pincées, à paraître aux Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1960.
[4] W. Klingenberg, *Contributions to Riemannian geometry in the large.* Ann. of math., *69* (1959), 654–666.

(Reçu le 24 juin 1960)