

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 37 (1962-1963)

Artikel: Die Grundgleichungen der Flächentheorie III.
Autor: Scherrer, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-28616>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Grundgleichungen der Flächentheorie III

VON W. SCHERRER, Bern

§ 1. Einleitung

Da die Teile I und II¹⁾ schon um einige Jahre zurückliegen, sollen hier zuerst die Leitgedanken der ganzen Untersuchung in Erinnerung gerufen werden.

Die klassische Theorie einer Fläche im euklidischen Raum mit dem Ortsvektor

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v) \quad (1.1)$$

und der Normalen

$$\mathfrak{N} = [\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v] / |[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v]| \quad (1.2)$$

gründet sich bekanntlich auf zwei quadratische Differentialformen, die erste Grundform oder das Linienelement

$$\dot{s}^2 \equiv \dot{\mathbf{x}}^2 \equiv E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2, \quad (1.3)$$

und die zweite Grundform

$$- \mathfrak{N} \dot{\mathbf{x}} \equiv L \dot{u}^2 + 2M \dot{u} \dot{v} + N \dot{v}^2. \quad (1.4)$$

Bei Anwendungen macht man immer wieder die Erfahrung, daß der Übergang von den 6 Koeffizienten der beiden Grundformen zu direkt geometrisch deutbaren Größen umständlich und undurchsichtig ausfällt, speziell dann, wenn man die Freiheit der Parameterwahl wahren will.

In einer ersten Phase war ich daher bestrebt, geometrische Größen, nämlich den Winkel, die Bogenlängen und die Krümmungen des Parameternetzes, direkt in die Grundgleichungen einzubauen. Demgemäß bezeichne ich mit θ den Netzwinkel und mit $s_1, s_2; \gamma_1, \gamma_2; \kappa_1, \kappa_2$ und τ_1, τ_2 die Bogenlängen, geodätischen Krümmungen, Normalschnittkrümmungen und geodätischen Torsionen der u -Linien ($v = \text{konst.}$), respektive der v -Linien ($u = \text{konst.}$).

Ein erster Schritt besteht nun darin, dem Linienelement die Gestalt

$$\dot{s}^2 \equiv \dot{\mathbf{x}}^2 \equiv E^2 \dot{u}^2 + 2EG \cos \theta \dot{u} \dot{v} + G^2 \dot{v}^2 \quad (1.5)$$

zu erteilen. Dann stellen die Größen

$$E = \frac{ds_1}{du}, \quad G = \frac{ds_2}{dv} \quad (1.6)$$

¹⁾ Diese Zeitschrift Bd. 29, S. 180–198 (1955) und Bd. 32, S. 73–84 (1957), im vorliegenden Text zitiert unter I und II.

die Verzerrungen der Netzl原因en relativ zu den Parameterskalen dar und geben Anlaß, die Ableitungen nach den Bogenlängen der u - respektive v -Linien als Operatoren

$$D_u \equiv \frac{\partial}{E \partial u}, D_v \equiv \frac{\partial}{G \partial v} \quad (1.7)$$

einzuführen.

Für die geodätischen Krümmungen der Netzl原因en ergeben sich die Formeln

$$\gamma_1 = \Gamma_1 - D_u \theta, \gamma_2 = \Gamma_2 + D_v \theta \quad (1.8)$$

worin die Symbole Γ_1 und Γ_2 definiert sind durch

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\equiv -\frac{1}{\sin \theta} \frac{D_v E}{E} + \cotg \theta \frac{D_u G}{G} \\ \Gamma_2 &\equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{D_u G}{G} - \cotg \theta \frac{D_v E}{E}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Hier empfiehlt es sich, auch die oft benötigte Auflösung von (1.9) zu notieren:

$$\begin{aligned} \frac{D_v E}{E} &= -\frac{\Gamma_1}{\sin \theta} + \cotg \theta \Gamma_2 \\ \frac{D_u G}{G} &= \frac{\Gamma_2}{\sin \theta} - \cotg \theta \Gamma_1 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Als Kommutator der Operatoren (1.7) schließlich ergibt sich

$$D_v D_u - D_u D_v = \frac{D_u G}{G} D_v - \frac{D_v E}{E} D_u. \quad (1.11)$$

Wegen (1.10) kann man für ihn auch schreiben

$$\begin{aligned} &\sin \theta (D_v D_u - D_u D_v) \\ &= \Gamma_1 D_u + \Gamma_2 D_v - \cos \theta (\Gamma_2 D_u + \Gamma_1 D_v). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Der zweite Schritt der ersten Phase führt zur Feststellung, daß die 4 Linienkrümmungen $\kappa_1, \kappa_2, \tau_1, \tau_2$, zwischen denen die Relation

$$\boxed{\kappa_1 \cos \theta + \tau_1 \sin \theta = \kappa_2 \cos \theta - \tau_2 \sin \theta} \quad (1.13)$$

besteht, einen vollständigen Ersatz für die 3 Koeffizienten L, M, N der zweiten Grundform liefern.

Im Verein mit der eben skizzierten Anpassung der ersten Grundform erhält man als Ergebnis der ersten Phase die Grundgleichungen der Flächentheorie in einer Gestalt [I, §§ 3 und 4], die den Bedürfnissen der geometrischen Deutung entgegenkommt, wie ich an einigen Beispielen erläutert habe [I, § 9].

Für das Folgende benötigen wir jedoch nicht den ganzen Formelapparat der ersten Phase. Ich verzichte daher auf seine Wiedergabe und begnüge mich, diejenigen Relationen herauszugreifen, die zusammen mit (1.13) den Ausgangspunkt für die zweite Phase bilden. Es sind dies diejenigen Formeln, welche an die Stelle der klassischen Darstellung der GAUSS'schen Krümmung K und der mittleren Krümmung H als Simultaninvarianten der beiden Grundformen treten:

$$K = \kappa_1 \kappa_2 + \tau_1 \tau_2 + (\kappa_1 \tau_2 - \kappa_2 \tau_1) \cotg \theta \quad (1.14)$$

und

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) - \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2) \cotg \theta \quad (1.15)$$

Ein Blick auf die Gleichungen (1.13) – (1.15) regt an zum Versuch, diese Gleichungen soweit als möglich nach den Linienkrümmungen $\kappa_1, \kappa_2, \tau_1, \tau_2$ aufzulösen. Die Analyse zeigt, daß es sich zu diesem Zweck empfiehlt, einen Hilfswinkel ω einzuführen gemäß

$$\operatorname{tg} \omega \equiv - \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\tau_1 - \tau_2} \quad (1.16)$$

Macht man noch Gebrauch von der Abkürzung

$$J \equiv \sqrt{H^2 - K} \quad (1.17)$$

so ergibt die Auflösung folgende Tabelle

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= H + J \cos(\omega + \theta); \quad \tau_1 = J \sin(\omega + \theta) \\ \kappa_2 &= H + J \cos(\omega - \theta); \quad \tau_2 = J \sin(\omega - \theta) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Dabei ist noch zu bemerken, daß wir hier – wie schon in II – das in I gewählte ω durch $-\omega$ ersetzt haben.

Betrachtet man schließlich eine beliebige Flächenkurve C durch den Punkt (u, v) , deren Richtung mit der u -Linie ($v = \text{konst.}$) daselbst den Winkel α einschließt, so gelten für die Normalschnittkrümmung κ und die geodätische Torsion τ von C folgende Formeln:

$$\begin{aligned} \kappa &= H + J \cos(\omega + \theta - 2\alpha) \\ \tau &= J \sin(\omega + \theta - 2\alpha). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Da eine Hauptrichtung durch $\tau = 0$ charakterisiert werden kann, folgt aus (1.19)

Satz 1: *Dreht man eine Winkelhalbierende des Parameternetzes um $\frac{\omega}{2}$, so fällt sie mit einer Hauptrichtung zusammen.*

Desgleichen ergibt sich aus (1.17) oder (1.19)

Satz 2: *Die Transformation*

$$\omega \rightarrow \omega + \pi$$

muß durch

$$J \rightarrow -J$$

kompensiert werden.

Wegen dieser Eigenschaften habe ich ω als *Hauptwinkel* des Netzes bezeichnet.

Die zweite Phase der Untersuchung wird nun dadurch eingeleitet, daß man in den CODAZZISCHEN Gleichungen der ersten Phase [I § 4 (7) oder (9)] die Größen $\kappa_1, \kappa_2, \tau_1, \tau_2$ gemäß (1.18) durch H, J, θ und ω ersetzt. Doch ist es für unsere jetzigen Zwecke nicht nötig, den Weg über diese Station zu nehmen. Vielmehr genügt es, vermittels klassischer Formeln für κ und τ die Koeffizienten L, M, N der zweiten Grundform direkt durch H, J, θ und ω auszudrücken. Das Ergebnis dieser Berechnung erhält man aus I § 8 (3), wenn man daselbst ω durch $-\omega$ ersetzt:

$$\begin{aligned} L &= E^2 [H + J \cos (\omega + \theta)] \\ M &= EG (H \cos \theta + J \cos \omega) \\ N &= G^2 [H + J \cos (\omega - \theta)] \end{aligned} \quad (1.20)$$

Führt man nun diese Werte unter Beachtung von (1.5) in die klassischen CODAZZISCHEN Gleichungen ein, so erhalten dieselben die der zweiten Phase der Untersuchung entsprechende Gestalt [II, § 2, (1), (2a), (2b)]. Wie man leicht feststellt, erfahren diese Gleichungen eine gewisse formale Vereinfachung, wenn man von den durch (1.7) definierten Operatoren D_u und D_v Gebrauch macht. Wir notieren daher die CODAZZISCHEN Gleichungen in dieser Gestalt:

$$\begin{aligned} -J \sin \theta D_u \omega &= (D_u H - \cos \theta D_v H) \cos \omega + \sin \theta D_v H \sin \omega \\ &\quad - D_v J + \cos \theta D_u J + J \sin \theta (2 \Gamma_1 - D_u \theta) \\ J \sin \theta D_v \omega &= (D_v H - \cos \theta D_u H) \cos \omega - \sin \theta D_u H \sin \omega \\ &\quad - D_u J + \cos \theta D_v J - J \sin \theta (2 \Gamma_2 + D_v \theta) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Sofern wir uns die GAUSS'sche Krümmung K ein für allemal als Funktion des Linienelements vorgegeben denken [I, § 4, (6) resp. (8)], ist also das System (1.21) maßgebend für die Einbettung der abstrakten Fläche in den euklidischen Raum.

Für das Weitere benötigen wir schließlich noch ein Ergebnis unserer früheren Untersuchungen, nämlich die Darstellung der Grundformen durch zwei invariante lineare Differentialformen gemäß I, § 8, (10) – (13). Mit Rücksicht auf $\omega \rightarrow -\omega$ können wir dieser Darstellung jetzt folgende Fassung geben: Setzt man

$$\begin{aligned} \chi_1 &\equiv E \sin\left(\frac{\omega + \theta}{2}\right) \dot{u} + G \sin\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) \dot{v} \\ \chi_2 &\equiv E \cos\left(\frac{\omega + \theta}{2}\right) \dot{u} + G \cos\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) \dot{v} \end{aligned} \quad (1.22)$$

so gilt

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &= \chi_1^2 + \chi_2^2 \\ -\mathfrak{N}\dot{x} &= (H - J) \chi_1^2 + (H + J) \chi_2^2 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Die invarianten Linearformen hat schon W. BLASCHKE²⁾ eingeführt und angewendet. Mit Hilfe der von uns verwendeten Zeichen E, G, L, N, H und J kann seine Darstellung folgendermaßen geschrieben werden

$$\begin{aligned} \chi_1 &\equiv \sqrt{\frac{(H + J) E^2 - L}{J}} \dot{u} + \sqrt{\frac{(H + J) G^2 - N}{J}} \dot{v} \\ \chi_2 &\equiv \sqrt{\frac{L - (H - J) E^2}{J}} \dot{u} + \sqrt{\frac{N - (H - J) G^2}{J}} \dot{v} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Führt man hier die Werte L und N gemäß (1.20) ein, so ergibt sich, wie man leicht nachrechnet, unsere Darstellung (1.22).

§ 2. Allgemeine Orientierung

Setzt man das Linienelement als bekannt voraus und berücksichtigt man die algebraischen Relationen zwischen den noch verbleibenden unbekannt Funktionen, so lassen sich die Gleichungen von CODAZZI in jedem Falle auf ein System von zwei quasilinearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung für zwei unbekannte Funktionen zurückführen. Diese unbekannt Funktionen sind in unserem Falle der Hauptwinkel $\omega(u, v)$ und die mittlere Krümmung $H(u, v)$. Zwecks einer allgemeinen Orientierung notieren wir nun das System von CODAZZI summarisch in folgender Gestalt:

$$\begin{aligned} F_1(u, v; \omega, H; \omega_u, \omega_v, H_u, H_v) &= 0 \\ F_2(u, v; \omega, H; \omega_u, \omega_v, H_u, H_v) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

²⁾ Vorlesungen über Differentialgeometrie I, 3. A., Springer-Verlag 1930; §§ 62, 63, 87, 88.

Durch Auflösung – etwa nach ω_v und H_v – führt man (2.1) über in *kanonische Gestalt*

$$\left. \begin{aligned} \omega_v &= f_1(u, v; \omega, H; \omega_u, H_u) \\ H_v &= f_2(u, v; \omega, H; \omega_u, H_u) \end{aligned} \right\} \quad (2.1_0)$$

Dieselbe eignet sich zum Existenzbeweis der Lösung, nicht aber zur Gewinnung von Aussagen über die einzelnen Lösungsfunktionen $\omega(u, v)$ und $H(u, v)$. Die für den letzteren Zweck erforderliche Separation wird eingeleitet durch diejenigen *totalen Systeme*, welche man durch Auflösung von (2.1) nach ω_u, ω_v , respektive nach H_u, H_v erhält:

$$\left. \begin{aligned} \omega_u &= f_{11}(u, v; \omega, H; H_u, H_v) \\ \omega_v &= f_{12}(u, v; \omega, H; H_u, H_v) \end{aligned} \right\} \quad (2.1_1)$$

und

$$\left. \begin{aligned} H_u &= f_{21}(u, v; H, \omega; \omega_u, \omega_v) \\ H_v &= f_{22}(u, v; H, \omega; \omega_u, \omega_v) \end{aligned} \right\} \quad (2.1_2)$$

Die drei Systeme (2.1₀) – (2.1₂) sind lediglich Umformungen von (2.1) und daher algebraisch gleichwertig mit (2.1). Algebraisch neue Relationen liefern uns dagegen die zu den Systemen (2.1₁) und (2.1₂) gehörigen Integrabilitätsbedingungen.

α). Die *Integrabilitätsbedingung* für (2.1₁) notieren wir summarisch in der Gestalt

$$\boxed{G_1(u, v; \omega; H, H_u, H_v, H_{uu}, H_{uv}, H_{vv}) = 0} \quad (2.2)$$

β). Die *Integrabilitätsbedingung* für (2.1₂) sei entsprechend

$$\boxed{G_2(u, v; H; \omega, \omega_u, \omega_v, \omega_{uu}, \omega_{uv}, \omega_{vv}) = 0} \quad (2.3)$$

Bei vorgegebenem Linienelement beherrschen nun die vier Gleichungen (2.1), (2.2) und (2.3) die algebraische Situation.

Wir definieren nun für die Funktionen $\omega(u, v)$ und $H(u, v)$ eine Reihe von Fallunterscheidungen und versehen dieselben zur Vereinfachung der Ausdrucksweise mit einer passenden Terminologie:

$D\alpha_1$: Ein «generelles $H(u, v)$ » liegt vor, wenn nach dessen Eintragung in (2.2) diese Gleichung die Unbestimmte ω noch enthält.

$D\alpha_2$: Ein «spezielles $H(u, v)$ » liegt vor, wenn nach dessen Eintragung in (2.2) diese Gleichung die Unbestimmte ω nicht mehr enthält.

$D\beta_1$: Ein «generelles $\omega(u, v)$ » liegt vor, wenn nach dessen Eintragung in (2.3) diese Gleichung die Unbestimmte H noch enthält.

$D\beta_2$: Ein «spezielles $\omega(u, v)$ » liegt vor, wenn nach dessen Eintragung in (2.3) diese Gleichung die Unbestimmte H nicht mehr enthält.

Entsprechend diesen Fällen ergeben sich nun vier Sätze.

Satz 3 (*erster Starrheitssatz*). *Besitzt eine Fläche zu vorgegebenem Linien-
element eine generelle mittlere Krümmung, so ist sie bis auf Kongruenz festgelegt.*

Beweis: Nach Voraussetzung kann ω aus (2.2) als Funktion

$$\omega = g_1(u, v; H, H_u, \dots, H_{vv}) \quad (2.2')$$

ermittelt werden. Gemäß (1.20) ist nun auch die zweite Grundform bestimmt. Nach dem Fundamentalsatz von BONNET ist aber eine Fläche durch die beiden Grundformen bis auf Kongruenz festgelegt, w.z.b.w.

Natürlich kann das gefundene ω mehrdeutig sein, was Veranlassung zu Isometrien, nicht aber zu Verbiegungen geben kann.

Satz 4 (*erster Verbiegungssatz*). *Besitzt eine Fläche zu vorgegebenem Linien-
element eine spezielle mittlere Krümmung, so kann sie unter Erhaltung ihrer mitt-
leren Krümmung verbogen werden.*

Beweis: Infolge der Voraussetzung muß (2.2) identisch in u, v erfüllt sein. Das totale System (2.1₁) ist daher im eigentlichen Sinne integrierbar und liefert zu jedem Anfangswert ω_0 eine Lösung $\omega(u, v)$. Eine stetige Veränderung des Anfangswertes ω_0 bewirkt somit eine stetige Veränderung der Lösung $\omega(u, v)$, während $H(u, v)$ ungeändert bleibt. Nach (1.20) wird also die zweite Grundform stetig verändert, während Linienelement und mittlere Krümmung erhalten bleiben. W.z.b.w.

Satz 5 (*zweiter Starrheitssatz*). *Besitzt eine Fläche zu vorgegebenem Linien-
element einen generellen Hauptwinkel, so ist sie bis auf Kongruenz festgelegt.*

Satz 6 (*zweiter Verbiegungssatz*). *Besitzt eine Fläche zu vorgegebenem Linien-
element einen speziellen Hauptwinkel, so kann sie unter Erhaltung ihres Haupt-
winkels verbogen werden.*

Die Beweise ergeben sich aus den Beweisen für die Sätze 3 und 4 dadurch, daß man die Rollen von H und ω vertauscht. Insbesondere tritt dann an die Stelle von (2.2') die Auflösung von (2.3):

$$H = g_2(u, v; \omega, \omega_u, \dots, \omega_{vv}). \quad (2.3')$$

Die in den Sätzen 4 und 6 enthaltenen konkreten Aufgaben, nämlich die Ermittlung der einschlägigen speziellen $H(u, v)$ und $\omega(u, v)$, sind – wenn

auch mit anderen Begriffen – schon im vorigen Jahrhundert von CODAZZI, BOUR und BONNET aufgegriffen worden³⁾. Insbesondere hat BONNET⁴⁾ die zweite Aufgabe vollständig gelöst. Da nach Satz 1 durch $\omega(u, v)$ die Hauptrichtungen auf einer Fläche festgelegt werden, ist sie äquivalent mit der Aufgabe, diejenigen Flächen zu bestimmen, welche unter Erhaltung ihrer Krümmungslinien verbogen werden können. Diese Aufgabe hat W. BLASCHKE⁵⁾ wieder aufgegriffen und gestützt auf die invarianten Linearformen (1.24) behandelt.

Die erste Aufgabe kann auch aufgefaßt werden als die Frage nach denjenigen Flächen, welche unter Erhaltung ihrer Hauptkrümmungen verbogen werden können. Dies folgt ohne weiteres daraus, daß neben der mittleren Krümmung auch die GAUSS'sche Krümmung als Biegungsinvariante erhalten bleibt. BONNET⁶⁾ findet zwei Klassen von Lösungen: Die Flächen $H = \text{konst.}$ und daneben eine Klasse «vom selben Allgemeinsgrad» wie die erste. Diese letztere Klasse hat später HAZZIDAKIS⁷⁾ vollständig integriert.

Auf diese Aufgabe bin ich in II § 4 gestoßen und habe daselbst die hier in Satz 4 auftretenden «Flächen mit spezieller mittlerer Krümmung» als «integrale Flächen» bezeichnet. Bei meiner Darstellung wurde es evident, daß die Flächen konstanter mittlerer Krümmung integrierbar sind. Dagegen ließ ich die Frage offen, ob es daneben noch weitere integrale Flächen gibt. Nach den eben zitierten Arbeiten kann also diese Frage bejaht werden. Immerhin haben meine weiteren Untersuchungen eine Einschränkung geliefert. Es gilt nämlich

Satz 7. *Kann eine reelle Fläche im euklidischen Raum unter Erhaltung ihrer mittleren Krümmung verbogen werden, so ist sie notwendigerweise vom WEINGARTENSchen Typus, d.h. ihre mittlere Krümmung ist eine Funktion ihrer GAUSS'schen Krümmung.*

BONNET und HAZZIDAKIS arbeiten mit isotropen Parametern. Da nun die von diesen Autoren gefundenen Flächen, abgesehen von den Flächen $H = \text{konst.}$, nicht vom WEINGARTENSchen Typus sind, ergibt sich ohne weiteres der Schluß, daß diese Flächen keine lückenlos reelle Darstellung gestatten.

Auf diese Zusammenhänge und den Beweis von Satz 7 hoffe ich bei anderer Gelegenheit zurückzukommen. Hier will ich mich auf das Grundsätzliche und

³⁾ Die historische Entwicklung schildert A. Voss in seinem Artikel «Abbildung und Abwicklung zweier Flächen aufeinander». Enzyklopädie der math. Wissenschaften. III D 6a, S. 406–408 (1903).

⁴⁾ «Sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée.» Journal de l'Ecole polytechnique XXV (Cahier 42), S. 58ff. 1867.

⁵⁾ a. a. O. ³⁾, §§ 87 und 88.

⁶⁾ a. a. O. ⁴⁾, S. 73–92.

⁷⁾ Journal f. Mathematik 117, S. 42–56 (1897).

Methodische beschränken. Zunächst noch einige Hinweise, die dem Anschluß an die konkreten Probleme dienen.

Das mit (2.1) und (2.1₀) äquivalente summarisch geschriebene System (2.1₁) haben wir in seiner konkreten Gestalt mit Hilfe der Operatoren (1.7) oben unter (1.21) notiert. Dasselbe System zusammen mit seiner Integrabilitätsbedingung (2.2) findet der Leser auch in II, § 2, (1) – (6). Konsequenterweise stellt sich jetzt die Aufgabe, die konkrete Gestalt des ebenfalls zu (2.1) und (2.1₀) äquivalenten Systems (2.1₂), sowie der dazugehörigen Integrabilitätsbedingung (2.3) zu ermitteln. Der für uns naheliegendste Weg besteht offenbar darin, das oben angegebene System (1.21) nach $D_u H$ und $D_v H$ aufzulösen. Nun aber zeigt sich, daß die Durchführung der Rechnung und insbesondere anschließend eine durchschaubare Gestaltung der Integrabilitätsbedingung noch erheblich größere Komplikationen bietet als die in II, §§ 2 und 3 angestellte Analyse.

Ich ließ daher die Sache liegen, bis ich bei einer neuerlichen Prüfung des ganzen Fragenkomplexes feststellte, daß man aus den explizit verfügbaren Differentialformen (1.22) einen übersichtlichen Formalismus gewinnen kann. Der Nutzen dieses Formalismus beruht darauf, daß er sich aus wenigen Grundinvarianten mittels invarianter Operationen aufbauen läßt und daher automatisch Invarianten erzeugt und explizit darzustellen gestattet. Das Detail soll im nächsten Paragraphen zur Sprache kommen.

§ 3. Invarianter Formalismus

Wir stellen jetzt also die invarianten linearen Differentialformen (1.22) an die Spitze:

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 &\equiv E \sin \left(\frac{\omega + \theta}{2} \right) \cdot \dot{u} + G \sin \left(\frac{\omega - \theta}{2} \right) \cdot \dot{v} \\ \chi_2 &\equiv E \cos \left(\frac{\omega + \theta}{2} \right) \cdot \dot{u} + G \cos \left(\frac{\omega - \theta}{2} \right) \cdot \dot{v} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Durch sinngemäße Übertragung der Invariantentheorie quadratischer Differentialformen auf ein System linearer Differentialformen⁸⁾ kann man aus (3.1) invariante Differentialoperatoren und Invarianten herleiten.

Die invarianten Differentialoperatoren – es sind natürlich deren zwei – sind definiert durch

⁸⁾ Für die Durchführung dieser Übertragung verweise ich den Leser auf meine «Grundlagen zu einer linearen Feldtheorie», Z. Physik 138, 16–34 (1954). Die invarianten Differentialoperatoren habe ich eingeführt in § 4 meines Artikels «Zur linearen Feldtheorie V», Z. Physik 152, 319–327 (1958), wobei noch zu beachten ist, daß ich in § 1 des vorausgehenden Artikels IV, Z. Physik 144, 373–387 (1956), die Bezeichnung leicht geändert habe.

$$\begin{aligned}\sin \theta \partial^1 &\equiv \cos \beta D_u - \cos \alpha D_v \\ \sin \theta \partial^2 &\equiv -\sin \beta D_u + \sin \alpha D_v\end{aligned}\quad (3.2)$$

mit

$$\alpha \equiv \frac{\omega + \theta}{2}; \beta \equiv \frac{\omega - \theta}{2}. \quad (3.2')$$

Sie sind formal invariant gegenüber beliebigen Parametertransformationen und erzeugen daher aus einem Funktionensystem eines bestimmten Transformationscharakters wiederum ein Funktionssystem vom selben Transformationscharakter, insbesondere also aus einer Invarianten wiederum eine Invariante.

Aus den Koeffizienten der linearen Grundformen (3.1) kann man nun vier primäre Invarianten gewinnen, von denen wir aber für unsere Zwecke nur zwei benötigen. Dieselben sind definiert durch

$$\begin{aligned}\sin \theta f^1 &\equiv \sin \beta \Omega_1 - \sin \alpha \Omega_2 \\ \sin \theta f^2 &\equiv \cos \beta \Omega_1 - \cos \alpha \Omega_2\end{aligned}\quad (3.3)$$

mit den Abkürzungen

$$\Omega_1 \equiv \Gamma_1 + D_u \beta; \Omega_2 \equiv \Gamma_2 + D_v \alpha. \quad (3.3')$$

Die Ableitungssymbole ∂^1 und ∂^2 habe ich identisch aus den zitierten Arbeiten⁸⁾ übernommen, die Invarianten f^1 und f^2 dagegen stellen die Verdopplungen der daselbst durch die gleichen Zeichen definierten Invarianten dar. Im weiteren Verlauf ist nun also wohl zu beachten, daß die Ziffern 1 und 2 in diesen vier Symbolen keine Exponenten, sondern Zeiger darstellen.

Aus den Invarianten f^1 und f^2 können wir nun mit Hilfe der vier Spezies und der Operatoren ∂^1 und ∂^2 alle Invarianten aufbauen, die wir benötigen. Zur Illustration dieses Formalismus, aber auch aus systematischen Gründen wollen wir jetzt die formale Struktur der zum System (1.21) gehörigen Integrabilitätsbedingung analysieren. Die Bedingung selbst wurde oben summarisch durch die Gleichung (2.2) symbolisiert. Explizit aufgestellt und einer ersten Analyse unterworfen habe ich sie in II §§ 2 und 3. Dabei erwies es sich als notwendig, neben den BELTRAMISCHEN Operatoren ∇ und Δ weitere Differentialoperatoren ∇_1, ∇_2 und Δ_1, Δ_2 einzuführen. Die anschließende Untersuchung ließ dann erst nach mühsamer und wenig durchsichtiger Rechnung erkennen, daß sich die neuen Operatoren wie orthogonale Vektoren in der Tangentialebene transformieren. Mit Hilfe unseres Formalismus kann nun diese Rechnung durchsichtig gestaltet werden.

Ich beginne damit, daß ich die in II, §§ 2 und 5 angegebenen Operatoren mit einer leichten Modifikation und einigen Ergänzungen zusammenstelle.

An die Spitze stelle ich vier lediglich als Abkürzungen dienende Hilfsoperatoren $V_i (i = 0, \dots, 3)$, die durch folgende Identitäten definiert sind:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \theta V_0 &\equiv \Gamma_1 D_u + \Gamma_2 D_v - \cos \theta (\Gamma_2 D_u + \Gamma_1 D_v) \\ \sin^2 \theta V_1 &\equiv \Gamma_2 D_u + \Gamma_1 D_v - \cos \theta (\Gamma_1 D_u + \Gamma_2 D_v) \\ \sin \theta V_2 &\equiv \Gamma_1 D_u - \Gamma_2 D_v \\ \sin \theta V_3 &\equiv \Gamma_2 D_u - \Gamma_1 D_v \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Anschließend definiere ich vier von einer willkürlichen Funktion φ beherrschte Operatoren $\varphi \nabla_i$ ($i = 0, \dots, 3$)

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \theta \varphi \nabla_0 &\equiv D_u \varphi D_u + D_v \varphi D_v - \cos \theta (D_v \varphi D_u + D_u \varphi D_v) \\ \sin^2 \theta \varphi \nabla_1 &\equiv D_v \varphi D_u + D_u \varphi D_v - \cos \theta (D_u \varphi D_u + D_v \varphi D_v) \\ \sin \theta \varphi \nabla_2 &\equiv D_u \varphi D_u - D_v \varphi D_v \\ \sin \theta \varphi \nabla_3 &\equiv D_v \varphi D_u - D_u \varphi D_v \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Schließlich definiere ich unter Verwendung von (3.4) und (3.5) noch drei Differentiatoren zweiter Ordnung:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \theta \Delta_0 &\equiv D_u D_u + D_v D_v - \cos \theta (D_v D_u + D_u D_v) \\ &\quad + \sin^2 \theta V_3 + \sin \theta \cdot \theta \nabla_1 \\ \sin^2 \theta \Delta_1 &\equiv D_v D_u + D_u D_v - \cos \theta (D_u D_u + D_v D_v) \\ &\quad + \sin^2 \theta V_2 - \cos \theta \sin \theta \cdot \theta \nabla_1 \\ \sin \theta \Delta_2 &\equiv D_u D_u - D_v D_v \\ &\quad - \sin \theta V_1 - \cos \theta \cdot \theta \nabla_2 - \theta \nabla_3 \\ 0 &\equiv D_v D_u - D_u D_v - \sin \theta V_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Zu diesen Definitionen sind nun einige Bemerkungen zu machen:

1. Sämtliche Operatoren sind als ungebundene Operatoren definiert, die auf eine Funktion ψ zur Wirkung gelangen.

2. Die Operatoren $\nabla_0, \nabla_1, \nabla_2, \Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ entsprechen unseren früheren Operatoren $\nabla, -\nabla_1, \nabla_2, \Delta, -\Delta_1, \Delta_2$, wobei die drei ersten jetzt ungebunden sind, während sie früher gebunden waren.

3. Die Vorzeichenänderungen

$$\nabla_1, \Delta_1 \text{ in II} \rightarrow -\nabla_1, -\Delta_1 \text{ in III} \quad (3.7)$$

habe ich vorgenommen, damit im orthogonalen Fall $\theta = \frac{\pi}{2}$ ein positives Vorzeichen an der Spitze steht. Es empfiehlt sich, diesen Vorzeichenwechsel in allen einschlägigen Relationen von II vorzunehmen, bevor man die behauptete Übereinstimmung der Operatoren nachprüft. Bei der weiteren Schilderung setze ich daher voraus, daß dieser Zeichenwechsel in II schon vollzogen sei.

4. Zusätzlich eingeführt habe ich in (3.5) den Operator $\varphi \nabla_3$, der, angewendet auf ψ , die Funktionaldeterminante in der Gestalt

$$\varphi \nabla_3 \psi \equiv \frac{D_v \varphi D_u \psi - D_u \varphi D_v \psi}{\sin \theta} \equiv \nabla_3(\psi, \varphi) \quad (3.8)$$

liefert.

5. Die behauptete Übereinstimmung der Operatoren kann man nun am besten so nachprüfen, daß man die – entsprechend (3.7) modifizierten – Formeln II, § 5, (2) – (4) als Ausgangspunkt wählt. Rechnung und Vergleich ergeben folgende Relationen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi \nabla_0 \psi &= \psi \nabla_0 \varphi &= \nabla(\varphi, \psi) \\ \varphi \nabla_i \psi &= \psi \nabla_i \varphi &= \nabla_i(\varphi, \psi); (i = 1, 2) \\ \varphi \nabla_3 \psi &= -\psi \nabla_3 \varphi &= -\nabla_3(\varphi, \psi) \\ \varphi \nabla_0 \varphi &= \nabla(\varphi, \varphi) &\equiv \nabla(\varphi) \\ \varphi \nabla_i \varphi &= \nabla_i(\varphi, \varphi) &\equiv \nabla_i(\varphi); (i = 1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0 \psi &= \Delta \psi \\ \Delta_1 \psi &= \Delta_1 \psi \\ \Delta_2 \psi &= \Delta_2 \psi \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

6. Als vierte Identität (3.6) haben wir noch den in diesen Zusammenhang gehörenden Kommutator (1.12) mit Hilfe des in (3.4) eingeführten Operators ∇_0 notiert.

Nachdem wir uns von der Übereinstimmung unserer neuen Operatoren mit unseren früheren im Sinne der Gleichungen (3.9) und (3.10) überzeugt haben, wollen wir fortan nur noch von den Definitionen (3.4) bis (3.6) Gebrauch machen.

Unser nächstes Ziel besteht darin, die Transformationsweise der Operatoren (3.5) und (3.6) aufzuklären. Zu dem Zweck ersetzen wir in ihnen die Operatoren D_u und D_v mittels der Auflösung

$$\left. \begin{aligned} D_u &= \sin \alpha \partial^1 + \cos \alpha \partial^2 \\ D_v &= \sin \beta \partial^1 + \cos \beta \partial^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

der Definition (3.2) durch die Operatoren ∂^1 und ∂^2 . Unter fortlaufenden goniometrischen Umformungen und beständiger Verwendung der Definitionen (3.3), (3.2') und (3.3') erhält man dann folgende Darstellung für die in Frage stehenden Differentiatoren:

$$\begin{aligned}
\varphi \nabla_0 &= \partial^1 \varphi \partial^1 + \partial^2 \varphi \partial^2 \\
\varphi \nabla_1 &= \sin \omega (\partial^2 \varphi \partial^1 + \partial^1 \varphi \partial^2) \\
&\quad - \cos \omega (\partial^1 \varphi \partial^1 - \partial^2 \varphi \partial^2) \\
\varphi \nabla_2 &= \sin \omega (\partial^1 \varphi \partial^1 - \partial^2 \varphi \partial^2) \\
&\quad + \cos \omega (\partial^2 \varphi \partial^1 + \partial^1 \varphi \partial^2) \\
\varphi \nabla_3 &= \partial^2 \varphi \partial^1 - \partial^1 \varphi \partial^2
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= \partial^1 \partial^1 + \partial^2 \partial^2 - (f^1 \partial^1 + f^2 \partial^2) \\
\Delta_1 &= \sin \omega (\partial^2 \partial^1 + \partial^1 \partial^2 + f^2 \partial^1 + f^1 \partial^2) \\
&\quad - \cos \omega (\partial^1 \partial^1 - \partial^2 \partial^2 + f^1 \partial^1 - f^2 \partial^2) \\
\Delta_2 &= \sin \omega (\partial^1 \partial^1 - \partial^2 \partial^2 + f^1 \partial^1 - f^2 \partial^2) \\
&\quad + \cos \omega (\partial^2 \partial^1 + \partial^1 \partial^2 + f^2 \partial^1 + f^1 \partial^2)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

In diesen Zusammenhang gehört noch der Kommutator (1.12), der folgende Gestalt annimmt:

$$\partial^2 \partial^1 - \partial^1 \partial^2 = f^2 \partial^1 - f^1 \partial^2 \tag{3.14}$$

Die Gleichungen (3.12) und (3.13) bringen den Transformationscharakter der Operatoren zur Evidenz. Es ergeben sich folgende Aussagen, die wir der Einfachheit halber unter der Voraussetzung formulieren, daß φ eine Invariante sei:

Satz 8. Die Operatoren ∇_0, ∇_3 und Δ_0 sind Invarianten.

Satz 9. Die Operatorenpaare ∇_1, ∇_2 und Δ_1, Δ_2 stellen linksdrehende orthogonale Vektoren dar.

Nun wollen wir noch die geometrische Bedeutung der Operatoren ∂^1, ∂^2 und der Invarianten f^1, f^2 ermitteln. Zu dem Zweck genügt es, Krümmungslinienparameter einzuführen, was auf die Bedingungen $\omega = \theta = \pi/2$ hinausläuft. Die Definition (3.2) liefert dann $\partial^1 = D_u, \partial^2 = D_v$ und wir erhalten

Satz 10. Die Operatoren ∂^1 und ∂^2 stellen die Ableitungen nach den Bogenlängen der Krümmungslinien dar.

Weiter ergibt sich aus (3.3) und (3.3') in Verbindung mit (1.8) $f^1 = -\gamma_2, f^2 = \gamma_1$ und wir haben

Satz 11. Die Invarianten f^2 und $-f^1$ stellen die geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien dar.

Auf die Invarianten $S_1 \equiv f^2$ und $S^2 \equiv -f^1$ sind wir übrigens in einem andern Zusammenhang schon in I, § 8, (21) und (22) gestoßen.

Als Anwendung ergibt sich nun leicht

Satz 12. Die GAUSS'sche Gleichung erhält durch den invarianten Formalismus folgende Gestalt:

$$\partial^1 f^1 + \partial^2 f^2 - [(f^1)^2 + (f^2)^2] = K \quad (3.15)$$

Beweis. Bei Einführung von Krümmungslinienparametern geht (3.15) über in

$$-D_u \gamma_2 + D_v \gamma_1 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) = K.$$

Genau dieselbe Gleichung erhält man aber, wenn man die GAUSS'sche Gleichung in I, § 4 (6) auf $\theta = \mu/2$ spezialisiert. W.z.b.w.

Zum Abschluß wollen wir noch die Integrabilitätsbedingungen des Systems (1.21) durch die neu definierten Operatoren (3.5) und (3.6) darstellen. Zu dem Zweck greifen wir zurück auf ihre ursprüngliche Fassung in II, § 2, (3) und (4). Der erste Schritt besteht in der Durchführung der Vorzeichenänderung (3.7). Als zweiter Schritt empfiehlt sich eine Änderung der Bezeichnung gemäß

$$Q_1, Q_2, R \text{ in II} \rightarrow -Q_1, Q_2, Q_0 \text{ in III.} \quad (3.16)$$

Als dritter Schritt bleibt dann nur noch die Einführung der neuen Operatoren gemäß den Gleichungen (3.9). Als Resultat ergibt sich

$$Q_1 \cos \omega - Q_2 \sin \omega = Q_0 \quad (3.17)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_1 &\equiv \frac{\Delta_1 H}{J} - \frac{2H \nabla_1 J}{J^2} \\ \Delta Q_2 &\equiv \frac{\Delta_2 H}{J} - \frac{2H \nabla_2 J}{J^2} \\ \Delta Q_0 &\equiv \frac{\Delta_0 J}{J} - \frac{J \nabla_0 J + H \nabla_0 H}{J^2} - 2K, \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

wobei Δ einen frei wählbaren Proportionalitätsfaktor darstellt. Die Sätze 8 und 9 lassen dann unmittelbar den Transformationscharakter der Größen Q_0, Q_1, Q_2 erkennen.

Führt man schließlich in (3.18) und (3.17) die invarianten Operatoren gemäß (3.12) und (3.13) ein, so erhält die Integrabilitätsbedingung (3.17) folgende absolutinvariante Gestalt:

$$\begin{aligned}
& \frac{[\partial^1 \partial^1 + \partial^2 \partial^2 - (f^1 \partial^1 + f^2 \partial^2)] J}{J} \\
& + \frac{[\partial^1 \partial^1 - \partial^2 \partial^2 + f^1 \partial^1 - f^2 \partial^2] H}{J} \\
& - \frac{(\partial^1 J + \partial^1 H)^2 + (\partial^2 J - \partial^2 H)^2}{J^2} \\
& = 2K
\end{aligned} \tag{3.19}$$

§ 4. Totales System für H

Die am Schluß von § 2 geschilderte Aufgabe, also die Aufstellung eines totalen Systems für H , können wir jetzt mit Hilfe des invarianten Formalismus in durchsichtiger Weise bewältigen.

In den Gleichungen (1.21) führen wir vermittels der Spezialisierung

$$\omega = \theta = \pi/2$$

Krümmungslinienparameter ein und ersetzen hierauf entsprechend den Sätzen 10 und 11 die Symbole $D_u, D_v, \Gamma_1, \Gamma_2$ durch $\partial^1, \partial^2, f^2, -f^1$. Unter Beachtung von (1.17) ergibt sich dann das absolut invariante totale System

$$\begin{aligned}
2(H + J) \partial^1 H &= 4 f^1 J^2 + \partial^1 K \\
2(H - J) \partial^2 H &= 4 f^2 J^2 + \partial^2 K
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Für Berechnungszwecke empfiehlt es sich, daneben das gemäß (1.17) gleichwertige System

$$\left. \begin{aligned}
2(H + J) \partial^1 J &= 4 f^1 HJ - \partial^1 K \\
2(H - J) \partial^2 J &= 4 f^2 HJ + \partial^2 K
\end{aligned} \right\} \tag{4.2}$$

zu notieren.

Als Integrabilitätsbedingung für (4.1) ergibt dann die Berechnung bei Berücksichtigung des Kommutators (3.14) die Relation

$$4S_1 J^2 + 4S_2 HJ = S_0 \tag{4.3}$$

mit den invarianten Koeffizienten

$$S_1 \equiv [f^2 \partial^1 + f^1 \partial^2 - (\partial^2 f^1 + \partial^1 f^2 + 2f^1 f^2)] K \tag{4.4_1}$$

$$S_2 \equiv [f^2 \partial^1 - f^1 \partial^2 - (\partial^1 f^2 - \partial^2 f^1)] K \tag{4.4_2}$$

$$S_0 \equiv K [\partial^2 \partial^1 + \partial^1 \partial^2 - 3(f^2 \partial^1 + f^1 \partial^2)] K - 2 \partial^1 K \partial^2 K. \tag{4.4_0}$$

Die Gleichungen (4.1) und (4.3) finden sich im wesentlichen schon bei BLASCHKE⁹⁾. Nur handelt es sich dort nicht um ein totales System für H , sondern um ein solches für $(H + J)^2$.

Mit Hilfe des invarianten Formalismus ist es nun möglich, diese Gleichungen für ein beliebiges Parameternetz explizit darzustellen. Um dies zu erreichen, haben wir nur nötig, die Symbole $\partial^1, \partial^2, f^1, f^2$ mittels der Definitionen (3.2), (3.2'), (3.3) und (3.3') zu eliminieren. Die Rechenarbeit ist allerdings im Falle der Gleichungen (4.3), (4.4₁), (4.4₂) und (4.4₀) erheblich.

An Stelle des Systems (4.1) erhalten wir das System

$$\begin{aligned} 2K \sin \theta D_u H &= 4A_0 J^3 - 4A_1 J^2 H + A_2 J + A_3 H \\ 2K \sin \theta D_v H &= 4B_0 J^3 + 4B_1 J^2 H + B_2 J + B_3 H \end{aligned} \quad (4.5)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} A_0 &\equiv \cos \omega \Omega_1 - \cos (\omega + \theta) \Omega_2 \\ A_1 &\equiv \Omega_2 - \cos \theta \Omega_1 \\ A_2 &\equiv [\sin (\omega + \theta) D_v - \sin \omega D_u] K \\ A_3 &\equiv \sin \theta D_u K \end{aligned} \right\} \quad (4.5_1)$$

und

$$\left. \begin{aligned} B_0 &\equiv \cos \omega \Omega_2 - \cos (\omega - \theta) \Omega_1 \\ B_1 &\equiv \Omega_1 - \cos \theta \Omega_2 \\ B_2 &\equiv [\sin (\omega - \theta) D_u - \sin \omega D_v] K \\ B_3 &\equiv \sin \theta D_v K \end{aligned} \right\} \quad (4.5_2)$$

wobei Ω_1 und Ω_2 durch (3.3') gegeben sind.

Für das Weitere empfiehlt es sich, neben den primären Operatoren (3.4) noch folgende Hilfsoperatoren einzuführen:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_0 &\equiv V_0 - (2 \sin \theta)^{-1} (\theta \nabla_2 + \cos \theta \cdot \theta \nabla_3) \\ \Pi_1 &\equiv V_1 + (2 \sin \theta)^{-1} (\theta \nabla_3 + \cos \theta \cdot \theta \nabla_2) \\ \Pi_2 &\equiv V_2 - (2 \sin \theta)^{-1} (\theta \nabla_0 + \cos \theta \cdot \theta \nabla_1) \\ \Pi_3 &\equiv V_3 + (2 \sin \theta)^{-1} (\theta \nabla_1 + \cos \theta \cdot \theta \nabla_0) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Gestützt auf sie gilt dann folgende Rückverwandlungstabelle

$$f^1 \partial^1 + f^2 \partial^2 = - (\Pi_3 + \frac{1}{2} \omega \nabla_3) \quad (4.7_0)$$

$$\left. \begin{aligned} f^2 \partial^1 + f^1 \partial^2 &= \sin \omega (\Pi_2 + \frac{1}{2} \omega \nabla_2) \\ &\quad - \cos \omega (\Pi_1 + \frac{1}{2} \omega \nabla_1) \end{aligned} \right\} \quad (4.7_1)$$

$$\left. \begin{aligned} f^1 \partial^1 - f^2 \partial^2 &= - \sin \omega (\Pi_1 + \frac{1}{2} \omega \nabla_1) \\ &\quad - \cos \omega (\Pi_2 + \frac{1}{2} \omega \nabla_2) \end{aligned} \right\} \quad (4.7_2)$$

⁹⁾ a. a. O. ²⁾, §88 (178) und (179).

$$f^2 \partial^1 - f^1 \partial^2 = \Pi_0 + \frac{1}{2} \omega V_0. \quad (4.7_3)$$

Unser Hauptanliegen ist jetzt, die invarianten Koeffizienten der Gleichung (4.3) in bezug auf ein beliebiges Parameternetz explizit darzustellen. Ich verzichte daher darauf, die Tabelle (4.7) weiter auszubauen. Vielmehr begnüge ich mich, diejenigen Bestandteile zu notieren, aus denen man unter Beziehung von schon verfügbaren Ausdrücken diese Koeffizienten zusammensetzen kann.

1. S_1 gewinnt man aus (4.7₁) oben zusammen mit

$$\left. \begin{aligned} & 2 \sin^2 \theta (\partial^1 f^2 + \partial^2 f^1 + 2 f^1 f^2) = \\ \sin \omega \left\{ \begin{aligned} & 2 [\sin \theta (D_u \Gamma_1 - D_v \Gamma_2) + (\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2) \cos \theta - 2 \Gamma_1 \Gamma_2] \\ & - \sin \theta (\Delta_0 + \cos \theta \Delta_1) \theta + 2 \sin \theta (2 V_3 - \cos \theta V_2) \theta \\ & + 2 (\theta V_1 + \cos \theta \cdot \theta V_0) \theta \qquad \qquad \qquad + \sin^2 \theta \Delta_2 \omega \end{aligned} \right\} \\ - \cos \omega \left\{ \begin{aligned} & 2 [D_u \Gamma_2 + D_v \Gamma_1 - \cos \theta (D_u \Gamma_1 + D_v \Gamma_2) + (\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2) \sin \theta] \\ & + \sin \theta \cos \theta \Delta_2 \theta - 2 \sin \theta (V_0 + \cos \theta V_1) \theta \\ & \qquad \qquad \qquad + \sin^2 \theta \Delta_1 \omega \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} (4.8_1)$$

2. S_2 gewinnt man aus (4.7₃) oben zusammen mit

$$\left. \begin{aligned} & 2 \sin^2 \theta (\partial^1 f^2 - \partial^2 f^1) = \\ & 2 [D_u \Gamma_1 + D_v \Gamma_2 - \cos \theta (D_v \Gamma_1 + D_u \Gamma_2)] \\ & - \sin \theta \Delta_2 \theta + \sin^2 \theta \Delta_0 \omega \end{aligned} \right\} (4.8_2)$$

3. S_0 gewinnt man aus (4.7₁) oben zusammen mit

$$\left. \begin{aligned} & \partial^2 \partial^1 + \partial^1 \partial^2 + f^2 \partial^1 + f^1 \partial^2 \\ & = \sin \omega \Delta_1 + \cos \omega \Delta_2 \\ \text{und} \\ & 2 \partial^1 K \partial^2 K = \sin \omega K V_1 K + \cos \omega K V_2 K \end{aligned} \right\} (4.8_3)$$

Wie man leicht erkennt, bewirkt schon die Einführung orthogonaler Parameter einschneidende Reduktionen dieser ausgedehnten Formelaggregate.

§ 5. Rückblick und Ergänzungen

In den beiden vorausgehenden Paragraphen haben wir nun also die explizite Darstellung derjenigen Gleichungen ermittelt, die wir in § 2 summarisch charakterisiert haben. Da anhand der summarischen Charakterisierung die allgemeinen Zusammenhänge leichter zu erkennen und bequemer zu beschreiben sind, schicke ich eine Tabelle voraus, die in der linken Kolonne die Nummern der summarischen Gleichungen enthält und in der rechten Kolonne die Nummern der entsprechenden expliziten Gleichungen:

(2.1 ₁)	~	(1.21)	(5.1)
(2.2)	~	(3.17)	
(2.2')	~	(3.17') (Auflösung von (3.17) nach ω)	
(2.1 ₂)	~	(4.5)	
(2.3)	~	(4.378)	
(2.3')	~	(4.378') (Auflösung von (4.378) nach H)	

Zu dieser Tafel sind noch einige Bemerkungen zu machen.

1. Die explizite Darstellung der Integrabilitätsbedingung (2.3) haben wir in § 4 nicht in extenso aufgeschrieben, sondern nur durch die Formelgruppe (4.3,7 und 8) soweit vorbereitet, daß sie aus dieser zusammengesetzt werden kann. In diesem Sinne ist nun also in der Tafel der Nummer (2.3) die Nummer (4.378) zugeordnet worden.

2. Desgleichen haben wir die Auflösungen von (3.17) nach ω und von (4.378) nach H nicht in extenso notiert, weil sie zuviel Platz beanspruchen würden, obwohl sie sich elementar bewerkstelligen ließen. In diesem Sinne müssen also in der Tafel die Nummern (3.17') und (4.378') verstanden werden.

Dies vorausgeschickt, können wir nun unsere Ergebnisse um einige weitere Feststellungen ergänzen.

Satz 13. *Eine Fläche ist durch ihre beiden invarianten Linearformen bis auf Kongruenz festgelegt, falls der zugehörige Hauptwinkel generell ist.*

Dieses Ergebnis findet sich, wenn auch in anderer Form, schon bei BLASCHKE. Für uns ist der Satz offenbar eine unmittelbare Folge von Satz 5.

Jetzt aber stellt sich die Einbettungsfrage, also die Frage, wie man zu vorgegebenem Linienelement den Hauptwinkel $\omega(u, v)$ wählen muß, damit die beiden invarianten linearen Differentialformen als diejenigen einer Fläche im euklidischen R_3 gedeutet werden können. Die Antwort liefert

Satz 14. *Die beiden invarianten linearen Differentialformen können bei vorgegebenem Linienelement dann und nur dann als diejenigen einer Fläche im euklidischen R_3 gedeutet werden, wenn der Hauptwinkel zwei partielle Differentialgleichungen 3. Ordnung erfüllt, die man erhält, falls man die mittlere Krümmung vermittels (2.3) aus den CODAZZISCHEN Gleichungen (2.1) eliminiert.*

Als notwendige Folge ergibt sich, daß dann der Hauptwinkel auch diejenige partielle Differentialgleichung 4. Ordnung erfüllt, welche man durch Elimination von H aus (2.2) erhält.

Beweis: $\omega(u, v)$ ist sicher dann ein einbettbarer Hauptwinkel, wenn zu ihm ein $H(u, v)$ gefunden werden kann derart, daß die beiden Funktionen zusammen die CODAZZISCHEN Gleichungen erfüllen. Wählen wir nun H gemäß

$$H = g_2(u, v; \omega, \omega_u, \dots, \omega_{vv}), \quad (2.3')$$

so wird dieser Bedingung nach Voraussetzung gerade Genüge getan. Setzt man weiter dieses H in (2.2) ein, so ergibt sich als notwendige Folge auch noch die behauptete partielle Differentialgleichung 4. Ordnung für ω . W.z.b.w.

Durch Vertauschung der Rollen von ω und H ergibt sich als weitere Einbettungsaussage

Satz 15. *Die Funktion $H(u, v)$ kann bei vorgegebenem Linienelement dann und nur dann als mittlere Krümmung einer Fläche im euklidischen R_3 gedeutet werden, wenn sie zwei partielle Differentialgleichungen 3. Ordnung erfüllt, die man erhält, falls man den Hauptwinkel vermittels (2.2) aus den CODAZZISCHEN Gleichungen (2.1) eliminiert.*

Als notwendige Folge ergibt sich, daß dann die mittlere Krümmung auch diejenige partielle Differentialgleichung 4. Ordnung erfüllt, welche man durch Elimination von ω aus (2.3) erhält.

Als weitere Anwendung ergibt sich jetzt die Möglichkeit, die in § 2 definierten «speziellen $\omega(u, v)$ resp. $H(u, v)$ » invariant und explizit zu charakterisieren.

Satz 16. *Ein spezielles $\omega(u, v)$ liegt vor, wenn die invarianten Koeffizienten von (4.3) verschwinden, also:*

$$S_1 = S_2 = 0. \quad (5.2)$$

Satz 17. *Ein spezielles $H(u, v)$ liegt vor, wenn die Koeffizienten von (3.17) verschwinden, also:*

$$Q_1 = Q_2 = 0. \quad (5.3)$$

Die Begründungen fließen ohne weiteres aus den erwähnten Definitionen. Die Gleichungen (5.2), spezialisiert auf Krümmungslinienparameter, bilden die Grundlage zur Bestimmung derjenigen Flächen, die unter Erhaltung ihrer Krümmungslinien verbogen werden können. Die Gleichungen (5.3) dagegen charakterisieren diejenigen Flächen, die unter Erhaltung ihrer mittleren Krümmung verbogen werden können. Insbesondere ergibt sich aus ihnen der oben behauptete Satz 7.

Schließlich noch einige Bemerkungen zu den in den Sätzen 14 und 15 erwähnten Eliminationen. Ich beginne mit dem zweiten Fall, also mit der Elimination vermittels (2.2) oder, explizit formuliert, mit der Berechnung von ω aus der Gleichung (3.17). Es empfiehlt sich, neben diese Gleichung eine Hilfspgleichung zu stellen, so daß folgendes Gleichungspaar den Ausgangspunkt bildet:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 \cos \omega - Q_2 \sin \omega &= Q_0 \\ Q_1 \sin \omega + Q_2 \cos \omega &\equiv R \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Durch die zweite Gleichung wird also einfach die Hilfsgröße R definiert. Die Auflösung des Systems nach ω und R liefert:

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega &= \frac{Q_2 R + Q_1 Q_0}{Q_1^2 + Q_2^2} ; \sin \omega = \frac{Q_1 R - Q_2 Q_0}{Q_1^2 + Q_2^2} \\ R^2 &= Q_1^2 + Q_2^2 - Q_0^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Diese Gleichungen bilden nun das explizite Äquivalent (3.17') der summarischen Gleichung (2.2').

Im ersten Falle handelt es sich um die Elimination vermittelt (2.3), explizit also um die Auflösung von (4.3) nach H . Wiederum empfiehlt es sich, eine Hilfsgleichung beizuziehen, so daß auch in diesem Falle ein System als Ausgangspunkt dient. Die Gleichungen dieses Systems sind

$$\left. \begin{aligned} 4 S_1 J^2 + 4 S_2 H J &= S_0 \\ 4 S_1 H J + 2 S_2 (H^2 + J^2) &\equiv T \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

wobei die zweite Gleichung lediglich die Hilfsgröße T definiert. Bei der Auflösung nach H , die etwas mehr zu rechnen gibt als der vorausgehende Fall, muß man natürlich die Beziehung (1.17) beachten. Im übrigen erweist es sich als zweckmäßig, dieser Auflösung folgende Gestalt zu geben:

$$\left. \begin{aligned} (H + J)^2 &= \frac{S_0 + 2 K S_1 + T}{2(S_1 + S_2)} \\ (H - J)^2 &= \frac{S_0 + 2 K S_1 - T}{2(S_1 - S_2)} \\ T^2 &= (S_0 + 2 K S_1)^2 - 4 K^2 (S_1^2 - S_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Die geometrische Bedeutung des Verschwindens der Hilfsinvarianten R und T illustrieren folgende Sätze:

Satz 18. *Eine Fläche kann dann und nur dann unter Erhaltung ihrer mittleren Krümmung infinitesimal verbogen werden, falls R verschwindet, d.h. also, falls sie der Differentialgleichung*

$$Q_1^2 + Q_2^2 - Q_0^2 = 0 \quad (5.9)$$

genügt.

Satz 19. *Eine Fläche kann dann und nur dann unter Erhaltung ihrer Krümmungslinien infinitesimal verbogen werden, falls T verschwindet, d.h. also, falls sie der Differentialgleichung*

$$(S_0 + 2 K S_1)^2 - 4 K^2 (S_1^2 - S_2^2) = 0 \quad (5.10)$$

genügt.

Es genügt, den Beweis für Satz 18 zu skizzieren. Nach Voraussetzung darf einzig ω vom Biegungsparameter t abhängen, so daß gelten muß $E_t = G_t = \theta_t = H_t = 0$. Die Ableitung der Integrabilitätsbedingung (3.17), also der ersten der Gleichungen (5.4), nach t liefert daher

$$- R \cdot \omega_t = 0 .$$

Nun ist offenbar wesentlich $\omega_t \neq 0$ und $R = 0$ ergibt sich als notwendige Bedingung. Um zu erkennen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist, muß man das zu (3.17) gehörige totale System nach t ableiten. Es resultiert ein totales System für ω_t , für dessen Integrabilität $R = 0$ hinreichend ist.

Die beiden Sätze illustrieren überdies die Tatsache, daß eine Fläche trotz infinitesimaler Verbiegbarkeit normalerweise nicht verbiegbar ist. Trotz $R = 0$ resp. $T = 0$ kann man nämlich nach den Gleichungen (5.5) respektive (5.8) die Funktionen ω resp. H berechnen und die Starrheitssätze 3 resp. 5 gelangen zur Anwendung.

(Eingegangen, den 27. April 1962)