Note on Cross-sections in STIEFEL Manifolds.

5. Ich reiche diesen am 20. September 1961 in Oberwolfach auf einer Tagung über Geschichte der Mathematik gehaltenen Vortrag[1]) zum Druck ein, obwohl seit meinen in den Math. Ann. *83*, 280–285 (1921) und in den Monatsh. Math. *54*, 265–283 (1950) veröffentlichten Arbeiten zwei Abhandlungen von T. Kubota erschienen sind, die den Zusammenhang der Reziprozitätsgesetze mit transzendenten Funktionen betreffen[2]) [J. reine angew. Math. *208*, 35–50 (1961); Nagoya math. J. *19*, 1–13 (1961); meine soeben genannten Arbeiten über das kubische und biquadratische Reziprozitätsgesetz sind dort nicht erwähnt]. Zum Beweise des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, bei dem Kubota sich nicht auf Primzahlen p und q beschränkt, benutzt er wie Eisenstein den Sinus, und er macht vom Gaussschen Lemma Gebrauch, das ich hier nicht herangezogen habe.

Eingegangen den 20. August 1962

Note on Cross-sections in Stiefel Manifolds

by George W. Whitehead

(Extract from a letter to B. Eckmann)

For which values of n, m, r $(n \geqq m > r)$ does the fibration $V_{n,m} \to V_{n,r}$ have a cross-section? The case $r = 1$ has recently been settled by Adams [2]. The remaining cases can easily be settled with the aid of your paper [4].

Theorems. Among the fibrations $V_{n,m} \to V_{n,r}$ $(n \geqq m > r \geqq 2)$, only the following have cross-sections:

$$V_{n,n} \to V_{n,n-1}, \quad V_{7,3} \to V_{7,2}, \quad V_{8,4} \to V_{8,3}.$$

Proof. Obviously, if $V_{n,m} \to V_{n,r}$ has a cross-section and $r < k < m$, so does $V_{n,k} \to V_{n,r}$. According to [4. p. 328, Hilfsatz], if $V_{n,m} \to V_{n,r}$ has a cross-section, so does $V_{n-1,m-1} \to V_{n-1,r-1}$. Moreover, [4, p. 337], if $V_{q,3} \to V_{q,2}$ has a cross-section, then R^{q+1} has a continuous multiplication $(x, y) \to xy$ such that $||xy|| = ||x|| \cdot ||y||$, and therefore [1] $q = 3$ or $q = 7$. Thus, if $V_{n,m} \to V_{n,r}$

[1]) Schon früher (im Studienjahr 1955/56) hatte ich im Mathematischen Colloquium der Universität Bagdad darüber vorgetragen, und, davon angeregt, hat Herr Rafiq Hussein bei der Prüfung für den Grad eines B. Sc. eine Thesis darüber verfaßt.

[2]) Den Hinweis auf sie verdanke ich Herrn P. Roquette.

has a cross-section, then $n - r = 1$ or $n - r = 5$. Since $V_{n,n} \to V_{n,n-1}$ has an obvious cross-section, it suffices to show that

1) $V_{8,4} \to V_{8,3}$ has a cross-section,
2) $V_{7,4} \to V_{7,2}$ does not have a cross-section,
3) $V_{9,5} \to V_{9,4}$ does not have a cross-section.

To prove 1), identify R^8 with the algebra of CAYLEY numbers. The desired cross-section is then given by

$$(x,y,z,) \to (x,y,z,x((x^{-1}y)(x^{-1}z))) \quad (x,y,z) \in V_{8,3}.$$

Since S^5 does not have a 2-field [2], $V_{6,3} \to V_{6,1}$ does not have a cross-section. Hence $V_{7,4} \to V_{7,2}$ does not have a cross-section.

According to BOREL [3, pp. 148—9], the mod 2 cohomology rings $H^*(V_{9,5})$ and $H^*(V_{9,4})$ have simple systems of generators

$$x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \qquad \text{for } V_{9,5},$$
$$y_5, y_6, y_7, y_8 \qquad \text{for } V_{9,4}$$

such that

$$\pi^*(y_i) = x_i \qquad (5 \leqq i \leqq 8),$$

and

$$Sq^4 x_4 = x_8 .$$

If $\lambda : V_{9,4} \to V_{9,5}$ is a cross-section, then

$$0 \neq y_8 = \lambda^* \pi^* y_8 = \lambda^* x_8 = \lambda^* Sq^4 x_4 = Sq^4 \lambda^* x_4 = 0.$$

This contradiction completes the proof.

Massachusetts Institute of Technology

BIBLIOGRAPHY

[1] J. F. ADAMS, *On the non-existence of elements of HOPF invariant one*, Ann. of Math. 72 (1960), 20—104.

[2] J. F. ADAMS, *Vector fields on spheres*, Ann. of Math. 75 (1962), 603—632.

[3] A. BOREL, *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes des groupes de LIE compacts*, Ann. of Math. 57 (1953), 115—207.

[4] B. ECKMANN, *Stetige Lösungen linearer Gleichungssysteme*, Comment. Math. Helv. *15* (1942—3), 318—339.

(Received December 20, 1962)