Über vektorielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Über vektorielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

von Hans Egli, Zürich

I. Die homogene lineare Differentialgleichung

§ 1. Grundlagen

In diesem ersten Paragraphen wollen wir die im folgenden benützten grundlegenden Begriffe und Sätze kurz angeben [1]).

1.1. *Die Vektorfunktion.* Unter einer Vektorfunktion $y = y(x)$ verstehen wir eine Abbildung, die jedem x aus dem m-dimensionalen Raum R_x^m einen Vektor y des n-dimensionalen Raumes R_y^n zuordnet. Der Definitionsbereich einer Vektorfunktion kann auf ein Gebiet in R_x^m eingeschränkt werden.

Wir werden nur zweidimensionale Vektorräume mit reeller Struktur benützen. Die euklidische Metrik wird definiert durch eine symmetrische, positiv definite Bilinearform Sxy (Skalarprodukt). Der Betrag $|x|$ des Vektors x ist durch $|x| = +\sqrt{Sxx} \geqq 0$ erklärt.

1.2. *Die Ableitung.* Die Vektorfunktion $y(x)$ ist im Punkt x des Definitionsbereiches *stetig*, falls

$$|y(x+h) - y(x)| \to 0 \quad \text{für} \quad |h| \to 0 .$$

Die Funktion $y(x)$ heißt im Punkt x *differenzierbar*, falls es eine in $h \in R_x^m$ lineare Abbildung $y'(x)h$ von R_x^m in R_y^n gibt, so daß die Gleichung

$$y(x+h) - y(x) = y'(x)h + |h|(h; x)$$

gilt, wobei $(h; x)$ einen y-Vektor bezeichnet, dessen Betrag gegen Null strebt, wenn $|h|$ gegen Null geht.

Die Ableitung, das heißt der lineare Operator $y'(x)$, ist eindeutig bestimmt, falls die Funktion $y(x)$ überhaupt differenzierbar ist.

In bezug auf irgend welche Koordinatensysteme entspricht der Operator $y'(x)$ der Jacobischen Funktionalmatrix.

---

[1]) Für Einzelheiten und die Beweise der angeführten Sätze verweisen wir auf F. und R. Nevanlinna [1].

1.3. *Die zweite Ableitung.* Falls der lineare Operator $y'(x)$ einer differenzierbaren Vektorfunktion $y(x)$ selbst wieder differenzierbar ist, erhält man als zweite Ableitung einen bilinearen Operator $y''(x)$. Es gilt dann für ein genügend kleines h und ein beliebiges k die Beziehung

$$y'(x+h)k - y'(x)k = y''(x)hk + |h|\,(h;x)k$$

mit $|(h;x)| \to 0$ für $|h| \to 0$.

Falls der zweite Ableitungsoperator in einer Umgebung des Punktes x existiert, so gilt die Symmetrie

$$y''(x)hk = y''(x)kh \quad \text{(Vertauschbarkeit der Differentiationen).}$$

1.4. *Die Differentialgleichung erster Ordnung.* Die Differentialform einer Differentialgleichung erster Ordnung lautet

$$dy = f(x,y)dx \quad \text{oder} \quad y'dx = f(x,y)dx\,,$$

wo x ein Vektor aus R_x^m, $y = y(x)$ eine zu bestimmende Vektorfunktion $x \to y \in R_y^n$ und $f(x,y)$ ein durch das Punktepaar x, y eindeutig bestimmter Operator ist, der den Raum R_y^m in den Raum R_y^n abbildet.

Eine solche Differentialgleichung ist unter folgenden Voraussetzungen in der Umgebung des Punktes x_0 eindeutig lösbar:

1°. Der Operator $f(x,y)$ ist für $|x - x_0| < r_x, |y - y_0| < r_y$ stetig differenzierbar.

2°. Der Operator

$$R(x,y)hk = \tfrac{1}{2}(f_x(x,y)hk + f_y(x,y)f(x,y)hk - f_x(x,y)kh - f_y(x,y)f(x,y)kh)$$

verschwindet für alle Wertepaare x, y des betrachteten Gebietes.

1.5. *Die homogene lineare Differentialgleichung.* Für die homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstantem Operator B

$$dy = Bdxy$$

vereinfacht sich die Integrabilitätsbedingung 2° zu

$$BhBk = BkBh\,.$$

Die Lösung der Differentialgleichung heißt dann

$$y(x) = (E + B(x-x_0) + \frac{1}{2!}B(x-x_0)B(x-x_0) + \\ + \frac{1}{3!}B(x-x_0)B(x-x_0)B(x-x_0) + \ldots)y_0\,.$$

Es ist also eine Exponentialreihe, die man wie folgt abgekürzt schreiben kann:

$$y(x) = e^{B(x-x_0)}y_0 = (\exp B(x-x_0))\,y_0\ ^{2)}\,.$$

[2]) Da wir das Symbol e in anderer Bedeutung verwenden werden, benützen wir für die Exponentialfunktion die Bezeichnung exp.

1.6. *Die Matrix eines bilinearen Operators.* Wenn wir in den beiden Räumen R_x^m und R_y^n zwei Koordinatensysteme fixieren, so ist dem bilinearen Operator B eine Matrix $(B_{\mu\nu}^{\lambda})$ zugeordnet. Für zweidimensionale Vektorräume besteht diese Matrix $(B_{\mu\nu}^{\lambda})$ aus 8 Zahlen, die wir wie folgt anordnen:

$$\begin{pmatrix} B_{11}^1 & B_{11}^2 \\ B_{12}^1 & B_{12}^2 \\ B_{21}^1 & B_{21}^2 \\ B_{22}^1 & B_{22}^2 \end{pmatrix}$$

§ 2. Der bilineare Operator Bxy

In diesem Paragraphen soll der bilineare Operator Bxy untersucht werden unter Annahme der Integrabilitätsbedingung

$$BhBk = BkBh\,. \tag{2.1}$$

2.1. *Nicht ausgeartete Fälle.* Der bilineare Operator B heißt ausgeartet, wenn ein $x \neq 0$ (bzw. $y \neq 0$) existiert, so daß $Bxy = 0$ für jedes y (bzw. x) gilt. Wir nehmen vorerst an, daß diese Ausartung nicht zutrifft.

Unter dieser Voraussetzung untersuchen wir die Nullstellen von Bxy. Zunächst ist es auf Grund der Linearität von B klar, daß $B(0, y) = B(x, 0) = 0$ und daß, wenn x, y ein Lösungspaar ist, auch $B(\lambda x)(\mu y) = 0$ für jedes reelle λ und μ. Diese Lösungen $\lambda x, \mu y$ sollen im folgenden als wesentlich gleich betrachtet werden.

Wir unterscheiden nun folgende Fälle:

1) B ist *definit.* Das soll heißen, daß $Bxy \neq 0$ für jedes $x \neq 0$, $y \neq 0$.

2) B ist *semidefinit.* So bezeichnen wir den Fall, wo $Bxy = 0$ genau ein Lösungspaar $x = x_1 \neq 0$, $y = y_1 \neq 0$ besitzt.

3) B ist *indefinit.* In diesem Fall hat $Bxy = 0$ genau zwei verschiedene Lösungspaare x_1, y_1 und x_2, y_2.

Daß diese Fälle tatsächlich vorkommen können, werden wir später sehen. Dagegen wollen wir jetzt zeigen, daß keine andern Fälle möglich sind.

Zunächst ist es ausgeschlossen, daß für ein $x = x_1 \neq 0$ zwei verschiedene $y = y_1 \neq 0$, $y = y_2 \neq 0$ als Lösungen vorkommen. Denn dann wären y_1 und y_2 linear unabhängig und würden die ganze Ebene aufspannen. Mit dem Ansatz $y = \gamma y_1 + \delta y_2$ erkennen wir, daß $Bx_1 y = 0$ für jedes y wäre. Dies ist aber unmöglich, solange wir B als nicht ausgeartet voraussetzen.

Nun nehmen wir an, daß mindestens zwei verschiedene Lösungspaare $x = x_1 \neq 0$, $y = y_1 \neq 0$ und $x = x_2 \neq 0$, $y = y_2 \neq 0$ existieren. Nach obigem sind x_1 und x_2 und ebenfalls y_1 und y_2 linear unabhängig. Wir können also für zwei beliebige Vektoren x und y die Koordinatendarstellung

$$x = \xi^1 x_1 + \xi^2 x_2\,, \quad y = \eta^1 y_1 + \eta^2 y_2$$

ansetzen. Dann ist

$$Bxy = \sum_{i,k} \xi^i \eta^k B x_i y_k = \xi^1 \eta^2 B x_1 y_2 + \xi^2 \eta^1 B x_2 y_1\,.$$

Wenn wir jetzt die Integrabilitätsbedingung (2.1) zu Hilfe nehmen, gilt

$$0 = Bx_1 Bx_2 y_2 = Bx_2 Bx_1 y_2\,, \quad 0 = Bx_2 Bx_1 y_1 = Bx_1 Bx_2 y_1\,.$$

Da $Bx_2 y$ nur die nicht triviale Lösung $y = y_2$ hat, so muß nach der ersten Gleichung $Bx_1 y_2 = y_2$ sein. Und ähnlich ergibt sich aus der zweiten Gleichung die Beziehung $Bx_2 y_1 = y_1$. Also wird

$$Bxy = \xi^1 \eta^2 y_2 + \xi^2 \eta^1 y_1\,.$$

Hieraus schließt man, daß $Bxy = 0$ nur unter der Bedingung $\xi^1\eta^2 = \xi^2\eta^1 = 0$ möglich ist. Außer $x = 0$ oder $y = 0$ sind also die beiden Lösungen

$$\xi^1 = 0,\ \eta^1 = 0\ (\xi^2 \neq 0,\ \eta^2 \neq 0), \text{ somit } x = x_2,\ y = y_2$$
$$\xi^2 = 0,\ \eta^2 = 0\ (\xi^1 \neq 0,\ \eta^1 \neq 0), \text{ somit } x = x_1,\ y = y_1$$

allein möglich. Damit ist gezeigt, daß es außer den Lösungspaaren x_1, y_1 und x_2, y_2 keine anderen Lösungen mehr gibt.

2.2. *Das Einheitselement.* Stets unter Annahme der Integrabilitätsbedingung (2.1) zeigen wir, daß es für einen nicht ausgearteten Operator B ein und nur ein «Einheitselement» $x = e$ gibt, so daß

$$Bey = y$$

für jedes y gilt.

Beweis 1°. Wir fixieren einen Vektor $y = y_0 \neq 0$, der nicht mit den Nullstellen von Bxy zusammenfällt, das heißt, es ist $Bxy_0 \neq 0$ für jedes $x \neq 0$, und betrachten die lineare Abbildung $x \to Bxy_0$. Diese Abbildung ist regulär. Wäre sie nämlich irregulär, so würde ein $x = x_0 \neq 0$ existieren, für das $Bx_0y_0 = 0$, was bei der getroffenen Wahl von y_0 nicht möglich ist.

Für diese reguläre Abbildung $x \to Bxy_0$ ist die Gleichung $Bxy_0 = y_0$ eindeutig lösbar; wir bezeichnen die Lösung mit $x = e$.

2°. Für die so festgelegten Vektoren y_0 und e gilt identisch in x die Integrabilitätsbedingung (2.1)

$$BeBxy_0 = BxBey_0 = Bxy_0\,. \tag{2.2}$$

Da $x \to Bxy_0$ regulär ist, gibt es zu jedem y ein wohlbestimmtes x, so daß $Bxy_0 = y$. Die Gleichung (2.2) wird dann zu

$$Bey = y ,$$

und sie ist für alle y erfüllt.

3°. Es sei e' ein zweites Einheitselement. Dann ist $B(e - e')y = 0$ für alle y, woraus sofort $e' = e$ folgt.

2.3. *Symmetrisierung des Operators B.* Wir versuchen nun, eine reguläre lineare Transformation Y der y-Ebene so durchzuführen, daß der transformierte Operator $\overline{B} = Y^{-1}BY$ *symmetrisch* wird.

Eine solche Transformation ist durch die Gleichung

$$Yy = Byz$$

gegeben, wobei z keine Nullstelle von Bxz ist, sonst aber beliebig fixiert werden kann.

Wegen der Integrabilitätsbedingung (2.1) ergibt sich

$$\overline{B}yx = Y^{-1}ByYx = Y^{-1}ByBxz = Y^{-1}BxByz = Y^{-1}BxYy = \overline{B}xy ,$$

also die gewünschte Symmetrie.

Nach Ausführung dieser Transformation bleibt der oben bestimmte Vektor e Einheitselement, denn es gilt

$$\overline{B}ey = Y^{-1}BeYy = Y^{-1}Yy = y .$$

Wegen der Symmetrie ist e nun nicht nur Links- sondern auch Rechtseinheitselement.

Während die Nummern 2.2 und 2.3 für alle nicht ausgearteten Operatoren B gültig sind, gehen wir jetzt zur speziellen Behandlung der drei möglichen Fälle (definit, semidefinit, indefinit) über. Dabei nehmen wir an, daß B bereits symmetrisiert worden ist.

2.4. *Der definite Fall.* In diesem Fall gilt der Satz:

Die Gleichung $Bxx = a$ ist für jeden Vektor a lösbar, wobei die Lösung x bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt ist.

Beweis. a) *Eindeutigkeit.* Aus $Bxx = Bx'x' = a$ folgt wegen der Symmetrie von B die Gleichung $Bxx - Bx'x' = B(x - x')(x + x') = 0$, die nur erfüllt sein kann, wenn $x = x'$, oder wenn $x = -x'$. Somit ist x bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt.

b) *Existenz.* Für $a = 0$ ist $x = 0$ die Lösung der Gleichung $Bxx = a$. Wir nehmen jetzt an, es sei $a \neq 0$.

Zum Beweis der Existenz einer Lösung von $Bxx = a$ führen wir die Norm $\varphi(x) = | Bxx - a | \geqq 0$ ein. Wir werden zeigen, daß es einen Wert $x = b$ gibt, so daß $\varphi(b) = 0$, womit dann die Behauptung bewiesen ist.

Hierzu betrachten wir die Funktion $| Bxx |$ auf dem Kreis $| x | = 1$. Als stetige Funktion erreicht sie hier ein Minimum β, das wegen der Definitheit von B sicher positiv ist. Auf dem Kreis $|x| = \varrho$ gilt $|Bxx| = \varrho^2 \left| B \frac{x}{\varrho} \frac{x}{\varrho} \right| \geqq \varrho^2 \beta$; es ist also $| Bxx | \to \infty$ für $| x | \to \infty$. Wir fixieren ϱ so, daß $\varrho^2 \beta = 3 | a |$, $\varrho = + \sqrt{\frac{3|a|}{\beta}}$. Auf dem Kreis $| x | = \varrho$ wird dann nach der Dreiecksungleichung

$$\varphi(x) = | Bxx - a | \geqq | Bxx | - | a | \geqq 3 | a | - | a | = 2 | a | .$$

Im abgeschlossenen Bereich $| x | \leqq \varrho$ hat $\varphi(x)$ ein Minimum $m \geqq 0$, das in mindestens einem Punkt $x = x_0$ erreicht wird. Dieser Punkt x_0 liegt sicher im Innern des Kreises $| x | \leqq \varrho$; denn für $| x | = \varrho$ ist $\varphi(x) \geqq 2 | a |$, und andererseits ist $y(0) = | a | \geqq m$, also $\varphi(x) \geqq 2m$ für $| x | = \varrho$.

Wir zeigen nun, daß $\varphi(x_0) = | Bx_0x_0 - a | = 0$. Zum indirekten Beweis nehmen wir an, es sei $\varphi(x_0) > 0$. Schreiben wir dann $x = x_0 + \lambda h$, so wird

$$\varphi(x_0 + \lambda h) = | Bx_0x_0 - a + 2\lambda Bx_0h + \lambda^2 Bhh | .$$

Die Gleichung $Bx_0h = -(Bx_0x_0 - a)$ hat genau eine Lösung $h = h_0 \neq 0$, und es ist damit

$$\varphi(x_0 + \lambda h_0) = | (Bx_0x_0 - a)(1 - 2\lambda) + \lambda^2 Bh_0h_0 | .$$

Für jedes $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ gilt also die Abschätzung

$$\varphi(x_0 + \lambda h_0) \leqq (1 - 2\lambda)\varphi(x_0) + \lambda^2 | Bh_0h_0 | = \varphi(x_0) - \lambda\,(2\varphi(x_0) - \lambda\, | Bh_0h_0 |) .$$

Wegen $h_0 \neq 0$ ist $Bh_0h_0 \neq 0$, und der letzte Klammerausdruck ist positiv, sofern

$$\lambda < \frac{2\varphi(x_0)}{| Bh_0h_0 |} .$$

Für alle Werte $\lambda > 0$, die kleiner als die kleinere der Zahlen $\frac{2\varphi(x_0)}{|Bh_0h_0|}$ und $\frac{1}{2}$ ist, wird also

$$\varphi(x_0 + \lambda h_0) < \varphi(x_0) = m .$$

Da x_0 im Kreise $| x | < \varrho$ liegt, so folgt hieraus, daß es in diesem Kreis Punkte $x = x_0 + \lambda h_0$ geben würde, wo $\varphi(x) < m$, was der Definition von m widerspricht.

Es muß daher $\varphi(x_0) = m = 0$, $Bx_0x_0 = a$ sein, w.z.b.w.

2.5. Nach dem eben bewiesenen Satz ist speziell die Gleichung $Bxx = -e$ bis auf das Vorzeichen eindeutig lösbar. Wir bezeichnen die eine dieser zwei Lösungen mit $x = i$ $(i \neq 0, e)$ und stellen die Resultate zusammen:

$$Bee = e\,, \quad Bei = Bie = i\,, \quad Bii = -e \tag{2.4}$$

Führt man ein Koordinatensystem mit den beiden ausgezeichneten Vektoren e und i als Basis ein, so erhält die dem Operator B entsprechende Matrix wegen der Integrabilitätsbedingung (2.1) und den Gleichungen (2.4) die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Damit läßt sich nun auch der Nachweis führen, daß es wirklich definite bilineare Operatoren gibt. Wir behaupten, daß bei beliebiger Wahl der Basisvektoren e und i jeder durch eine Matrix der Form (2.5) festgelegte Operator definit ist.

Zum Beweis bemerke man, daß das System

$$(Bxy)^1 = \xi^1\eta^1 - \xi^2\eta^2 = 0\,, \quad (Bxy)^2 = \xi^1\eta^2 + \xi^2\eta^1 = 0$$

nur dann eine nicht triviale Lösung $x = (\xi^1, \xi^2)$ hat, wenn die Determinante $(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2$ verschwindet. Für jedes $y \neq 0$ folgt somit aus $Bxy = 0$ nur die Lösung $x = 0$, womit die Definitheit von B bewiesen ist.

Daß für eine Matrix (2.5) die Integrabilitätsbedingung (2.1) erfüllt ist und die Gleichungen (2.4) gelten, ist offensichtlich.

2.6. *Der semidefinite Fall.* Im semidefiniten Fall hat die Gleichung $Bxy = 0$ genau ein nicht triviales Lösungspaar $x = x_1 \neq 0$, $y = y_1 \neq 0$. Nach der Symmetrisierung müssen die beiden transformierten Vektoren x_1 und y_1 zusammenfallen, da sonst noch eine zweite nicht triviale Nullstelle vorhanden wäre.

Wir haben also auch in diesem Fall zwei ausgezeichnete Richtungen, nämlich das Einheitselement e und die Nullstelle $x_1 = y_1 = j$. Diese beiden Vektoren e und j nehmen wir als Basis. Unter Benützung der Relationen

$$Bee = e\,, \quad Bej = Bje = j\,, \quad Bjj = 0 \tag{2.6}$$

sowie der Integrabilitätsbedingung (2.1) ergibt sich folgende Matrix für den Operator B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Umgekehrt ist der durch eine Matrix der Form (2.7) festgelegte Operator immer semidefinit.

2.7. *Der indefinite Fall.* Wenn wir, nach vollzogener Symmetrisierung des Operators B, die beiden nicht trivialen Lösungspaare der Gleichung $Bxy = 0$ mit x_1, y_1 bzw. x_2, y_2 bezeichnen, so kann man schließen, daß einerseits x_1 und y_2, andererseits x_2 und y_1 zusammenfallen müssen. Sonst könnte man aus der Symmetrie sofort die Existenz von zwei weiteren nicht trivialen Lösungen herleiten.

Der Einheitsvektor e kann nach seiner definierenden Eigenschaft weder mit x_1 noch mit dem von x_1 linear unabhängigen x_2 zusammenfallen. Es gibt also zwei wohlbestimmte Zahlen $\alpha, \beta \neq 0$, so daß $e = \alpha x_1 + \beta x_2$.

Setzt man dann $k = \alpha x_1 - \beta x_2$, so sind e und k linear unabhängig, und es ist

$$Bkk = \alpha^2 B x_1 x_1 + \beta^2 B x_2 x_2 = Bee = e\,.$$

Wenn man e und k als Basis wählt, so findet man wegen

$$Bee = e\,, \quad Bek = Bke = k\,, \quad Bkk = e \tag{2.8}$$

und der Integrabilitätsbedingung (2.1) für den Operator B die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Umgekehrt definiert eine Matrix der Form (2.9) immer einen indefiniten Operator.

2.8. *Zusammenfassung.* Falls der Operator B nicht ausgeartet ist, so läßt sich nach einer passenden regulären Transformation der Variablen y ein Koordinatensystem so wählen, daß die dem Operator B entsprechende Matrix die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

erhält, wobei μ die Werte -1, 0, 1 hat, je nachdem, ob der definite, semidefinite oder indefinite Fall vorliegt.

Umgekehrt stellt jede Matrix der Form (2.10) einen definiten, semidefiniten oder indefiniten bilinearen Operator dar, und zwar unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems.

2.9. *Die ausgearteten Fälle.* Wir nehmen jetzt an, B sei bezüglich x ausgeartet, es gebe also ein $x = x_1 \neq 0$ mit $Bx_1y = 0$ für alle y.

Wenn dann für ein beliebig fixiertes $x \neq x_1$ die lineare Abbildung $y \to Bxy$ regulär ist, sprechen wir von *einfacher Ausartung*. Ist diese Abbildung irregulär, existiert also ein Kern $y = y_0 \neq 0$, so ist B auch bezüglich y ausgeartet; wir heißen ein solches B *zweifach ausgeartet*. Wenn der Kern die ganze y-Ebene umfaßt, wenn also B der Null-Operator ist, nennen wir B *total ausgeartet.*

Bevor wir auf Einzelheiten eingehen, beweisen wir den Satz, daß ein bilinearer Operator B, der bezüglich y ausgeartet ist ($Bxy_1 = 0$ für alle x), unter Annahme der Integrabilitätsbedingung (2.1) auch bezüglich x ausgeartet ist.

Zum indirekten Beweis nehmen wir an, B sei in bezug auf x nicht ausgeartet. Dann ist für irgendein $y \neq y_1$ die Abbildung $x \to Bxy$ regulär. Wir bestimmen $x = x_1 \neq 0$ so, daß $Bx_1y = y_1$. Aus der Integrabilitätsbedingung (2.1) folgt dann

$$Bx_1Bxy = BxBx_1y = Bxy_1 = 0 \quad \text{für alle } x\,,$$

also $Bx_1y = 0$ für alle y. Das ist aber ein Widerspruch zu unserer Annahme.

Damit ist gezeigt, daß ein bezüglich y ausgearteter Operator Bxy wegen (2.1) immer mindestens zweifach ausgeartet ist.

Sei nun B einfach ausgeartet. Für die reguläre Transformation $y \to Bxy$ bestehen dann nach der allgemeinen Eigenwert-Theorie folgende Möglichkeiten:

1. Es existieren keine Eigenvektoren, das heißt, es gibt kein $y \neq 0$, für das $Bxy = \lambda y$ (λ reell). Wir nennen diesen Fall *ausgeartet-definit.*

2. Es existiert genau ein Eigenvektor $y = y_1$: *ausgeartet-semidefiniter* Fall.

3. Es existieren genau zwei Eigenvektoren $y = y_1$, $y = y_2$: *ausgeartet-indefiniter* Fall.

Wenn die Transformation $y \to Bxy$ ($B \neq 0$) irregulär ist, also bei zweifacher Ausartung von B, sind nur der ausgeartet-semidefinite und -indefinite Fall möglich, da der Kernvektor $y = y_0$ immer ein Eigenvektor (mit dem Eigenwert 0) ist.

2.10. *Die zugehörigen Matrizen.* Wir wählen die Basis der x-Ebene so, daß der Vektor x_1, für den $B x_1 y$ identisch verschwindet, die Koordinaten $x_1 = (1, -1)$ erhält. Die Matrix $(B^{\lambda}_{\mu\nu})$ hat dann die Form

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \\ B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

und die Integrabilitätsbedingung ist von selbst erfüllt.

Im ausgeartet-definiten Fall (kein Eigenvektor) transformieren wir die y-Ebene so, daß die Selbstabbildung $y \to Bxy$ eine Drehung wird. Die transformierte Matrix erhält dann die Form

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ -B_2 & B_1 \\ B_1 & B_2 \\ -B_2 & B_1 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Im ausgeartet-semidefiniten Fall (ein Eigenvektor) wählen wir die Basis der y-Ebene so, daß der Eigenvektor mit dem zweiten Basisvektor zusammenfällt. Die zugehörige Matrix lautet dann

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_1 \\ B_1 & B_2 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

wobei für $B_1 \neq 0$ einfache und für $B_1 = 0$ zweifache Ausartung vorliegt.

Im ausgeartet-indefiniten Fall (zwei Eigenvektoren) legen wir die y-Basis so, daß die beiden Eigenvektoren die Koordinaten $y_1 = (1, 1)$ bzw. $y_2 = (1, -1)$ erhalten. Die zugehörige Matrix heißt

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \\ B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

wobei die Ausartung für $|B_1| \neq |B_2|$ einfach und für $|B_1| = |B_2|$ zweifach ist.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Matrix eines ausgearteten bilinearen Operators $B (\neq 0)$ immer auf die Form

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \mu B_2 & B_1 \\ B_1 & B_2 \\ \mu B_2 & B_1 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

transformiert werden kann, wobei μ die Werte -1, 0, 1 hat, je nachdem, ob der ausgeartet-definite, -semidefinite oder -indefinite Fall vorliegt. Die Ausartung ist genau dann zweifach, wenn $(B_1)^2 - \mu(B_2)^2 = 0$.

Umgekehrt ist leicht ersichtlich, daß jede Matrix der Form (2.15) einen ausgearteten bilinearen Operator darstellt, und zwar je nach dem Wert von μ einen definiten, semidefiniten oder indefiniten.

§ 3. Einführung passender Ringe

Nach 1.5 läßt sich die Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung $dy = Bdx\, y$ als Exponentialreihe darstellen:

$$y(x) = (\exp B(x - x_0))\, y_0 \,.$$

Um das Studium dieser Exponentialabbildung zu erleichtern, führen wir im folgenden einen Ring ein, in welchem Bxy als Produkt $B \cdot x \cdot y$ interpretiert werden kann.

3.1. *Nichtausgeartetes* B. Legt man in einem zweidimensionalen Vektorraum mit reeller Struktur für die Basiselemente e_1 und e_2 die Multiplikationsformeln

$$e_1 \cdot e_1 = e_1 \,, \quad e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = e_2 \,, \quad e_2 \cdot e_2 = \mu e_1 \tag{3.1}$$

zugrunde, und definiert man als Produkt von zwei Vektoren $u = \sum_\kappa \alpha^\kappa e_\kappa$ und $v = \sum_\lambda \beta^\lambda e_\lambda$ den Ausdruck

$$u \cdot v = \sum_{\kappa,\lambda} \alpha^\kappa \beta^\lambda e_\kappa e_\lambda \,, \tag{3.2}$$

so wird dadurch der Vektorraum zum hyperkomplexen System erweitert, denn die Multiplikation der Basiselemente ist offensichtlich assoziativ. Die durch (3.1) und (3.2) festgelegte Ringmultiplikation ist kommutativ und e_1 ist das Einselement.

Wenn wir nun dem Operator B das Einselement e_1 zuordnen und dann im Ring das Produkt $B \cdot x \cdot y$ bilden, erhalten wir

$$Bxy = e_1(\xi^1 e_1 + \xi^2 e_2)\,(\eta^1 e_1 + \eta^2 e_2) = (\xi^1\eta^1 + \mu\xi^2\eta^2) e_1 + (\xi^1\eta^2 + \xi^2\eta^1) e_2 \,.$$

Genau die selbe Koordinatendarstellung bekommt man, wenn man für den

Operator B die Normalmatrix (2.10)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$$

einsetzt. Damit ist gezeigt, daß man in einem passend definierten Ring Bxy als Produkt $B \cdot x \cdot y$ interpretieren kann, wobei für B das Einselement des Ringes einzusetzen ist.

Zur Vereinfachung identifizieren wir, wie es bei den komplexen Zahlen üblich ist, die Vielfachen αe_1 mit den reellen Zahlen α. Ferner nennen wir, in Übereinstimmung mit den Bezeichnungen in § 2, das zweite Basiselement i, j oder k, je nachdem, ob der definite, der semidefinite oder der indefinite Fall vorliegt.

3.2. *Der Ring im definiten Fall.* Aus den Multiplikationsvorschriften für die Basiselemente

$$e \cdot e = e\,, \quad e \cdot i = i \cdot e = i\,, \quad i \cdot i = -e$$

geht hervor, daß wir hier die Vektoren mit den komplexen Zahlen identifizieren können. Wir werden deshalb im definiten Fall die bekannten Ergebnisse der komplexen Funktionentheorie erhalten.

3.3. *Der Ring im semidefiniten Fall.* Für die Basiselemente gelten die Multiplikationsvorschriften

$$e \cdot e = e\,, \quad e \cdot j = j \cdot e = j\,, \quad j \cdot j = 0\,.$$

Wir zeigen zuerst, daß der so definierte Ring Nullteiler besitzt. Aus

$$(\alpha + \beta j)(\gamma + \delta j) = \alpha\gamma + (\alpha\delta + \beta\gamma)j = 0$$

folgt nämlich außer den beiden trivialen Lösungen $\alpha = \beta = 0$ und $\gamma = \delta = 0$ noch die Lösung $\alpha = \gamma = 0$, β und δ beliebig. Alle Ringelemente der Form βj sind also Nullteiler dieses Ringes.

Für diese Nullteiler gelten die folgenden leicht zu verifizierenden Sätze:

1. $a \cdot b$ ist genau dann Nullteiler, wenn a oder b Nullteiler ist.

2. Die Gleichung $a \cdot x = b$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn a kein Nullteiler ist.

3. Aus $ab = ac$, a kein Nullteiler, folgt $b = c$.

Die Ringelemente, die nicht Nullteiler sind, teilen wir in zwei elementenfremde Klassen ein. Ein Ringelement $a = \alpha + \beta j$ gehört zur Klasse 1, wenn

$\alpha > 0$, zur Klasse 2, wenn $\alpha < 0$. Für das Produkt von zwei Ringelementen gilt dann der

Satz 4. $a \cdot b$ gehört zur Klasse 1, wenn a und b aus der gleichen Klasse stammen, $a \cdot b$ gehört zur Klasse 2, wenn a und b aus verschiedenen Klassen stammen.

Zum Beweis bilden wir $(\alpha + \beta j)(\gamma + \delta j) = \alpha\gamma + (\alpha\delta + \beta\gamma)j$ und stellen fest, daß $\alpha\gamma$ genau dann positiv ist, wenn α und γ gleiches Vorzeichen haben, wenn also die zugehörigen Elemente zur selben Klasse gehören.

3.4. *Der Ring im indefiniten Fall.* Die Multiplikationsvorschriften für die Basiselemente lauten hier

$$e \cdot e = e\,, \quad e \cdot k = k \cdot e = k\,, \quad k \cdot k = e\,.$$

Auch dieser Ring hat Nullteiler, denn aus

$$(\alpha + \beta k)(\gamma + \delta k) = \alpha\gamma + \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)k = 0$$

folgen außer den beiden trivialen Lösungen $\alpha = \beta = 0$ und $\gamma = \delta = 0$ noch die zwei Lösungen

$$\alpha = \beta\,, \quad \gamma = -\delta \quad \text{bzw.} \quad \alpha = -\beta\,, \quad \gamma = \delta\,.$$

Jedes Ringelement der Form $\alpha \pm \alpha k$ ist also Nullteiler dieses Ringes.

Die in 3.3 angegebenen Sätze über die Nullteiler (Sätze 1 bis 3) gelten auch für den indefiniten Fall ohne Einschränkung.

Satz 4 dagegen muß leicht modifiziert werden. Die Ringelemente, die nicht Nullteiler sind, teilen wir in diesem Fall in vier elementenfremde Klassen ein. Ein Ringelement $a = \alpha + \beta k$ gehört zur

$$\begin{array}{ll} \text{Klasse 1, falls} & \alpha > |\beta| \\ \text{Klasse 2, falls} & \beta > |\alpha| \\ \text{Klasse 3, falls} & -\alpha > |\beta| \\ \text{Klasse 4, falls} & -\beta > |\alpha| \end{array}$$

Wenn man weiß, zu welchen Klassen zwei Elemente a und b gehören, so ist dadurch die Klasse von $a \cdot b$ eindeutig bestimmt. Es gelten nämlich folgende Zusammenhänge (der Index gibt die Klasse an):

$$\begin{array}{lll} a_\kappa \cdot b_\kappa = c_1 & (\kappa = 1, 2, 3, 4) & \\ a_1 \cdot b_\kappa = c_\kappa & (\kappa = 2, 3, 4) & \\ a_2 \cdot b_3 = c_4\,, & a_2 \cdot b_4 = c_3\,, & a_3 \cdot b_4 = c_2\,. \end{array}$$

Der Beweis verläuft für alle zehn Gleichungen prinzipiell gleich; wir nehmen als Beispiel $a_2 \cdot b_4 = c_3$.

Sei $a_2 = \alpha + \beta k$ mit $\beta > |\alpha|$ und $b_4 = \gamma + \delta k$ mit $-\delta > |\gamma|$. Wir wollen zeigen, daß $a_2 \cdot b_4 = \alpha\gamma + \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)k$ zur Klasse 3 gehört, daß also die Ungleichung

$$-(\alpha\gamma + \beta\delta) > |\alpha\delta + \beta\gamma|$$

besteht. Zu diesem Zweck zerlegen wir den Ausdruck $-(\alpha\gamma + \beta\delta) \pm (\alpha\delta + \beta\gamma)$ in Faktoren:

$$-(\alpha\gamma + \beta\delta) \pm (\alpha\delta + \beta\gamma) = (\beta \mp \alpha)(-\delta \pm \gamma).$$

Da beide Faktoren rechts nach Voraussetzung positiv sind, haben wir

$$-(\alpha\gamma + \beta\delta) \pm (\alpha\delta + \beta\gamma) > 0 \quad \text{oder} \quad -(\alpha\gamma + \beta\delta) > |\alpha\delta + \beta\gamma|, \quad \text{q.e.d.}$$

3.5. *Ausgeartetes B.* Die Matrix eines ausgearteten Operators B können wir nach 2.10 in der Form (2.15)

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \mu B_2 & B_1 \\ B_1 & B_2 \\ \mu B_2 & B_1 \end{pmatrix}$$

voraussetzen.

Wenn wir dem Operator B das Ringelement $B_1 e_1 + B_2 e_2$, dem Vektor $x = (\xi^1, \xi^2)$ das Element $(\xi^1 + \xi^2)e_1$ und dem Vektor $y = (\eta^1, \eta^2)$ das Ringelement $\eta^1 e_1 + \eta^2 e_2$ zuordnen, und wenn wir die Multiplikation wieder durch (3.1) und (3.2) definieren, so ergibt sich für $B \cdot x \cdot y$

$$(B_1\eta^1 + \mu B_2\eta^2)(\xi^1 + \xi^2)e_1 + (B_2\eta^1 + B_1\eta^2)(\xi^1 + \xi^2)e_2 .$$

Das ist genau die Koordinatendarstellung von Bxy, wenn man die Matrix (2.15) zugrunde legt.

Weil wir die selben Ringe wie für nicht ausgeartetes B verwenden können, benützen wir auch die gleichen Bezeichnungen: Für $\mu = -1$ nennen wir den zweiten Basisvektor i, für $\mu = 0$ heißt er j, und für $\mu = 1$ heißen wir ihn k.

§ 4. Die Exponentialabbildung

In diesem Paragraphen untersuchen wir die Abbildung, die durch die Lösung $y(x) = (\exp B(x - x_0))y_0$ der Differentialgleichung $dy = Bdxy$ vermittelt wird. Als Anfangsbedingung setzen wir zur Vereinfachung $y(0) = y_0$ fest.

4.1. *Abbildung für nicht ausgeartetes B.* Wir haben in 2.2 gezeigt, daß es für jeden nicht ausgearteten Operator B ein eindeutig bestimmtes «Einheitselement» e ($Bey = y$ für alle y) gibt. Nun behaupten wir, daß jede Gerade der Schar $x = \xi e + b(-\infty < \xi < \infty$, b variabel) durch die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung $dy = Bdxy$ auf einen Halbstrahl $y = \exp \xi \cdot y(b)$ abgebildet wird.

Beweis. 1°. Auf der Geraden $x = \xi e$ ist $y = \exp \xi \cdot y_0$ eine Lösung der Differentialgleichung. Denn

$$dy = \exp \xi \cdot d\xi \cdot y_0 = \exp \xi \cdot d\xi \cdot Bey_0 = B(e\,d\xi)\,(\exp \xi \cdot y_0) = Bdxy\ .$$

2°. Diese Lösung stimmt für $\xi = 0$ mit der allgemeinen Lösung $y(x)$ überein.

3°. Unter Verwendung der Funktionalgleichung $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$ erhalten wir

$$y(\xi e + b) = f(\xi e + b)y_0 = f(\xi e)f(b)y_0 = f(b)\cdot\exp \xi \cdot y_0 = \exp \xi \cdot y(b)\ .$$

4.2. *Der definite Fall.* Wie wir in 3.2 gesehen haben, können wir in diesem Fall die Vektoren als komplexe Zahlen interpretieren. Als Lösung der Differentialgleichung $dy = dxy$ (es ist ja $B = 1$) erhalten wir folglich die normale komplexe Exponentialfunktion $y = (\exp x)y_0$, die periodisch ist und jeden Fundamentalstreifen der x-Ebene eineindeutig auf die punktierte y-Ebene abbildet.

4.3. *Der semidefinite Fall.* Wir legen den in 3.3 eingeführten Ring zugrunde und untersuchen die Lösung $y(x) = (\exp Bx)y_0$ zunächst für die spezielle Anfangsbedingung $y_0 = 1$. Wegen $j^2 = j^3 = \cdots = 0$ erhält man

$$y = \exp(\xi^1 + \xi^2 j) = \exp \xi^1 \cdot (1 + \xi^2 j)\ ,$$

also

$$\eta^1 = \exp \xi^1,\quad \eta^2 = \xi^2 \cdot \exp \xi^1\ . \tag{4.1}$$

Wir sehen, daß eine eineindeutige Abbildung der x-Ebene auf die Halbebene $\eta^1 > 0$ vorliegt. Denn $\eta^1 > 0$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die eindeutige Auflösbarkeit des Systems (4.1) nach ξ^1 und ξ^2.

Nach 4.1 geht bei dieser Abbildung jede Gerade $x = \xi e + b$ in einen Halbstrahl $y = \exp \xi \cdot y(b)$ über. (Vgl. Fig. 1.)

Bis jetzt haben wir $y_0 = 1$ vorausgesetzt. Es bleibt noch zu untersuchen, in welcher Weise sich der Funktionsverlauf ändert, wenn man die Anfangsbedingung y_0 variiert.

Wählt man y_0 in der selben Halbebene wie $y_0 = 1$, ist also $\eta_0^1 > 0$, so bleibt gesamthaft betrachtet die eineindeutige Abbildung der x-Ebene auf die Halbebene $\eta^1 > 0$ bestehen, wie man anhand der Sätze 1, 2 und 4 in 3.3

erkennt. Im einzelnen ist es so, daß gegenüber dem Spezialfall $y_0 = 1$ jeder Halbstrahl im selben Sinn wie y_0 gedreht ist. Der Drehwinkel ist aber nicht konstant, sondern geht gegen Null, wenn man sich dem Rand der Halbebene nähert, also für $\eta^1 \to 0$.

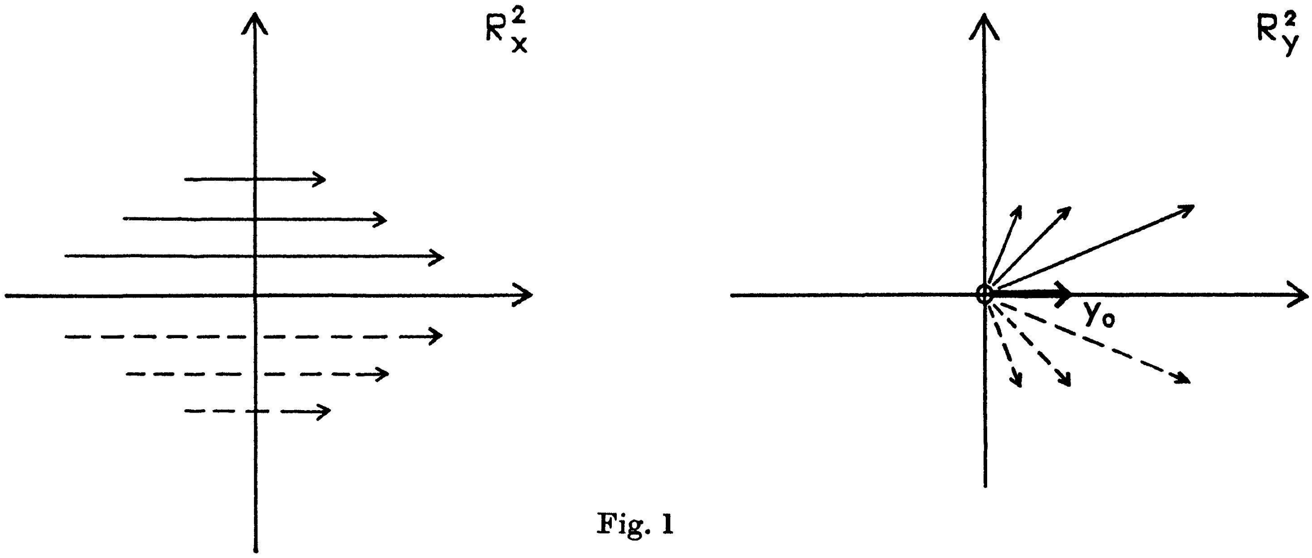

Fig. 1

Wählt man y_0 in der andern Halbebene $(\eta_0^1 < 0)$, so erhält man eine eineindeutige Abbildung der x-Ebene auf diese Halbebene $\eta^1 < 0$. Für $y_0' = -y_0$ wären wir nämlich im früheren Fall, und demgegenüber wird jeder Halbstrahl um 180° gedreht.

Ist y_0 Nullteiler $(\eta_0^1 = 0)$, so ist nach Satz 1 in 3.3 auch $y(x) = (\exp x) y_0$ Nullteiler. Die x-Ebene wird auf den durch y_0 festgelegten Halbstrahl abgebildet.

4.4. *Der indefinite Fall.* Unter Verwendung des in 3.4 eingeführten Ringes erhalten wir für die spezielle Anfangsbedingung $y_0 = 1$

$$y(x) = \exp(\xi^1 + \xi^2 k) = \exp \xi^1 \Big(1 + \xi^2 k + \frac{1}{2!}(\xi^2)^2 + \frac{1}{3!}(\xi^2)^3 k + \cdots\Big)$$
$$= \exp \xi^1 \cdot (\mathrm{Cos}\, \xi^2 + k\, \mathrm{Sin}\, \xi^2),$$

also

$$\eta^1 = \exp \xi^1 \cdot \mathrm{Cos}\, \xi^2, \quad \eta^2 = \exp \xi^1 \cdot \mathrm{Sin}\, \xi^2. \tag{4.2}$$

Für jedes $x = (\xi^1, \xi^2)$ ist demnach $\eta^1 > |\eta^2|$, und umgekehrt ist $\eta^1 > |\eta^2|$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich das System (4.2) eindeutig nach ξ^1, ξ^2 auflösen läßt. Wir haben somit eine eineindeutige Abbildung der x-Ebene auf den Quadranten $\eta^1 > |\eta^2|$.

Genau so wie im semidefiniten Fall schließt man nun für allgemeines $y_0 \neq 1$ folgendes:

Wenn y_0 Nullteiler ist, so haben wir eine Abbildung auf den durch y_0 festgelegten Halbstrahl.

Wenn y_0 in einem der vier Quadranten liegt, so haben wir eine eineindeutige Abbildung der x-Ebene auf den durch y_0 bestimmten Quadranten, wobei die Geraden $x = \xi e + b$ in Halbstrahlen $y = \exp \xi \cdot y(b)$ übergehen. (Vgl. Fig. 2.)

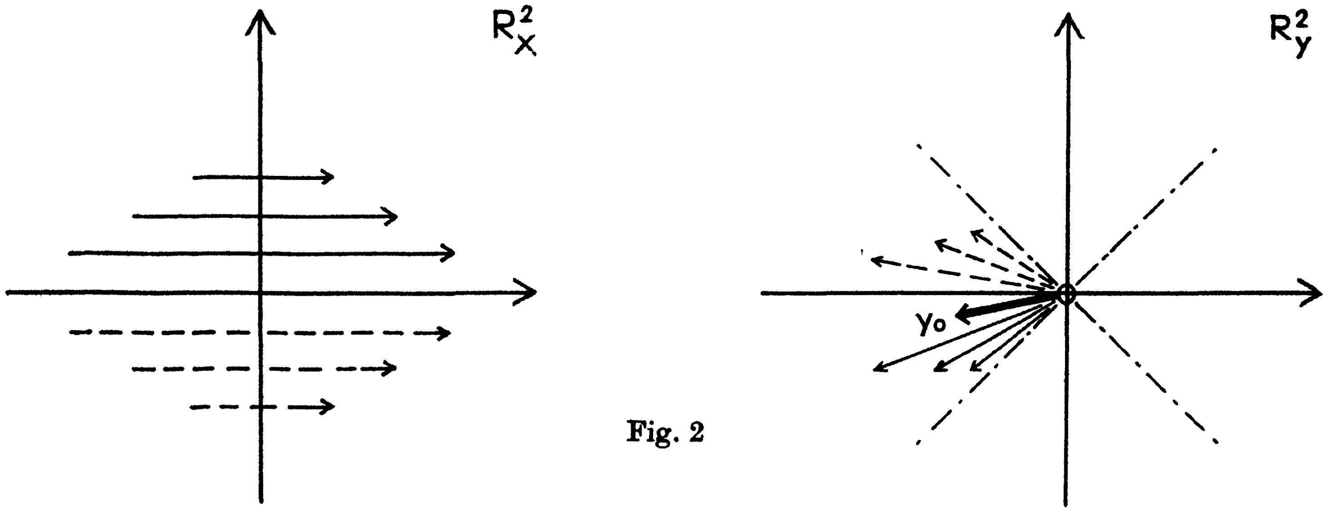

Fig. 2

4.5. *Die ausgearteten Fälle.* Nach der in 3.5 gegebenen Vorschrift muß dem Vektor $x = (\xi^1, \xi^2)$ das Ringelement $(\xi^1 + \xi^2)e_1$ zugeordnet werden. Wir ersehen daraus, daß für alle x mit konstanter Summe $\xi^1 + \xi^2$, also für eine ganze Gerade der x-Ebene, $y(x)$ gleich lautet. Und damit ist klar, daß die Lösungsfunktion $y(x)$ in keinem Punkt eine reguläre Ableitung besitzt, und daß der Wertebereich der Funktion unendlich oft überdeckt wird.

Um dem Umstand Rechnung zu tragen, daß für gewisse x das zugehörige $y(x)$ gleich ist, führen wir mit Vorteil eine neue Variable ein, nämlich

$$\xi = \xi^1 + \xi^2 \qquad (-\infty < \xi < \infty)\,.$$

4.6. *Der ausgeartet-definite Fall.* Wir können wieder die komplexen Zahlen verwenden und erhalten

$$y(x) = (\exp(B_1 + B_2 i)\xi)\, y_0 = (\exp B_1 \xi)\,(\exp B_2 \xi i)\, y_0\,.$$

Das ist nichts anderes als eine logarithmische Spirale. Es gilt ja

$$|\,y\,| = |\exp B_1 \xi\,| \cdot |\exp B_2 \xi i\,| \cdot |\,y_0\,| = (\exp B_1 \xi)\,|\,y_0\,|\,.$$

Ob wir für zunehmendes ξ eine nach innen oder nach außen zu durchlaufende, rechts- oder linkgsdrehende Spirale erhalten, hängt von den Vorzeichen von B_1 und B_2 ab.

Spezialfälle. 1. Für $B_1 = 0$ erhalten wir einen unendlichen oft zu durchlaufenden Kreis mit dem Radius $|\,y_0\,|$.

2. Für $B_2 = 0$ erhalten wir als Bild den Halbstrahl $y = (\exp B_1 \xi) y_0$.

4.7. *Der ausgeartet-semidefinite Fall.* Die Lösung $y(x)$ lautet für diesen Fall

$$y(x) = (\exp(B_1 + B_2 j)\xi) y_0 = (\exp B_1 \xi)(1 + B_2 \xi j) y_0 .$$

Wir haben in 4.3 gezeigt, welche Auswirkungen die Anfangsbedingung y_0 auf den Funktionsverlauf hat, und beschränken uns jetzt auf die spezielle Anfangsbedingung $y_0 = 1$.

Die beiden Komponenten von $y(x)$ heißen dann

$$\eta^1 = \exp B_1 \xi \quad \text{und} \quad \eta^2 = B_2 \xi \cdot \exp B_1 \xi ,$$

und für die Ableitungen nach ξ erhält man

$$\frac{d\eta^1}{d\xi} = B_1 \cdot \exp B_1 \xi \quad \text{und} \quad \frac{d\eta^2}{d\xi} = B_2 (B_1 \xi + 1) \exp B_1 \xi .$$

Setzt man $B_1 \cdot B_2 \neq 0$ voraus, so ist $\frac{d\eta^1}{d\xi}$ durchwegs positiv, während $\frac{d\eta^2}{d\xi}$ an der Stelle $\xi = -\frac{1}{B_1}$ verschwindet. Es existiert also unter dieser Voraussetzung immer ein Extremum. Beachtet man noch, daß η^1, $\eta^2 \to 0$ für $\xi \to -\infty$ und $\eta^1 \to \infty$, $\eta^2 \to \pm\infty$ für $\xi \to \infty$, so hat man einen guten Überblick über den Funktionsverlauf. (Vgl. Fig. 3.)

Ob das Extremum ein Minimum oder ein Maximum ist, und in welcher Richtung die Kurve zu durchlaufen ist, hängt von den Vorzeichen von B_1 und B_2 ab.

Spezialfälle. 1. Für $B_1 = 0$ (zweifache Ausartung) erhalten wir als Bild eine zu j parallele Gerade, denn es ist $\eta^1 = \eta^1_0 = 1$.

2. Für $B_2 = 0$ erhalten wir den Halbstrahl $y(x) = (\exp B_1 \xi) y_0$.

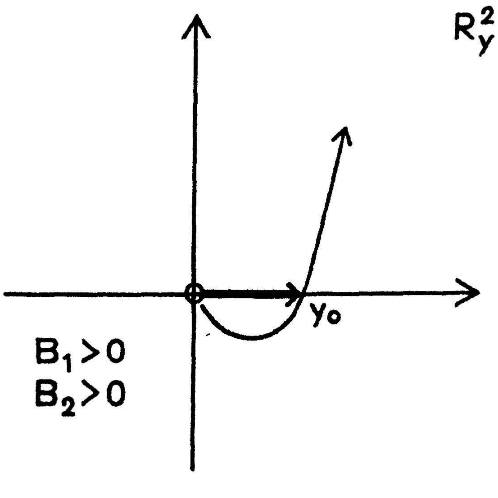

Fig. 3

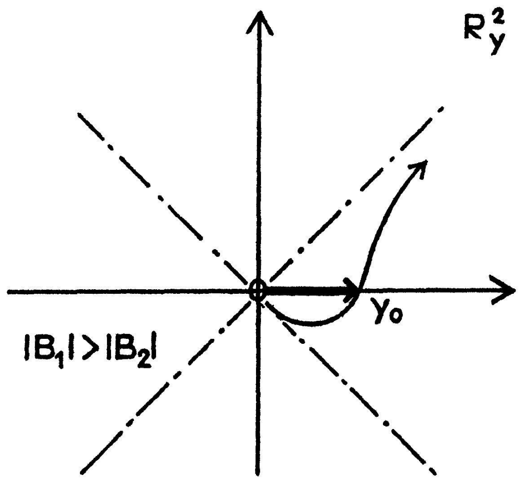

Fig. 4

4.8. *Der ausgeartet-indefinite Fall.* Wir beschränken uns auch in diesem Fall auf die spezielle Anfangsbedingung $y_0 = 1$, da wir in 4.4 ausgeführt haben, welchen Einfluß die Wahl von y_0 hat.

Die Lösung $y(x)$ lautet dann

$$y(x) = \exp(B_1 + B_2 k)\xi = \exp B_1 \xi \cdot (\operatorname{Cos} B_2 \xi + k \operatorname{Sin} B_2 \xi),$$

und für die Ableitung der beiden Komponenten nach ξ erhält man

$$\frac{d\eta^1}{d\xi} = \exp B_1 \xi \cdot (B_1 \cdot \operatorname{Cos} B_2 \xi + B_2 \cdot \operatorname{Sin} B_2 \xi)$$

$$\frac{d\eta^2}{d\xi} = \exp B_1 \xi \cdot (B_1 \cdot \operatorname{Sin} B_2 \xi + B_2 \cdot \operatorname{Cos} B_2 \xi)$$

Wenn wir $|B_1| > |B_2|$ voraussetzen, ist $\frac{d\eta^1}{d\xi}$ durchwegs ungleich null, $\frac{d\eta^2}{d\xi}$ dagegen hat genau eine Nullstelle. Es gibt also eine horizontale, aber keine vertikale Tangente. Beachtet man dazu noch das asymptotische Verhalten der Funktion, so erhält man ein gutes Bild des Funktionsverlaufes. (Vgl. Fig. 4.)

Wenn wir $|B_1| < |B_2|$ voraussetzen, so verhält es sich gerade umgekehrt; wir haben eine vertikale, aber keine horizontale Tangente. Dazu ändert sich auch das asymptotische Verhalten. (Vgl. Fig. 5.)

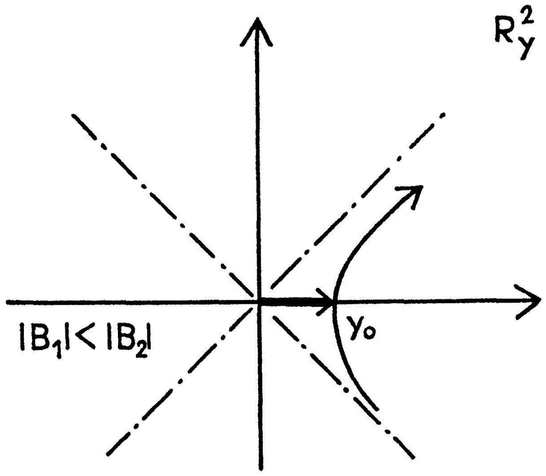

Fig. 5

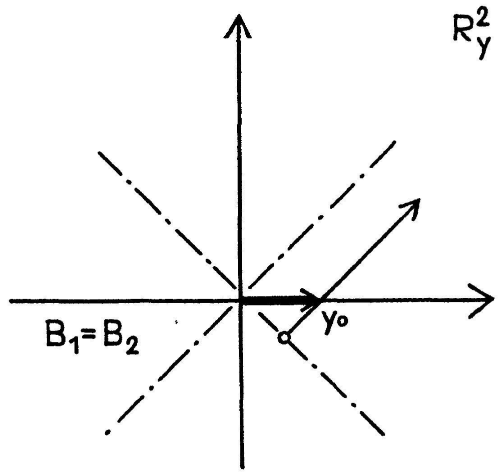

Fig. 6

Spezialfälle. 1. Für $|B_1| = |B_2|$ (zweifache Ausartung) erhalten wir als Bild einen zu $B_1 + B_2 k$ parallelen Halbstrahl. (Vgl. Fig. 6.)

2. Für $B_1 = 0$ entsteht eine Abbildung auf den Ast einer gleichseitigen Hyperbel, denn es ist $(\eta^1)^2 - (\eta^2)^2 = 1$.

3. Für $B_2 = 0$ wird $y(x) = (\exp B_1 \xi) y_0$; wir haben also eine Abbildung auf den durch y_0 festgelegten Halbstrahl.

4.9. *Bemerkung.* Es besteht ein interessanter Zusammenhang zwischen den ausgearteten und nicht ausgearteten Fällen.

Wenn man nämlich bei den nicht ausgearteten Fällen den Argumentbereich x auf eine durch 0 gehende Gerade einschränkt, so erhält man als Bild dieser Geraden den Funktionsverlauf des entsprechenden ausgearteten Falles. Je nach Neigung der Geraden entstehen die verschiedenen Spezialfälle.

II. Die Riccatische Differentialgleichung

Wir behandeln in diesem Abschnitt kurz die drei Hauptfälle der Riccatischen Differentialgleichung, wobei wieder die in I. 3 eingeführten Ringe Verwendung finden.

§ 1. Die Normalform

1.1. *Die Gleichung.* Die allgemeine Riccatische Differentialgleichung hat die Form

$$y'dx = Adx + Bdxy + Cdxyy \qquad dx \in R_x^m,\ y \in R_y^n\,.$$

A ist ein linearer, B ein bilinearer und C ein trilinearer Operator. Wir setzen diese Operatoren, die alle von x abhängen könnten, als konstant voraus.

Im weitern wollen wir noch voraussetzen, daß C in bezug auf die beiden letzten Argumente symmetrisch ist, daß also $Chy_1y_2 = Chy_2y_1$.

1.2. *Die Integrabilitätsbedingung.* Nach der allgemeinen Theorie über die Differentialgleichungen erster Ordnung (siehe I. 1.4.) lautet die Integrabilitätsbedingung

$$(Bh + 2Chy)\,(Ak + Bky + Ckyy) = (Bk + 2Cky)\,(Ah + Bhy + Chyy)\,.$$

Weil diese Gleichung identisch in y erfüllt sein muß, kann man sie in die vier Gleichungen

$$BhAk = BkAh\,, \tag{1.1}$$
$$BhBky + 2ChyAk = BkBhy + 2CkyAh\,, \tag{1.2}$$
$$BhCkyy + 2ChyBky = BkChyy + 2CkyBhy\,, \tag{1.3}$$
$$ChyCkyy = CkyChyy \tag{1.4}$$

auflösen. Da wir die Operatoren A, B und C als voneinander unabhängig annehmen, zerfällt die Gleichung (1.2) weiter in

$$BhBky = BkBhy \tag{1.2a}$$

und

$$ChyAk = CkyAh\,. \tag{1.2b}$$

1.3. *Folgerungen aus der Integrabilitätsbedingung.* Wir erkennen (1.2a) als die in I. 2 behandelte Integrabilitätsbedingung für die homogene lineare Differentialgleichung. Aus diesem Grund benützen wir die dort hergeleiteten Resultate und verwenden für den als nicht ausgeartet vorausgesetzten Operator B die Normalmatrix (2.15)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \quad (\mu = -1, 0, 1) \tag{1.5}$$

sowie den dazu passenden Ring mit den Multiplikationsvorschriften (siehe I. 3)

$$e_1 \cdot e_1 = e_1 \, , \quad e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = e_2 \, , \quad e_2 \cdot e_2 = \mu e_1 \, .$$

In diesem Ring vereinfacht sich die Gleichung (1.1) zu

$$h \cdot A k = k \cdot A h \, ,$$

was man für alle h und k, die keine Nullteiler sind, weiter umformen kann zu

$$\frac{A k}{k} = \frac{A h}{h} = \text{konst.} \overset{\text{Def.}}{=} A \, .$$

Daraus folgt, daß man im Ring Ah als Produkt $A \cdot h$ darstellen kann. Schreiben wir das Ringelement A in der Form $A_1 e_1 + A_2 e_2$, so erhält die Matrix (A_μ^λ) die Form

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \mu A_2 & A_1 \end{pmatrix} \quad (\mu = -1, 0, 1) \tag{1.6}$$

Wenn die Gleichung (1.2b) für jeden Operator A der Form (1.6) erfüllt ist, so ist auch $ChyBky = CkyBhy$. Die Gleichung (1.3) vereinfacht sich damit zu $BhCkyy = BkChyy$ und im Ring zu

$$h \cdot Ckyy = k \cdot Chyy \, .$$

Analog wie oben für A schließt man, daß sich $Chyy$ als Produkt $(Cyy) \cdot h$ darstellen läßt.

Verwenden wir jetzt nochmals die Gleichung (1.2b) und setzen darin $A = 1$, so folgert man auf die selbe Art wie schon zweimal, daß im Ring Cyk weiter zerfällt in $(Cy) \cdot k$.

Weil wir Chy_1y_2 als symmetrisch in bezug auf y_1 und y_2 vorausgesetzt haben, ist gezeigt, daß sich Chy_1y_2 in unserem Ring als Produkt $C \cdot h \cdot y_1 \cdot y_2$ darstellt. Setzen wir das Ringelement C in der Form $C_1 e_1 + C_2 e_2$ an, so erhält die zugehörige Matrix die Form

$$(C^{\lambda}_{\mu 1\nu}) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ \mu C_2 & C_1 \\ \mu C_2 & C_1 \\ \mu C_1 & \mu C_2 \end{pmatrix} \qquad (C^{\lambda}_{\mu 2\nu}) = \begin{pmatrix} \mu C_2 & C_1 \\ \mu C_1 & \mu C_2 \\ \mu C_1 & \mu C_2 \\ \mu^2 C_2 & \mu C_1 \end{pmatrix} \quad (\mu = -1, 0, 1) \tag{1.7}$$

Durch Einsetzen in der Integrabilitätsbedingung überzeugt man sich, daß die Form (1.6) und (1.7) für die Operatoren A und C nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist, sofern man den Operator B in der Form (1.5) voraussetzt.

Im folgenden verwenden wir die drei Operatoren B, A und C immer in der Normalform (1.5), (1.6) und (1.7) und rechnen ausschließlich mit den zugehörigen Ringelementen $B = e_1$, $A = A_1 e_1 + A_2 e_2$ und $C = C_1 e_1 + C_2 e_2$.

§ 2. Die Lösung bei nicht verschwindender Diskriminante

2.1. *Definiter Fall.* Da wir es hier mit der bekannten komplexen Riccatischen Differentialgleichung

$$y' = A + By + Cy^2 \tag{2.1}$$

zu tun haben, fassen wir uns kurz.

Mit der Substitutionsgleichung

$$Cy = -\frac{u'}{u} \tag{2.2}$$

führt man (2.1) in eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung über, die folgendermaßen lautet:

$$u'' - Bu' + ACu = 0\,. \tag{2.3}$$

Da wir $B^2 - 4AC \neq 0$ vorausgesetzt haben, heißt die Lösung dieser Gleichung

$$u = k_1 \cdot \exp\left(\frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2}\, x\right) + k_2 \cdot \exp\left(\frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2}\, x\right).$$

Setzt man diesen Wert für u in (2.2) ein, so wird

$$y(x) = -\frac{k_1 (B + \sqrt{B^2 - 4AC})(\exp \sqrt{B^2 - 4AC}\, x) + k_2 (B - \sqrt{B^2 - 4AC})}{2Ck_1 (\exp \sqrt{B^2 - 4AC}\, x) + 2Ck_2}$$

Hierbei lassen sich die Integrationskonstanten so bestimmen, daß die Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ gilt. Die endgültige Lösung heißt dann

$$y(x, y_0) = \tag{2.4}$$
$$= \frac{((B + \sqrt{B^2 - 4AC})y_0 + 2A)(\exp \sqrt{B^2 - 4AC}\,x) - (B - \sqrt{B^2 - 4AC})y_0 - 2A}{(-(B - \sqrt{B^2 - 4AC}) - 2Cy_0)(\exp \sqrt{B^2 - 4AC}\,x) + B + \sqrt{B^2 - 4AC} + 2Cy_0}.$$

Wir erkennen, daß sich die durch (2.4) vermittelte Abbildung aus einer Exponential- und einer Möbiustransformation zusammensetzt. Mit Ausnahme der beiden singulären Stellen

$$y = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C} \tag{2.5}$$

wird jeder Punkt der y-Ebene (einschließlich ∞) erreicht, und zwar unendlich oft. Wir haben also eine eineindeutige Abbildung der x-Ebene auf eine unendlichblättrige RIEMANNsche Fläche mit den beiden Windungspunkten (2.5).

Wählt man eine der beiden Stellen (2.5) als Anfangsbedingung, so degeneriert die Abbildung, denn es ist

$$y\left(x, \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}\right) = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}.$$

2.2. *Der semidefinite Fall.* Wir übertragen das in 2.1 dargestellte normale Lösungsverfahren auf den semidefiniten Fall, was unter folgenden zwei Voraussetzungen ohne weiteres möglich ist:

1°. C ist kein Nullteiler (damit wir durch C dividieren können).

2°. Für die Diskriminante $B^2 - 4AC = \alpha + \beta j$ ist $\alpha > 0$ (damit sich die Wurzel $\sqrt{B^2 - 4AC}$ ziehen läßt).

Zur Interpretation der Lösung (2.4) untersuchen wir zuerst die linear gebrochene Funktion

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Wir behaupten, daß diese Funktion die Geraden $\xi^1 =$ konst. in Gerade $\eta^1 =$ konst. überführt. Zum Beweis bilden wir zuerst den Quotienten

$$\frac{a}{c} = \frac{\alpha^1 + \alpha^2 j}{\gamma^1 + \gamma^2 j} \quad \frac{(\alpha^1 + \alpha^2 j)(\gamma^1 - \gamma^2 j)}{(\gamma^1)^2} = \frac{\alpha^1}{\gamma^1} + \frac{\alpha^2\gamma^1 - \alpha^1\gamma^2}{(\gamma^1)^2} j$$

und erhalten dann

$$\eta^1 = \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^1 = \frac{\alpha^1\xi^1 + \beta^1}{\gamma^1\xi^1 + \delta^1}, \quad \eta^2 = \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^2 = \xi^2 \cdot \frac{\alpha^1\delta^1 - \beta^1\gamma^1}{(\gamma^1\xi^1 + \delta^1)^2} + f(\xi^1).$$

Damit ist gezeigt, daß η^1 für alle x mit gleicher erster Komponente ξ^1 gleich ist, und daß η^2 für konstantes ξ^1 jeden endlichen Wert genau einmal annimmt.

Wenn man ξ^1 monoton von 0 gegen $+\infty$ gehen läßt, so ändert sich η^1 monoton von $\frac{\beta^1}{\delta^1}$ gegen den Grenzwert $\frac{\alpha^1}{\gamma^1}$, wobei für $\gamma^1 \cdot \delta^1 < 0$ die Unstetigkeitsstelle $\pm\infty$ passiert wird.

Wir kehren jetzt zur Lösung (2.4) zurück und untersuchen die erste Komponente

$$\eta^1 = \frac{((1+\sqrt{1-4A_1C_1})\eta_0^1 + 2A_1)\exp\sqrt{1-4A_1C_1}\,\xi^1 - (1-\sqrt{1-4A_1C_1}) - 2A_1}{-(1-\sqrt{1-4A_1C_1}+2C_1\eta_0^1)\exp\sqrt{1-4A_1C_1}\,\xi^1 + 1 + \sqrt{1-4A_1C_1} + 2C_1\eta_0^1}\,. \tag{2.6}$$

Wenn wir ξ^1 das Intervall $(-\infty, \infty)$ durchlaufen lassen, durchläuft $\exp\sqrt{1-4A_1C_1}\,\xi^1$ das Intervall $(0, \infty)$. Wie wir oben gesehen haben, folgt daraus, daß sich η^1 monoton zwischen den Grenzen

$$\eta_0^1 = -\frac{(1-\sqrt{1-4A_1C_1})\eta_0^1 + 2A_1}{1+\sqrt{1-4A_1C_1}+2C_1\eta_0^1} = \frac{-1+\sqrt{1-4A_1C_1}}{2C_1} \tag{2.7a}$$

$$\eta_\infty^1 = -\frac{(1+\sqrt{1-4A_1C_1})\eta_0^1 + 2A_1}{1-\sqrt{1-4A_1C_1}+2C_1\eta_0^1} = \frac{-1-\sqrt{1-4A_1C_1}}{2C_1} \tag{2.7b}$$

ändert. Damit wissen wir über den Funktionsverlauf im semidefiniten Fall Bescheid:

Liegt die Anfangsbedingung y_0 zwischen den beiden Grenzgeraden (2.6), so wird die ganze x-Ebene eineindeutig auf das offene Gebiet zwischen diesen beiden Grenzgeraden abgebildet, und zwar so, daß die Geraden $\xi^1 =$ konst. in Gerade $\eta^1 =$ konst. übergehen. (Vgl. Fig. 7a.)

Liegt y_0 außerhalb der beiden Grenzgeraden, so wird die x-Ebene (mit Ausnahme einer Geraden) in gleicher Weise eineindeutig auf das Außengebiet abgebildet. (Vgl. Fig. 7b.)

Liegt y_0 auf einer der beiden Grenzgeraden, so artet die Abbildung aus, denn es ist

$$\eta^1\left(\xi^1, \frac{-1\pm\sqrt{1-4A_1C_1}}{2C_1}\right) = \frac{-1\pm\sqrt{1-4A_1C_1}}{2C_1}\,.$$

2.3. *Der indefinite Fall.* Um das Lösungsverfahren von 2.1 ohne Schwierigkeiten auf den indefiniten Fall übertragen zu können, setzen wir voraus

1°. C ist kein Nullteiler.

2°. Für die Diskriminante $B^2 - 4AC = \alpha + \beta k$ ist $\alpha > |\beta|$.

Wie im indefiniten Fall untersuchen wir zunächst die linear gebrochene Funktion $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Wir behaupten, daß diese Funktion die Geraden $\xi^1 \pm \xi^2 =$ konst. in Gerade $\eta^1 \pm \eta^2 =$ konst. überführt.

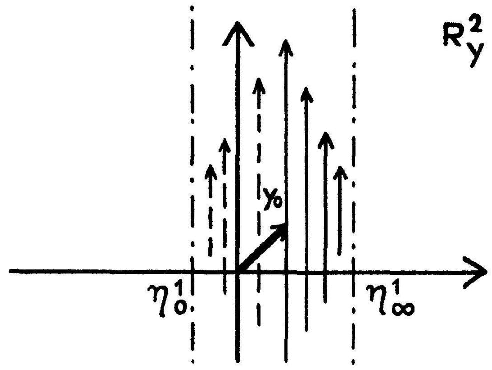

Fig. 7a

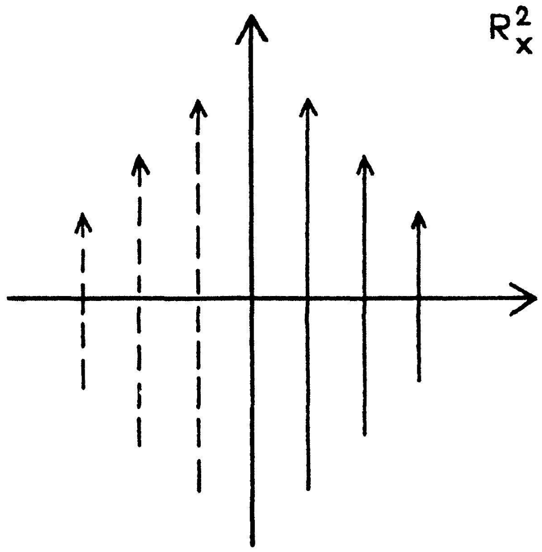

Fig. 7

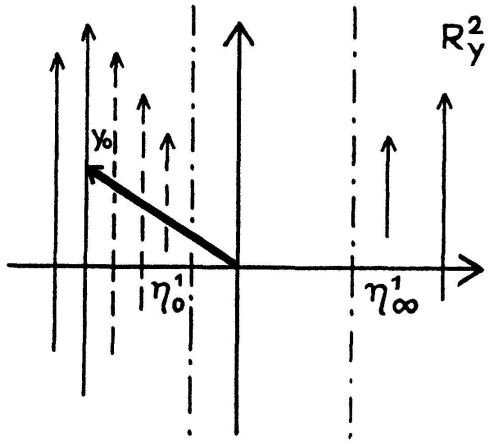

Fig. 7b

Zum Beweis formen wir y wie folgt um:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\alpha+\beta k}{\gamma+\delta k} = \frac{(\alpha+\beta k)(\gamma-\delta k)}{\gamma^2-\delta^2} = \frac{\alpha\gamma-\beta\delta+(\beta\gamma-\alpha\delta)k}{\gamma^2-\delta^2}$$

Daraus bilden wir

$$\eta^1 \pm \eta^2 = \frac{\alpha\gamma-\beta\delta\pm\beta\gamma\mp\alpha\delta}{\gamma^2-\delta^2} = \frac{(\alpha\pm\beta)(\gamma\mp\delta)}{(\gamma+\delta)(\gamma-\delta)} = \frac{\alpha\pm\beta}{\gamma\pm\delta}\,.$$

Wenn man beachtet, daß α als Abkürzung für $\alpha^1\xi^1+\alpha^2\xi^2+\beta^1$ eingesetzt war und ebenso auch β, γ und δ, so erhält man endgültig

$$\eta^1 \pm \eta^2 =$$
$$= \frac{\alpha^1\xi^1+\alpha^2\xi^2+\beta^1\pm(\alpha^1\xi^2+\alpha^2\xi^1+\beta^2)}{\gamma^1\xi^1+\gamma^2\xi^2+\delta^1\pm(\gamma^1\xi^2+\gamma^2\xi^1+\delta^2)} = \frac{(\alpha^1\pm\alpha^2)(\xi^1\pm\xi^2)+\beta^1\pm\beta^2}{(\gamma^1\pm\gamma^2)(\xi^1\pm\xi^2)+\delta^1\pm\delta^2}\,,$$

womit gezeigt ist, daß für konstantes $\xi^1 \pm \xi^2$ auch $\eta^1 \pm \eta^2$ konstant ist.

Genau wie beim semidefiniten Fall schließt man nun, daß sich $\eta^1 \pm \eta^2$ monoton zwischen den Grenzen $\dfrac{\beta^1\pm\beta^2}{\delta^1\pm\delta^2}$ und $\dfrac{\alpha^1\pm\alpha^2}{\gamma^1\pm\gamma^2}$ ändert, falls $\xi^1 \pm \xi^2$ das Intervall $(0, \infty)$ durchläuft.

Diese Resultate übertragen wir auf die Lösung (2.4). Wenn man hier $\eta^1 \pm \eta^2$ bildet, stellt man fest, daß die Variable das Intervall $(0, \infty)$ durchläuft, wenn man $\xi^1 \pm \xi^2$ von $-\infty$ nach $+\infty$ gehen läßt. $\eta^1 \pm \eta^2$ ändert sich somit monoton zwischen den beiden Grenzen

$$(\eta^1 \pm \eta^2)_0 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4(A_1 \pm A_2)(C_1 \pm C_2)}}{2(C_1 \pm C_2)} \tag{2.8a}$$

$$(\eta^1 \pm \eta^2)_\infty = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4(A_1 \pm A_2)(C_1 \pm C_2)}}{2(C_1 \pm C_2)} \tag{2.8b}$$

Durch die beiden Geradenpaare (2.8) wird die y-Ebene in 4 Gebiete eingeteilt. Je nach der Wahl der Anfangsbedingung y_0 wird die ganze x-Ebene (eventuell mit Ausnahme von einer oder zwei Geraden) eineindeutig auf eines dieser vier Gebiete abgebildet, wobei alle Geraden $\xi^1 \pm \xi^2 = \text{konst.}$ auf Geradenstücke $\xi^1 \pm \eta^2 = \text{konst.}$ abgebildet werden. (Vgl. Fig. 8.)

Die Abbildung artet aus, wenn man y_0 auf einer Grenzgeraden wählt.

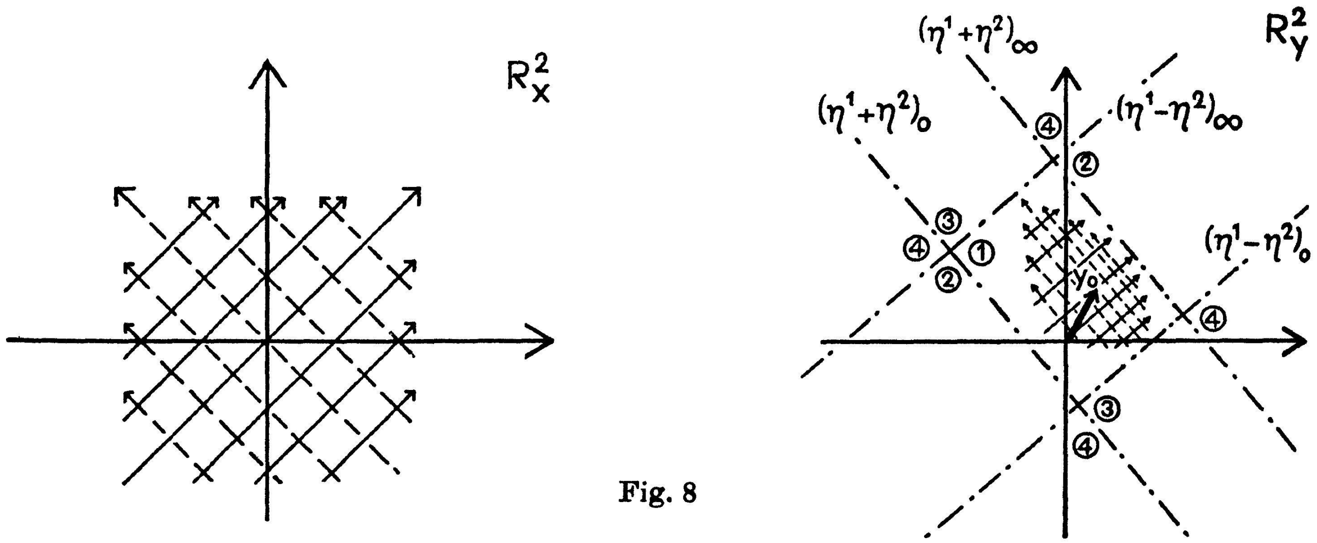

Fig. 8

2.4. *Bemerkungen.* 1. Wenn C Nullteiler ist, muß das Lösungsverfahren nur wenig modifiziert werden. Der Funktionsverlauf ist prinzipiell gleich, es tritt lediglich eine Verschiebung der Grenzgeraden (2.7) bzw. (2.8) ein, wobei die eine ins Unendliche rückt.

2. Wenn die Diskriminante $B^2 - 4AC$ verschwindet, so lautet die Lösung der Riccatischen Gleichung für den definiten (komplexen) Fall

$$y(x, y_0) = \frac{(By_0 + 2A)x + 2Cy_0}{-(2Cy_0 + B)x + 2}\,. \tag{2.9}$$

Es handelt sich also um eine Möbiustransformation.

Auch diese Lösung (2.9) läßt sich ohne Schwierigkeiten auf den semidefiniten und den indefiniten Fall übertragen.

LITERATURVERZEICHNIS

L. BIEBERBACH, [1] *Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*. Grundlehren Math. Wiss. 66, Springer (1953).

W. GRAEUB, [1] *Lineare Algebra*. Grundlehren Math. Wiss. 97, Springer (1958).

E. KAMKE, [1] *Differentialgleichungen*. Becker und Erler, Leipzig (1942).

K. KNOPP, [1]–[3] *Funktionentheorie*. Sammlung Göschen 668, 703, 1109, Berlin (1949).

F. und R. NEVANLINNA, [1] *Absolute Analysis*. Grundlehren Math. Wiss. 102, Springer (1959).

B. L. VAN DER WAERDEN, [1] *Algebra I*. Grundlehren Math. Wiss. 33, Springer (1955).

(Eingegangen den 7. März 1961)