Groupes de transformations d'une sphère de cohomologie.

Autor(en): **Poncet, Jean**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **36 (1961-1962)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515622

Groupes de transformations d'une sphère de cohomologie[1])

JEAN PONCET, Princeton, N. J. (USA)

1. Introduction

On désignera dans la suite par (G, X) un groupe G de transformations de l'espace X. G sera un groupe de LIE compact, connexe.

Si $x \subset X$, G_x est le sous-groupe de G qui laisse x invariant. Dans cette note, l'orbite $G(x)$ est dite

du type H, ou G/H, si G_x est dans la classe des sous-groupes conjugués à $H \subset G$,

régulière si les orbites voisines sont du même type que $G(x)$, singulière sinon.

S'il n'existe qu'un seul type H d'orbites régulières, on appellera l'espace homogène G/H l'orbite principale.

Dans la suite la cohomologie d'un espace sera toujours celle d'ALEXANDER-SPANIER à supports compacts, à valeurs entières.

M sera une n-variété cohomologique (une $n - cm_Z$ de [1], notée ici cm) qui ait la cohomologie d'une sphère. M est alors compacte.

Si l'on impose aux orbites de (G, M) certaines conditions (assez restrictives en somme) l'espace M et l'action de G sur M peuvent être décrits assez exactement. On a ainsi

Théorème 1.1. Soient M une $n - cm$ qui ait la cohomologie d'une sphère et (G, M) un groupe de transformations qui possède des orbites de dimension $n - 1$. Alors celles-ci sont régulières, d'un même type G/H, il y a deux orbites singulières et les énoncés a — d sont équivalents:

a) les orbites de dimension $n - 1$ ont la cohomologie d'un produit de deux sphères;

b) les orbites singulières sont des sphères de cohomologie;

c) M est la jonction des deux orbites singulières;

d) la somme des dimensions des orbites singulières est $n - 1$.

En outre, si l'orbite principale G/H est un produit de deux sphères $S^k \times S^l$, ou si les orbites singulières sont S^k et S^l, M est S^{k+l+1} et G opère linéairement.

Remarque. Les énoncés a — d sont aussi équivalents à celui-ci: G/H est le produit des deux orbites singulières (voir la démonstration). Comme G. E. BRE-

---

[1]) Travail écrit alors que l'auteur était boursier du Fonds National Suisse.

DON a montré [4] qu'un espace homogène (de groupe de LIE compact) qui a la cohomologie entière d'une S^r est une S^r ou $SO(3)/I$ ($I =$ groupe de l'icosaèdre), on a ainsi une précision de plus sur les orbites possibles sous l'une des conditions a — d.

On a un cas plus simple de (G, M) si $H^*(G/H) = H^*(S^{n-1})$. Les orbites singulières sont des points fixes et réciproquement. G opère linéairement si G/H est S^{n-1} [6].

Comme application, nous considérons un (G, E_n) sur un espace euclidien E_n qui ait des orbites de dimension $n - 2$. En utilisant les résultats de [5] et un théorème de G. E. BREDON [1, chap. XV] nous montrons qu'il existe un point fixe p et que $E_n - p$ est le produit de E_1 par une $(n - 1) - cmM$ à laquelle ont peut appliquer 1.1. D'où résulte

Théorème 1.2. Si (G, E_n) a des orbites de dimension $n - 2$ qui sont des S^{n-2} ou des $S^k \times S^l, k + l = n - 1, G$ est linéaire.

Je remercie ici MM. D. MONTGOMERY et G. E. BREDON de m'avoir fait quelques suggestions.

2. Sections de M

Soit M comme dans 1. La proposition 2.1 est une conséquence facile de la propriété de séparation d'une $n - cm$ par un sous-espace dont la dimension cohomologique ($\dim_Z$ de [1, chap. I], notée ici dim.) est $n - 1$, et des propriétés du sous-espace $M_{n-1, s}$ réunion des orbites de dimension $n - 1$ dont le groupe d'isotropie a un nombre minimum s de composantes [1, chap. IX].

Proposition 2.1. Les orbites de dimension $n - 1$ sont régulières, d'un même type. Il y a deux orbites singulières de dimension $< n - 1$. M/G est un intervalle fermé.

Soit d'abord M une $n - cm$ connexe dont nous ne supposons pas nécessairement que $H^*(M) = H^*(S^n)$.

$N = M_{n-1,s} \subset M$ est un ouvert dense, connexe [1, chap. IX], fibré en orbites de même type. Donc $N' = N/G$ est une $1 - cm$ [1, chap. I, th. 4.10]. N' est localement compacte, localement connexe et séparée localement par chaque point. On en déduit que c'est une 1-variété.

Supposons $H^*(M) = H^*(S^n)$. N' ne peut pas être S^1, car on aurait $M = N$ fibré en orbites G/H, de base S^1, ce qui est impossible par la suite de cohomologie associée à une orbite G/H

$$0 \to H^{n-1}(G/H) \to H^n(M - G/H) \to H^n(M) \to 0$$

$M - G/H$ étant $E_1 \times G/H$.

Ainsi N' est E_1 et il y a une ou deux orbites singulières. S'il y en a une seule, elle sépare M localement, est donc de dimension $n-1$, ce qui est encore impossible par une même suite de cohomologie associée à cette orbite. Donc il y en a deux et $M' = M/G$ est un intervalle fermé. Comme elles ne peuvent pas séparer M localement, elles sont de dimension $< n-1$. Ceci achève de démontrer 2.1.

Démontrons maintenant 1.1.

M/G étant un intervalle fermé, il existe une section $\sigma: M/G \to M$ telle que $G_x = H$ soit constant sur son intérieur. Cela résulte de l'existence de la tranche («slice» de [1]) en chaque point de M.

K et L désigneront les sous-groupes de stabilité aux extrémités a et b de σ, $c \subset \sigma$ un point intermédiaire.

Soient P, Q tels que $P \cup Q = M, P \cap Q = G(c), G(a) \subset P, G(b) \subset Q$.

On a la suite de MAYER-VIETORIS

$$\to H^i(M) \to H^i(P) + H^i(Q) \xrightarrow{\varphi} H^i(G(c)) \to H^{i+1}(M) \ldots$$

où $\varphi(u,v) = h_1^*(u) - h_2^*(v)$, h_1, h_2 étant les inclusions de $G(c)$ dans P et Q.

Supposant $n > 2$, φ est ainsi un isomorphisme bijectif pour $0 < i < n-1$. En composant h_1 et h_2 avec les rétractions de P et Q le long des sections $g(\delta), g \subset G$, sur $G(a)$ et $G(b)$ respectivement, on obtient un isomorphisme bijectif $\psi: H^i(G(a)) + H^i(G(b)) \to H^i(G(c))$ pour $0 < i < n-1, \psi(u,v) = = p_1^*(u) - p_2^*(v)$, où p_1 et p_2 sont des projections de fibration $G/H \to G/K$ resp. G/L, de fibre K/H resp. L/H. L'isomorphisme ψ et la règle de KÜNNETH montrent alors que a) et b) sont équivalents et entraînent d).

Soient k, l les dimensions de $G(a), G(b)$ respectivement. Soit $S = K(\delta - b)$. C'est une tranche par a. Comme fibre d'une fibration d'un voisinage ouvert invariant de $G(a)$, c'est une $(n-k) - cm$. Comme $S - a$ est $K/H \times E_1$, la suite de cohomologie associée à a montre que $H^*(K/H) = H^*(S^{n-k-1})$.

Les fibrations p_1 et p_2 sont donc à fibres sphériques.

Montrons que d) entraîne b), c) de 1.1.

Dans l'hypothèse d), $\dim K(c) = \dim K/H = n-k-1 = l = \dim G/L$. Le noyau de $i^*: H^l(G(c)) \to H^l(K(c))$, i étant l'inclusion $K(c) \subset G(c)$, est $p_1^*(H^l(G(a)))$ [3, exposé IX], qui s'identifie à $H^l(G(a))$ par ψ, d'où un isomorphisme $i^* \cdot p_2^*: H^l(G(b)) \to H^l(K(c))$.

De la commutativité de

$$\begin{array}{ccc} H^l(G(b)) & \to & H^l(G(c)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^l(K(b)) & \to & H^l(K(c)) \end{array}$$

où les homomorphismes horizontaux sont induits par p_2, les verticaux par des inclusions, suit alors $\dim K(b) = l$, donc $K(b) = G(b)$ et l'application $K(c) \to G(b)$ induite par p_2 est un revêtement (de fibre $K \cap L/H$). Mais celui-ci est trivial du fait de la bijection $H^l(G(b)) \to H^l(K(c)$. On a un même résultat pour l'application $L(c) \to G(a)$ induite par p_1, d'où b).

Par un point de $G(c)$ ne passe qu'une section $g(\sigma)$. De cela et de ce que l'homéomorphisme $K(c) \to G(b)$ est une projection suivant les sections $g(\sigma)$ par a, on déduit qu'il n'y a qu'une telle section par a et un point de $G(b)$. On a ainsi c) et $G(c) = G(a) \times G(b)$, Comme c) implique évidemment d), les quatre points de 1.1 sont équivalents.

Si maintenant l'orbite principale G/H est $S^k \times S^l$, G/K et G/L sont S^k resp. S^l. Cela résulte de [2] ou [4], par le fait que $G/H = G/K \times G/L$. La réciproque est évidente et M est S^{k+l+1} comme jonction de S^k et S^l.

Cela étant, G opère linéairement sur M.

En effet, l'action de G sur M ne dépend que de l'action de G sur les orbites singulières S^k et S^l. G opère transitivement sur celles-ci comme des groupes orthogonaux $G_1 \subset SO(k+1)$, $G_2 \subset SO(l+1)$ [6]. Il s'ensuit que les actions possibles de G sur la jonction M de S^k et S^l peuvent être réalisées par les représentations sommes de deux groupes orthogonaux tels que G_1 et G_2 opérant sur une sphère de E_{k+l+2} centrée à l'origine. Ceci achève de démontrer 1.1.

Dans le cas plus simple de (G, M) où $H^*(G/H) = H^*(S^{n-1})$, par l'isomorphisme ψ les orbites singulières sont des points fixes et réciproquement. L'action de G sur M ne dépend que de l'action de G sur l'orbite principale G/H et est linéaire si $G/H = S^{n-1}$.

3. Une application

Soit (G, E_n) un groupe de transformations de l'espace euclidien E_n qui ait des orbites de dimension $n-2$. Nous allons résumer ses propriétés d'après [5].

D'abord les orbites de dimension $n-2$ sont régulières, d'un même type G/H. Soient X leur réunion, $B = E_n - X$ la réunion des orbites singulières. Celles-ci sont de dimension $< n-2$. $X/G = X'$ est un plan, $E_n/G = E_n'$ un demi-plan fermé par la droite $B/G = B'$.

Pour un G opérant différentiablement, une forme un peu plus faible que le lemme 3.1 est contenue dans [5]. Ici 3.1 est démontré comme conséquence d'un théorème de G. E. Bredon.

3.1. Lemme. Soit a un point de B. Posons $B = B_1 \cup G(a) \cup B_2$, B_1 et B_2 étant les deux parties de B séparées par $G(a)$.

Supposons $\dim G(x) = \dim G(a)$ sur B_1 au voisinage de $G(a)$. Alors $G(a)$ est régulière relativement à B.

Faisons opérer la composante de l'identité G_a^* de G_a sur une tranche («slice» de [1]) S par a. Soit $F(G_a^*, S)$ l'ensemble des points fixes de S par G_a^*. C'est l'ensemble des x de $B \cap S$ tels que $G_*^a \subset G_x$, c'est-à-dire $\dim G_x = \dim G_a$ puisque $G_x \subset G_a$ sur S. On peut supposer que $B \cap S = G_a(s)$ où s est un arc, section locale de B en a. Il s'ensuit que les composantes connexes de $F(G_a^*, S)$ sont des points isolés ou des réunions finies d'arcs. Sous l'hypothèse de 3.1, $\dim {}_Z F(G_a^*, S) = 1$ (dans la suite, nous écrivons dim pour $\dim_Z$ de [1]).

Les orbites singulières de (G_a^*, S) sont toutes les orbites de $B \cap S$. Posons $U = S - B \cap S$. $U/G_a = (U/G_a^*)/(G_a/G_a^*)$ s'identifie à un ouvert de $(E_n - B)/G$. On a donc

$$2 = \dim U - \dim G_a/H = \dim S - \dim G_a^*/G_a^* \cap H = \dim F(G_a^*, S) + 1 .$$

La dernière identité montre que les hypothèses de [1, chap. XV, 1.4] sont vérifiées pour (G_a^*, S). Les orbites singulières $\subset B \cap S$ de G_a^* sont alors des points fixes au voisinage de a, d'où il suit encore (lemme 2.3, loc, cit.) que $B \cap S$ se réduit à un seul arc au voisinage de a. Par la définition de la tranche $G_x = G_a$ près de a.

Ce lemme et un raisonnement de dualité de [5] que nous ne répétons pas ici (voir les démonstrations des lemmes 10 et 11 de [5]) permettent de montrer que B contient un point fixe p séparant deux types d'orbites. Nous désignons encore leur réunion par B_1 et B_2.

Ces propriétés de (G, E_n) entraînent maintenant que $E_n - p$ est le produit de E_1 par une $(n - 1) - cm$ qui est une sphère de cohomologie, sur laquelle G opère.

Car soit D une section de E_n telle que G_x soit constant sur l'intérieur de D et sur $r_1 = B_1 \cap D$, $r_2 = B_2 \cap D$. Une telle section existe par la construction donnée dans la démonstration du lemme 10 de [5].

On peut décomposer $D - p$ en arcs r, deux d'entre eux étant r_1, r_2, et en arcs s qui rencontrent chaque r en un point. Les transformés $g(r)$ sont deux à deux sans point commun.

Soient s_1, s_2 deux arcs s, K le sous-espace compact compris entre $G(s_1)$ et $G(s_2)$, $K_1 = K \cap r_1$. Un point $x \subset K$ détermine univoquement r, s tels que $x = g(r) \cap G(s)$ pour un $g \subset G$. Si l'on définit $h(x) = G(s_1) \cap g(r)$ et $k(x) = G(s) \cap K_1$, l'application $x \to (h(x), k(x))$ de K sur $K_1 \times G(s_1)$ est biunivoque et continue, d'où $E_n - p = r_1 \times G(s_1)$. Les $G(s)$ sont homéomorphes à $G(s_1)$ par $h(x)$ et des $(n-1)-cm$ qui ont la cohomologie de S^{n-1}.

Ainsi 1.1 est applicable à $G(s)$. Si G/H est une sphère ou un produit de deux sphères, $G(s)$ est une sphère et la décomposition de E_n en rayons $r \cup p$ fait voir que G opère linéairement. Ceci démontre 1.2.

Institute for Advanced Study, Princeton

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Borel, *Seminar on Transformation Groups*. Annals of Mathematics Studies 46, Princeton (1960).
[2] A. Borel, *Les bouts des espaces homogènes de groupes de* Lie. Ann. Math. 58 (1953).
[3] A. Borel, *Cohomologie des espaces localement compacts, d'après* J. Leray. Notes, Zurich, 2e éd. (1957).
[4] G. E. Bredon, *On Homogeneous Cohomology Spheres*. A paraître.
[5] D. Montgomery, H. Samelson, C. T. Yang, *Groups on E^n with $(n-2)$-dimensional orbits.*
[6] J. Poncet, *Groupes de* Lie *compacts de transformations de l'espace* Euclid*ien et les sphères comme espaces homogènes*. Comment. Math. Helv., 33 (1959).

(Reçu le 8 mai 1961)