Über den Begriff der uniformen Struktur und die Konvergenz in BOOLEschen Algebren.

Autor(en): **Matzinger, Heinrich**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **38 (1963-1964)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-29436

Über den Begriff der uniformen Struktur und die Konvergenz in Booleschen Algebren

von Heinrich Matzinger, Zürich

Einleitung

Die von Fischer (Math. Annalen Bd. 137 (1959) definierten «Limesräume» verallgemeinern den Konvergenzbegriff topologischer Räume. Jedem Punkt wird die Menge von Filtern zugeordnet, die gegen diesen Punkt konvergieren. Viele Sätze aus der Theorie der topologischen Räume lassen sich auf Limesräume verallgemeinern.

Jedem uniformen Raum ist ein Konvergenzbegriff (eines topologischen Raumes) zugeordnet. Umgekehrt lassen sich nur gewisse spezielle topologische Räume uniformisieren.

Es stellt sich die Frage, ob es Verallgemeinerungen der uniformen Räume gibt, deren zugeordneter Konvergenzbegriff derjenige eines Limesraumes ist. Diese Frage wird beantwortet durch die Definition der «Quasiuniformen Strukturen» (Kapitel I). Es werden einige Sätze über quasiuniforme Strukturen bewiesen, insbesondere wird gezeigt, daß jeder quasiuniforme Raum vervollständigt werden kann, das heißt, dicht in einen umfassenden Raum eingebettet werden kann, in welchem alle Cauchyfilter konvergieren.

In Booleschen Algebren kann in bekannter Weise ein Konvergenzbegriff eingeführt werden. In Kapitel II wird gezeigt, daß dieser Konvergenzbegriff quasiuniformisierbar ist. Im Falle einer atomaren Booleschen Algebra ist diese Struktur sogar eine uniforme Struktur (Kapitel III). Im Spezialfall einer Potenzmenge induziert diese uniforme Struktur die bekannte «Mengenkonvergenz».

Zwischen (nicht notwendigerweise separierter) Metrik und uniformer Struktur besteht bekanntlich der folgende Zusammenhang: Jede Metrik induziert eine uniforme Struktur mit abzählbarer Basis. Umgekehrt existiert zu jeder uniformen Struktur mit abzählbarer Basis eine Metrik, welche die gegebene Struktur induziert. Analoge Sätze gelten, wenn der Begriff der «Metrik» zum Begriff des «Durchmessers» verallgemeinert wird (Kapitel IV). Jeder Durchmesser induziert eine quasiuniforme Struktur mit abzählbarer Basis, und zu jeder quasiuniformen Struktur mit abzählbarer Basis existiert ein Durchmesser, der diese induziert.

Der Begriff des «Durchmessers» (mit reellen Werten), läßt sich verallgemeinern zum Begriff des «Pseudodurchmessers» (mit Werten in einer Halbordnung) (Kapitel V). Jeder solche Pseudodurchmesser definiert in natürlicher Weise eine quasiuniforme Struktur. Zu jeder quasiuniformen $\mathcal{U}_1$-Struktur läßt sich ein Pseudodurchmesser angeben, der diese Struktur induziert. Im Spezialfall topologischer Räume führt die analoge Verallgemeinerung des Wertebereichs der «Metrik» zur «Pseudometrik». Jeder uniforme Raum ist pseudometrisierbar und jeder Pseudometrik induziert eine uniforme Struktur.

I. Quasiuniforme Strukturen

Das Ziel, Strukturen zu definieren, die den uniformen Strukturen verwandt sind, deren zugeordnete Konvergenzstruktur aber nur diejenige eines «Limesraumes» ist, kann nicht dadurch erreicht werden, daß die Axiome der Nachbarschaften uniformer Strukturen abgeschwächt werden. Die notwendigerweise durch

$$«\mathfrak{F} \to x \iff \mathfrak{F} \wedge \dot{x} \text{ Cauchyfilter}»$$

definierte Konvergenzstruktur ist bei jeder Abschwächung der Axiome der Nachbarschaften von der Struktur eines Limesraumes verschieden.

Es muß auf die Definition verzichtet werden, daß eine Menge genau dann klein von einer gewissen Ordnung V sein soll, wenn alle ihre Punkte nahe von der Ordnung V sind. Als Grundbegriff wird die Größenordnung von Mengen eingeführt. (A klein von der Ordnung...) Es läßt sich dann zwar immer noch definieren, wann zwei Punkte x und y nahe von der Ordnung V heißen sollen (genau dann, wenn die Menge $\{x, y\}$ klein von der Ordnung V ist), aber aus der Größenordnung der zweipunktigen Mengen, läßt sich nicht die Größenordnung beliebiger Mengen bestimmen.

Das (unten formulierte) Axiom U_3^0 ist eine Verallgemeinerung der Dreiecksungleichung. Intuitiv wird man folgendermaßen darauf geführt:

Die Axiome der Metrik haben formale Ähnlichkeit mit den Axiomen einer Äquivalenzrelation. Besonders deutlich wird die Analogie, wenn anstatt $d(x, y) < a$ geschrieben wird $x \tilde{a} y$:

$$x \tilde{a} x \quad \text{für alle} \quad a > 0$$
$$x \tilde{a} y \Longrightarrow y \tilde{a} x$$
$$x \tilde{a} y, \; y \tilde{a} z \Longrightarrow x \widetilde{2a} z$$

Die sich aufdrängende Vermutung, daß «im Limes $a \to o$ dadurch eine Äquivalenzrelation definiert» sei, heißt exakt formuliert, daß die Cauchyfilter sich in gewisser Weise in Äquivalenzklassen einteilen lassen. Das Axiom U_3^0 ist die dazu benötigte Transitivitätsbeziehung. Auch in metrischen Räumen wird in vielen Beweisen, in denen die Dreiecksungleichung benutzt wird, im Grunde nur die dadurch bestehende Transitivität der Cauchyfilter gebraucht.

I.1. Definition der quasiuniformen Struktur

Sei E eine Menge, $\mathfrak{P}(E)$ ihre Potenzmenge, Π eine Familie von Systemen von Teilmengen von E. Die Elemente von Π sollen mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet werden: $\Pi = \{\alpha, \beta, \ldots\}$. Π erfülle die folgenden Axiome:

U_1: Alle höchstens einpunktigen Mengen liegen in jedem Element von Π.

U_2: Π «gerichtet» im Sinne der Inklusion in $\mathfrak{P}(E)$, das heißt zu $\alpha, \beta \in \Pi$ existiert $\gamma \in \Pi$ mit $\gamma \subset \alpha \frown \beta$; und aus $A \supset B$ und $A \in \alpha$ folgt $B \in \alpha$.

U_3^0: Seien $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ Filter auf E. Falls für jedes $\alpha \in \Pi$ ein $X \in \mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$ und ein $Y \in \mathfrak{G} \wedge \mathfrak{H}$ existiert mit $X \in \alpha$, $Y \in \alpha$, so existiert zu jedem $\alpha \in \Pi$ ein $Z \in \mathfrak{F} \wedge \mathfrak{H}$ mit $Z \in \alpha$.

Aus U_1 und U_2 folgt, daß Π eine Filterbasis auf $\mathfrak{P}(E)$ ist. Der von Π erzeugte Filter heiße Φ.

Definition. Falls ein Filter Φ auf $\mathfrak{P}(E)$ eine Basis Π besitzt, die U_1, U_2, U_3^0 erfüllt, sagt man, Φ erzeuge eine quasiuniforme Struktur u auf E.

Die Gesamtheit aller quasiuniformen Strukturen auf E heiße $\mathcal{U}_0$. Anstatt $A \in \alpha (\alpha \in \Phi)$ sagt man auch: A ist klein von der Ordnung α. Falls ein Filter eine Menge $A \in \alpha$ enthält, sagt man: $\mathfrak{F}$ ist fein von der Ordnung α.

Äquivalent zum Axiom U_3^0 ist das Axiom

$U_3^{0\prime}$: Seien $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ Filter auf E. $\operatorname{Sup}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ existiere. Falls für jedes $\alpha \in \Pi$ ein $X \in \alpha$ und ein $Y \in \alpha$ existiert, mit $X \in \mathfrak{F}$ und $Y \in \mathfrak{G}$, so existiert zu jedem $\alpha \in \Pi$ ein $Z \in \mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$ mit $Z \in \alpha$.

Beweis. Sei U_3^0 vorausgesetzt. $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ sollen die Voraussetzungen von $U_3^{0\prime}$ erfüllen, dann erfüllen $\mathfrak{F}$, $\sup(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$, $\mathfrak{G}$ die Voraussetzungen von U_3^0. Also enthält $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$ zu jedem $\alpha \in \Pi$ eine Menge $Z \in \alpha$. Gelte umgekehrt $U_3^{0\prime}$. $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ sollen die Voraussetzungen von U_3^0 erfüllen. Dann erfüllen $(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G})$ und $(\mathfrak{G} \wedge \mathfrak{H})$ die Voraussetzungen von $U_3^{0\prime}$. Es existiert also in $(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}) \wedge (\mathfrak{G} \wedge \mathfrak{H}) = \mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G} \wedge \mathfrak{H}$ eine Menge $Z \in \alpha$. Dann gehört Z auch zu $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$.

Π sei wieder eine Familie von Mengensystemen, die aber die folgenden Axiome erfülle:

U_1, U_2 und

U_3^1: Zu jedem $\alpha \in \Pi$ existiert ein $\beta(\alpha) \in \Pi$, so daß aus $A \frown B \neq \varnothing$, $B \frown C \neq \varnothing$ und $A \smile B \in \beta$, $B \smile C \in \beta$ folgt, daß $A \smile C \in \alpha$.

Wie oben ist Π eine Filterbasis auf $\mathfrak{P}(E)$ und erzeugt einen Filter Φ. Jeder solcher Filter definiert auf E eine (spezielle) quasiuniforme Struktur. Die Gesamtheit dieser Strukturen heiße $\mathcal{U}_1$.

Äquivalent zum Axiom U_3^1 ist das folgende Axiom:

$U_3^{1\prime}$: Zu jedem $\alpha \in \Pi$ existiert ein $\beta(\alpha) \in \Pi$, so daß aus $F \frown G \neq \varnothing$ und $F \in \beta$, $G \in \beta$ folgt, daß $F \smile G \in \alpha$.

Zum Beweise von $U_3^{1\prime}$ aus U_3^1 wähle man einen Punkt x in $F \cap G$. Dann erfüllen die Mengen $F, \{x\}, G$ die Voraussetzungen von U_3^1. Es gilt also $F \cup G \in \alpha$.

Sei umgekehrt $U_3^{1\prime}$ erfüllt. Man setzt $F = A \cup B$ und $G = B \cup C$. Dann folgt sofort, daß $F \cup G = A \cup B \cup C \in \alpha$. Also ist auch $A \cup C \in \alpha$. Man zeigt leicht, daß auch folgende Bedingung äquivalent zum Axiom U_3^1 ist:

$U_3^{1\prime\prime}$: Zu jedem $\alpha \in \Pi$ existiert ein $\beta_n(\alpha) \in \Pi$, so daß aus $A_0 \cap A_i \neq \varnothing$ $(i = 1, \ldots n)$ und $A_0 \cup A_i \in \beta_n(i)$, folgt, daß $\bigcup\limits_{j=0}^{n} A_j \in \alpha$.

Eine dritte Art von Strukturen auf E wird definiert durch Filter Φ auf $\mathfrak{P}(E)$, die eine Basis Π besitzen, welche folgende Axiome erfüllt:

U_1, U_2 und

U_3^2: Zu jedem $\alpha \in \Pi$ existiert ein $\beta(\alpha) \in \Pi$, so daß aus $A_0 \cap A_j \neq \varnothing$ $(j \in I$; I beliebige Indexmenge) und $A_0 \cup A_j \in \beta$ (für alle j) folgt, daß $\bigcup\limits_{\substack{j=0\\ j\in I}} A_i \in \alpha$.

Die Gesamtheit dieser Strukturen heiße $\mathcal{U}_2$.

Eine letzte Art von Strukturen auf E wird erzeugt durch Filter Φ, welche eine Basis Π besitzen, die folgende Axiome erfüllt:

U_1, U_2, U_3^2 und

U_4: A ist genau dann klein von der Ordnung α, wenn für jedes Punktepaar x, y aus A gilt: $\{x, y\} \in \alpha$.

Die Gesamtheit dieser Stukturen heiße $\mathcal{U}$.

Man sieht sofort, daß $\mathcal{U}_0 \supset \mathcal{U}_1 \supset \mathcal{U}_2 \supset \mathcal{U}$.

Die Axiome für die $\mathcal{U}$-Strukturen bilden kein minimales Axiomensystem. Zum Beispiel läßt sich U_3^2 beweisen aus U_1, U_2, U_3^1, U_4.

Jede $\mathcal{U}$-Struktur ist eine uniforme Struktur und umgekehrt. Zum Beweise ordne man jedem $\alpha \in \Pi$ ein $V_\alpha \subset E \times E$ zu: $V_\alpha = \{\{x, y\} \in \alpha\}$. Man zeigt dann sofort, daß die V_α eine Basis von Nachbarschaften einer uniformen Struktur sind.

Umgekehrt geht man aus von einer symmetrischen Basis der uniformen Struktur und definiert: A sei klein von der Ordnung α_V, genau dann, wenn $A \times A \subset V$. Die Axiome U_1, U_2, U_3^1, U_4 folgen dann sofort.

I.2. Feinheit quasiuniformer Strukturen

Definiton. u_1 heißt feiner als u_2 $(u_1 \gg u_2)$, wenn $\Pi_1 \gg \Pi_2$, m.a.W. wenn $\Phi_1 \gg \Phi_2$.

Die feinste $\mathcal{U}_0$-Struktur, die diskrete $\mathcal{U}_0$-Struktur, wird bestimmt durch den Filter $\Phi = \{\mathfrak{A} : \varnothing, \{x\} \in \mathfrak{A}$ für alle $x \in E\}$. Die gröbste $\mathcal{U}_0$-Struktur wird bestimmt durch $\Phi = \{\mathfrak{P}(E)\}$.

Supremum. Seien u_i die durch gegebene Φ_i definierten $\mathcal{U}_0$-Strukturen. Dann existiert $\sup u_i = u$ und wird durch $\Phi = \sup \Phi_i$ bestimmt. Zum Beweise genügt es, zu zeigen, daß $\sup \Phi_i$ eine $\mathcal{U}_0$-Struktur definiert: Die Axiome U_1 und U_2 sind trivialerweise erfüllt. Es ist noch U_3^0 zu beweisen:

Jedes $\alpha \in \Phi$ läßt sich darstellen als $\alpha = \alpha_{i_1} \cap \alpha_{i_2} \cap \ldots \alpha_{i_n}$, mit $\alpha_{i_j} \in \Phi_{i_j}$. Zu $\alpha \in \Phi$ existiere ein $X \in \mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$ und ein $Y \in \mathfrak{G} \wedge \mathfrak{H}$ mit $X, Y \in \alpha$. Dann ist auch $X, Y \in \alpha_{i_j}$. Für jedes Φ_{i_j} sind die Voraussetzungen von Axiom U_3^0 erfüllt. Es existiert demnach zu jedem α_{i_j} ein $Z_{i_j} \in \alpha_{i_j}$ mit $Z_{i_j} \in \mathfrak{F} \wedge \mathfrak{H}$. Sei $Z = \bigcap_{j=1}^{n} Z_{i_j}$. Dann ist $Z \in \alpha$ und $Z \in \mathfrak{F} \wedge \mathfrak{H}$.

Infimum. Seien u_i die durch gegebene Φ_i definierten $\mathcal{U}_0$-Strukturen. Dann existiert $\inf u_i$ immer: $u = \inf u_i = \sup \{u : u \ll u_i\}$. Dagegen ist der $\inf u_i$ erzeugende Filter im allgemeinen nicht identisch mit $\inf \Phi_i$. $\operatorname{Inf} \Phi_i$ erzeugt im allgemeinen keine $\mathcal{U}_0$-Struktur.

Gegenbeispiel. Seien zwei Partitionen von E gegeben: $A_1 \cup B_1 = E$ und $A_2 \cup B_2 = E$. Es gelte: $A_i, B_i \neq \varnothing$ und $A_1 \supset A_2$. Jede solche Partition erzeugt eine $\mathcal{U}_0$-Struktur: $\Pi_i = \{X : X \subset A_i$ oder $X \subset B_i\}$. Die Axiome U_1 und U_2 sind trivialerweise erfüllt. Zum Beweis von U_3^0: Sei $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$ beliebig fein, dann existieren F und G_1 mit $F \cup G_1 \in \mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$ und $F \cup G_1 \subset A$ (oder $\subset B$). Sei $\mathfrak{G} \wedge \mathfrak{H}$ beliebig fein, dann existieren G_2 und H mit $G_2 \cup H \in \mathfrak{G} \wedge \mathfrak{H}$ und $G_2 \cup H \subset A$ (oder $\subset B$). Da $G_1 \cap G_2 \neq \varnothing$, so liegen entweder G_1 und G_2 in A oder G_1 und G_2 in B. Deshalb gilt $F \cup H \subset A$ (oder $\subset B$), d.h. $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{H}$ ist beliebig fein. Anderseits erfüllt $\psi = \inf(\Phi_1, \Phi_2) =$ der von $\{X : X \subset A_i$ oder $\subset B_i\}$ erzeugte Filter U_3^0 nicht: Man betrachte die von $A_1, A_1 \cap B_2, B_2$ erzeugten Filter. Das inf der ersten beiden ist der von A_1 erzeugte Filter und deshalb beliebig ψ-fein. Das inf der beiden letzten ist der von B_2 erzeugte Filter, also beliebig ψ-fein. Das inf des ersten und des dritten ist $\{E\}$, also nicht beliebig ψ-fein.

Kriterium. u_1, u_2 seinen erzeugt durch Φ_1, Φ_2. $u = \inf(u_1, u_2)$. u wird genau dann von $\inf(\Phi_1, \Phi_2)$ erzeugt, wenn aus

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G} \text{ bel. fein}(u_1) \text{ und} \\ \mathfrak{G} \wedge \mathfrak{H} \text{ bel. fein}(u_2)\end{array}\right\} \text{ folgt: } \mathfrak{F} \wedge \mathfrak{H} \text{ bel. fein}(u).$$

Beweis. Notwendig. Wäre $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$ bel. u_1-fein, $\mathfrak{G} \wedge \mathfrak{H}$ bel. u_2-fein, aber $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{H}$ nicht bel. u-fein, dann wäre $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$ bel. u-fein, $\mathfrak{G} \wedge \mathfrak{H}$ bel. u-fein, aber $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{H}$ nicht bel. u-fein, was U_3^0 widerspricht.

Hinreichend. Sei $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$ beliebig u-fein, dann ist $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$ beliebig u_1-fein oder beliebig u_2-fein. (Da sonst $\alpha_i \in \Phi_i$ existieren würden, so daß $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$ keine Mengen in α_i enthält. Dann enthält $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$ auch keine Mengen in $\alpha_1 \cup \alpha_2$, das heißt $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$ ist nicht beliebig u-fein.) Sei z.B. $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$ beliebig u_1-fein. Dann ist

Fall 1: $\mathfrak{G} \wedge \mathfrak{H}$ beliebig u_1-fein, das heißt $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{H}$ beliebig u_1-fein, das heißt $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{H}$ beliebig u-fein; oder

Fall 2: $\mathfrak{G} \wedge \mathfrak{H}$ beliebig u_2-fein, das heißt $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{H}$ beliebig u-fein (Krit.).

I.3. Urbild einer quasiuniformen Struktur

Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung von X in Y. Die induzierte Abbildung der Potenzmengen heiße ebenfalls f. $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{E}_y$ seien die Systeme aller höchstens einelementigen Mengen von X bzw. von Y.

Auf Y sei durch Φ eine quasiuniforme Struktur gegeben. Zu $\alpha \in \Phi$ wird gebildet $\alpha^* \subset \mathfrak{P}(X) = \{A : f(A) \in \alpha\}$. Die Menge aller solchen α^* bildet auf $P(X)$ eine Filterbasis, die eine quasiuniforme Struktur, das Urbild der gegebenen Struktur, erzeugt.

Beweis. 1. $f(\mathfrak{E}_X) \subset \mathfrak{E}_Y$

2. $\alpha_1 = f(\alpha_1^*)$, $\alpha_2 = f(\alpha_2^*)$, dann ist $f(\alpha_1^* \cap \alpha_2^*) \subset \alpha_1 \cap \alpha_2$.

3. Eine Menge $A \subset X$ ist genau dann klein von der Ordnung α^*, wenn $f(A)$ klein von der Ordnung α ist. Ein Filter ist also genau dann beliebig fein, wenn sein Bild die Basis eines beliebig feinen Filters ist.

Spurbildung. Sei auf E eine quasiuniforme Struktur gegeben. A sei eine Teilmenge von E. Dann wird auf A eine quasiuniforme Struktur induziert, die Spur von u auf $A(u_A) \cdot u_A$ ist das inverse Bild von u unter der Einbettung k von A in E.

I.4. Separierte quasiuniforme Strukturen

Definition. Eine quasiuniforme Struktur heißt separiert, wenn nur die höchstens einpunktigen Mengen klein von jeder Ordnung sind.

Äquivalent ist die Formulierung: $\bigcap_{\alpha \in \Phi} \alpha = \left\{\varnothing, \{\{x\}\}_{x \in E}\right\}$. Ebenfalls äquivalent ist die Forderung: Zu jeder mehrpunktigen Menge $A \subset E$ existiert ein $\alpha \in \Phi$, so daß A nicht klein von der Ordnung α ist.

Die folgenden einfachen Sätze sind leicht zu beweisen:

1. Jede quasiuniforme Struktur, die feiner ist als eine separierte quasiuniforme Struktur, ist separiert.

2. Das sup einer Familie von separierten quasiuniformen Strukturen ist separiert.

3. u_1 und u_2 seien separierte quasiuniforme Strukturen. Falls $\inf(u_1, u_2)$ von $\inf(\Phi_1, \Phi_2)$ erzeugt wird, so ist $\inf(u_1, u_2)$ separiert. (Zu A, mehrpunktig existieren $\alpha_i \in \Phi_i$, so daß $A \notin \alpha_i$. Dann gilt $A \notin \alpha_1 \cup \alpha_2 \in \Phi$.)

4. Gegeben eine Abbildung $f: X \to Y$. Auf Y sei eine quasiuniforme Struktur u gegeben. In diesem Fall ist f genau dann eineindeutig, wenn aus u separiert folgt, daß $f^{-1}(u)$ separiert.

5. Die Spur einer separierten quasiuniformen Struktur u (auf E) auf einer Teilmenge $A \subset E, (u_A)$, ist separiert.

Sei $\alpha \in \Phi$. Sei $\delta(\alpha) = \left\{X: \operatorname{Ex} A_0, A_\gamma;\ A_0, A_\gamma \in \alpha;\ A_0 \cap A_\gamma \neq \varnothing;\ X \subset \bigcup_{A_i = A_0, A_\gamma} A_i\right\}$

u sei nicht notwendigerweise separiert.

Dann wird eine Äquivalenzrelation definiert durch:

$$x \sim y :\Longleftrightarrow \{x, y\} \in \alpha \text{ (für alle } \alpha \in \Phi) .$$

$x \sim x$, und $x \sim y \Longleftrightarrow y \sim x$ sind trivial. Ferner folgt aus $x \sim y$ und $y \sim z$, daß $\{x, y\}$, $\{y, z\} \in \alpha$ (für alle $\alpha \in \Phi$). Die von $\{x, y\}$ und $\{y, z\}$ erzeugten Filter sind also beliebig fein. Dann folgt, daß auch der von $\{x, z\}$ erzeugte Filter beliebig fein ist. Man sieht leicht, daß dies nur möglich ist, wenn $\{x, y\}$ in allen α liegt. Also ist $x \sim z$.

Diese Äquivalenzrelation R induziert in $\mathfrak{P}(E)$ eine Äquivalenzrelation: $A \sim B :\Longleftrightarrow$ zu $a \in A$ existiert $b \in B$, so daß $a \sim b$ (und umgekehrt).

Sei $\sigma(\alpha) = \{X: X \subset S(A);\ A \in \alpha\}$, wobei $S(A)$ die in bezug auf R saturierte Menge darstellt.

Dieselben saturierten Systeme erhält man durch Projektion: $p: E \to E/R$, $p: \mathfrak{P}(E) \to \mathfrak{P}(E/R)$ und anschließende Bildung des Inversen.

Sei $u \in \mathcal{U}_2$. Dann sieht man leicht, daß die $\delta(\alpha)$ eine Basis von Φ bilden. Da $\sigma(\alpha) \subset \delta(\alpha)$, bilden auch die $\sigma(\alpha)$ eine Basis von Φ.

Auf E/R wird dadurch in natürlicher Weise eine separierte $\mathcal{U}_2$-Struktur definiert: die zu u assoziierte separierte $\mathcal{U}_2$-Struktur. Es wurde dadurch eine Übersicht über alle $\mathcal{U}_2$-Strukturen gewonnen: Zu einer gegebenen Menge E, zu einer gegebenen Äquivalenzrelation R auf E und zu gegebener separierten $\mathcal{U}_2$-Struktur u auf E/R existiert genau eine $\mathcal{U}_2$-Struktur auf E, deren assoziierte separierte Struktur u ist: Das inverse Bild von u unter der Projektion $p: E \to E/R$.

I.5. Cauchyfilter

Definition: Ein Filter $\mathfrak{F}$ heißt Cauchyfilter, wenn zu jedem $\alpha \in \Phi$ ein $F \in \mathfrak{F}$ existiert, mit $F \in \alpha$.

Anschaulich: Ein Filter heiße Cauchyfilter, wenn er beliebig kleine Mengen enthält.

Man sieht leicht, daß folgende Sätze gelten:

1. $u_1 \gg u_2$. Sei $\mathfrak{F}$ ein u_2-Cauchyfilter, dann ist er auch ein u_1-Cauchyfilter.

2. Sei $\mathfrak{F} \gg \mathfrak{G}$. Sei ferner $\mathfrak{G}$ ein Cauchyfilter. Dann ist auch $\mathfrak{F}$ ein Cauchyfilter.
3. Alle $\dot{x}$ sind Cauchyfilter.
4. Falls A beliebig klein, so ist A ein Cauchyfilter.

Äquivalente Cauchyfilter. In der Menge der Cauchyfilter wird eine Äquivalenzrelation definiert durch:

$\mathfrak{F} \sim \mathfrak{G} : \Longleftrightarrow$ Falls $\inf(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ ein Cauchyfilter ist.

Zum Beweise bemerke man, daß

1. $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$
2. $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G} = \mathfrak{G} \wedge \mathfrak{F}$
3. $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} \wedge \mathfrak{H}$ $CF \Longrightarrow \mathfrak{F} \wedge \mathfrak{H}$ CF (nach Axiom U_3^0).

Seien endlich viele Filter $\mathfrak{F}_i$ äquivalent, dann ist auch ihr infimum, $\bigwedge_i \mathfrak{F}_i$, ein Filter derselben Äquivalenzklasse. Zusammen mit Satz 2 (siehe oben) folgt also:

Die Äquivalenzklassen von Cauchyfiltern sind $\wedge$-Ideale in der Familie aller Filter auf E.

I.6. Konvergenz

Gegeben sei auf der Menge E eine quasiuniforme Struktur u. Auf E wird dadurch ein Konvergenzbegriff für Filter induziert:

Definition: $\mathfrak{F}$ konvergiert nach $x (\mathfrak{F} \to x)$, genau dann, wenn $\inf(\mathfrak{F}, \dot{x})$ ein Cauchyfilter ist.

Dieser Konvergenzbegriff definiert auf E einen Limesraum, da

1. $\dot{x} \to x$
2. Sei $\mathfrak{F} \gg \mathfrak{G}$. Sei $\mathfrak{G} \to x$. Dann ist $\mathfrak{G} \wedge \dot{x} \ll \mathfrak{F} \wedge \dot{x}$. Da $\mathfrak{G} \wedge \dot{x}$ ein Cauchyfilter ist, ist auch $\mathfrak{F} \wedge \dot{x}$ ein Cauchyfilter, also konvergiert $\mathfrak{F}$ nach x.
3. Seien $\mathfrak{F} \to x$ und $\mathfrak{G} \to x$. Dann folgt aus $\mathfrak{F} \wedge \dot{x}$ Cauchyfilter (CF), und $\mathfrak{G} \wedge \dot{x}$ CF, daß $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$ ein CF ist. Die Filter $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \dot{x}$ sind äquivalent, also ist $(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}) \wedge \dot{x}$ ein CF, das heißt $(\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}) \to x$.

Falls alle Cauchyfilter konvergieren, heißt der quasiuniforme Raum vollständig.

Falls ein Cauchyfilter (nicht) konvergiert, konvergieren auch alle äquivalenten Cauchyfilter (nicht).

Falls die quasiuniforme Struktur u auf E separiert ist, so ist auch der zugehörige Limesraum separiert.

Beweis: $x \neq y$, dann ist $\dot{x} \wedge \dot{y}$ kein Cauchyfilter. Würde ein Filter $\mathfrak{F}$ existieren, der nach x und nach y konvergiert, so wären $\mathfrak{F} \wedge \dot{x}$ und $\mathfrak{F} \wedge \dot{y}$ CF. Dann wäre $\dot{x} \sim \dot{y}$, das heißt $\dot{x} \wedge \dot{y}$ ein CF.

I. 7. Vervollständigung

Satz. Sei (E, u) ein quasiuniformer Raum. Dann existiert ein vollständiger quasiuniformer Raum (E', u') mit folgenden Eigenschaften: (E', u') besitzt einen zu (E, u) isomorphen Unterraum (E^*, u^*), welcher dicht liegt in (E', u').

Beweis. E' sei die Menge aller CF auf E. k sei die eineindeutige Abbildung von E in E', die dem Punkt $x \in E$ den CF $\dot{x}$ zuordnet. E^* sei das Bild von E unter k.
In E' wird eine quasiuniforme Struktur definiert:

Definition. $A' \subset E'$ heißt klein von der Ordnung α', genau dann, wenn ein $F \subset E$ existiert, so daß $F \in \alpha$ und $F \in \inf\limits_{\mathfrak{F} \in A'} \mathfrak{F}$.

Es ist zu zeigen, daß die Axiome der quasiuniformen Struktur erfüllt sind:

1. A' sei einpunktig, das heißt, A' enthält genau einen Cauchyfilter $\mathfrak{G}$. Dann ist $\inf\limits_{\mathfrak{F} \in A'} \mathfrak{F} = \mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}$ enthält beliebig kleine Mengen, also ist A' klein von jeder Ordnung.

2. Es soll gezeigt werden, daß $(\alpha \frown \beta)' = \alpha' \frown \beta'$ ist. M' sei klein von der Ordnung $(\alpha \frown \beta)'$. Dann existiert ein $F \in \mathfrak{G} = \inf\limits_{\mathfrak{F} \in M'} \mathfrak{F}$, so daß $F \in \alpha \frown \beta$. Dann gilt auch $F \in \alpha$ und $F \in \beta$. F' ist also klein von der Ordnung $\alpha' \frown \beta'$. Sei anderseits M' klein von der Ordnung $(\alpha \frown \beta)'$, dann existieren Mengen A und B (in E) mit A und $B \in \mathfrak{G} = \inf\limits_{\mathfrak{F} \in M'} \mathfrak{F}$ und $A \in \alpha$, $B \in \alpha$. $F = A \frown B$ liegt dann auch in $\mathfrak{G}$, ferner gilt $F \in \alpha$, $F \in \beta$, das heißt, $F \in \alpha \frown \beta$. M' ist also klein von der Ordnung $(\alpha \frown \beta)'$. Damit ist gezeigt, daß $(\alpha \frown \beta)' = \alpha' \frown \beta'$. Daraus folgt, daß die $\{\alpha'\}_{\alpha \in \Phi}$ eine Filterbasis auf $\mathfrak{P}(E)$ bilden.

Sei $A' \supset B'$. Sei ferner $A' \in \alpha'$. Das heißt, es existiert eine Menge $M \in \alpha$ mit $M \in \inf\limits_{\mathfrak{F} \in A'} \mathfrak{F}$. Da aber $\inf\limits_{\mathfrak{F} \in B'} \mathfrak{F} \gg \inf\limits_{\mathfrak{F} \in A'} \mathfrak{F}$, so liegt M auch in $\inf\limits_{\mathfrak{F} \in B'} \mathfrak{F}$. Also ist $B' \in \alpha'$.

3. Zum Beweise des 3. Axioms werde zunächst ein Hilfssatz bewiesen:

Hilfssatz. Ein Filter $\mathfrak{F}'$ auf E' enthält genau dann eine Menge, die klein ist von der Ordnung α', wenn der Filter $\mathfrak{H} = \bigvee\limits_{F' \in \mathfrak{F}'} \bigwedge\limits_{\mathfrak{F} \in F'} \mathfrak{F}$ eine Menge enthält, die klein ist von der Ordnung α.

Beweis des Hilfssatzes.

a) $\mathfrak{F}'$ enthalte eine Menge $F_0{}' \in \alpha'$. Dann enthält $\bigwedge\limits_{\mathfrak{F} \in F_0{}'} \mathfrak{F}$ eine Menge A, die klein ist von der Ordnung α. Da $\bigvee\limits_{F' \in \mathfrak{F}'} \bigwedge\limits_{\mathfrak{F} \in F'} \mathfrak{F} \gg \bigwedge\limits_{\mathfrak{F} \in F_0{}'} \mathfrak{F}$, liegt A auch in $\bigvee\limits_{F' \in \mathfrak{F}'} \bigwedge\limits_{\mathfrak{F} \in F'} \mathfrak{F}$, das heißt, dieser Filter enthält eine Menge A, die klein ist von der Ordnung α.

b) $\mathfrak{H} = \bigvee\limits_{F' \in \mathfrak{F}'} \bigwedge\limits_{\mathfrak{F} \in F'}$ enthalte eine Menge H, die klein ist von der Ordnung α.

Als Abkürzung sei $\mathfrak{G}_{F'} = \bigwedge_{\mathfrak{F}\in F'} \mathfrak{F}$. Es existieren endlich viele $F_i' \in \mathfrak{F}'$, so daß $H = G_1 \cap \ldots \cap G_n$, wobei $G_i \in \mathfrak{G}_{F_i'}$. H liegt also in $\bigvee \mathfrak{G}_{F_i'}$. Da $H \in \mathfrak{G}_{F_i'}$ (für alle i), so gilt $H \in \bigwedge \mathfrak{G}_{F_i'}$.

Sei nun $F_0' = F_1' \cap \ldots \cap F_n'$. Dann gilt für alle $\mathfrak{F} \in F_0' : \mathfrak{G}_{F_i'} \ll \mathfrak{F}$. Also ist auch $\bigwedge \mathfrak{G}_{F_i'} \ll \bigwedge_{\mathfrak{F}\in F_0'} \mathfrak{F}$.

Da der Filter links H enthält, muß auch der Filter rechts H enthalten; dies bedeutet, daß F_0' die gesuchte Menge in $\mathfrak{F}'$ ist, welche klein ist von der Ordnung α'.

Bemerkung. Insbesondere folgt aus dem Hilfssatz, daß $\mathfrak{F}'$ genau dann ein Cauchyfilter ist, wenn $\mathfrak{H} = \bigvee_{F'\in\mathfrak{F}'} \bigwedge_{\mathfrak{F}\in F'} \mathfrak{F}$ ein Cauchyfilter ist.

Das 3. Axiom kann jetzt leicht bewiesen werden:

Seien $\mathfrak{F}' \wedge \mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}' \wedge \mathfrak{H}'$ Cauchyfilter. Dann sind auch $\bigvee_{H\in\mathfrak{F}'\wedge\mathfrak{G}'} \bigwedge_{\mathfrak{F}\in H} \mathfrak{F} = \bigvee_{F'\in\mathfrak{F}'\, G'\in\mathfrak{G}'} \bigwedge_{\mathfrak{F}\in F'\cup G'} \mathfrak{F}$ und $\bigvee_{H\in\mathfrak{G}'\wedge\mathfrak{H}'} \bigwedge_{\mathfrak{F}\in H} \mathfrak{F} = \bigvee_{H'\in\mathfrak{H}'\, G'\in\mathfrak{G}'} \bigwedge_{\mathfrak{F}\in G'\cup H'} \mathfrak{F}$ Cauchyfilter. Es folgt, daß $\bigvee_{H\in\mathfrak{F}'\wedge\mathfrak{G}'\wedge\mathfrak{H}'} \bigwedge_{\mathfrak{F}\in H} \mathfrak{F}$ ein Cauchyfilter ist; dann ist um so mehr $\bigvee_{H\in\mathfrak{F}'\wedge\mathfrak{H}'} \bigwedge_{\mathfrak{F}\in H} \mathfrak{F}$ ein Cauchyfilter. $\mathfrak{F}' \wedge \mathfrak{H}'$ enthält also beliebig kleine Mengen, womit U_3^0 (in E') nachgewiesen ist.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß die quasiuniformen Strukturen von E und von E^* (Spur von E') isomorph sind. Jeder Menge $A \subset E$ entspricht die Menge $A' = \{\dot{x} : x \in A\}$. Da $\dot{A} = \bigwedge_{x\in A} \dot{x}$, so gilt offenbar: A' ist klein von der Ordnung α', genau dann, wenn $\dot{A}$ eine Menge von der Ordnung α enthält, also genau dann, wenn A klein ist von der Ordnung α.

Die Vollständigkeit von E' wird wie folgt gezeigt:

Sei $\mathfrak{F}'$ ein beliebiger Cauchyfilter auf E', das heißt $\mathfrak{H} = \bigvee_{F'\in\mathfrak{F}'} \bigwedge_{\mathfrak{F}\in F'} \mathfrak{F}$ ist ein CF auf E. Es wird gezeigt, daß $\mathfrak{F}'$ konvergiert, und zwar gegen $\mathfrak{H} : \mathfrak{F}' \to \mathfrak{H}$.

Dazu ist notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{F}' \wedge \dot{\mathfrak{H}}$ ein Cauchyfilter ist. Es genügt also, zu zeigen, daß $\bigvee_{F\in\mathfrak{F}'\wedge\dot{\mathfrak{H}}} \bigwedge_{\mathfrak{F}\in F} \mathfrak{F}$ ein Cauchyfilter ist. Wie man leicht sieht, ist dazu nur zu beweisen, daß $\bigvee_{F\in\mathfrak{F}'} \bigwedge_{\mathfrak{F}\in F'\cup\{\mathfrak{H}\}} \mathfrak{F}$ ein Cauchyfilter ist. Da $\bigwedge_{\mathfrak{F}\in F'} \mathfrak{F} \ll \mathfrak{H}$, so gilt: $\bigwedge_{\mathfrak{F}\in F'\cup\{\mathfrak{H}\}} \mathfrak{F} = \bigwedge_{\mathfrak{F}\in F'} \mathfrak{F}$, also ist $\bigvee_{F\in\mathfrak{F}'} \bigwedge_{\mathfrak{F}\in F'\cup\{\mathfrak{H}\}} \mathfrak{F} = \mathfrak{H}$ ein CF.

Es muß jetzt nur noch gezeigt werden, daß E^* dicht liegt in E'. Dazu nimmt man einen beliebigen Punkt $\mathfrak{H} \in E'$ und zeigt, daß auf E ein Filter existiert, dessen Bild unter der Einbettung $k: E \to E'$ nach $\mathfrak{H}$ konvergiert. Der gesuchte Filter ist $\mathfrak{H}$ als Filter auf E betrachtet. $k(\mathfrak{H})$ als Filterbasis auf E' konvergiert nämlich gegen $\mathfrak{H}$: es ist $\mathfrak{H} = \bigvee_{F\in\mathfrak{H}} \bigwedge_{x\in F} \dot{x}$, woraus die Behauptung wie oben folgt.

II. BOOLEsche Algebren

II.1. Eine quasiuniforme Struktur

Gegeben sei eine BOOLEsche Algebra E, mit den Elementen $a, b, \ldots$. o sei das kleinste, e das größte Element.

Satz. Die Mengensysteme

$$\begin{aligned}\alpha_{a_1, \ldots a_n} = \{X\colon\ & \text{Ex } s \text{ mit } s \geqslant x \text{ (für alle } x \in X), \text{ und} \\ & \text{Ex } i \text{ mit } i \leqslant x \text{ (für alle } x \in X), \\ & \text{so daß } s - i \mid\!\geqslant a_k\ (k = 1, \ldots n)\}\end{aligned}$$ [1]

für alle natürlichen n bilden eine Filterbasis in $\mathfrak{P}(E)$, welche eine quasiuniforme Struktur u definiert.

Beweis. 1. Jedes α_{a_k} enthält alle einpunktigen Mengen: $\{x\}$. Dabei ist $s = i = x$.

2. Die α_{a_k} bilden eine Filterbasis, da $\alpha_{a_1, \ldots a_n} \cap \alpha_{b_1, \ldots b_m} = \alpha_{a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_m}$.

3. Seien $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} \wedge \mathfrak{H}$ Filter, die beliebig kleine Mengen enthalten, das heißt, zu beliebigen $a_1, \ldots a_n$ existieren F und G_1, so daß $F \cup G_1 \in \alpha_{a_1, \ldots a_n}$, und zu $b_1, \ldots b_m$ existieren G_2 und H, so daß $G_2 \cup H \in \alpha_{b_1, \ldots b_m}$. Sei $G = G_1 \cap G_2$, dann erfüllt G dieselben Bedingungen wie G_1 und G_2. Seien jetzt $a_1, \ldots a_n$ gegeben. Dann zeigt man sofort, daß F und G_1 existieren, so daß

$$(s_F \cup s_{G_1}) - (i_F \cap i_{G_1}) \mid\!\geqslant a_k\,.$$

Man wähle jetzt

$$b_k = a_k - ((s_F \cup s_{G_1}) - (i_F \cap i_{G_1}))\,.$$

Dann ist offenbar $b_k \neq o$. Zu $b_1, \ldots b_n$ existieren G_2, H, so daß

$$(s_{G_2} \cup s_H) - (i_{G_2} \cap i_H) \mid\!\geqslant b_k\,.$$

Dann gilt

$$d_{FG} = (s_F \cup s_G) - (i_F \cap i_G) \mid\!\geqslant a_k$$

und

$$^{d}GH = (s_G \cup s_H) - (i_G \cap i_H) \mid\!\geqslant b_k\,,$$

woraus leicht folgt, daß p_k existieren mit $p_k \leqslant b_k \leqslant a_k$ und $p_k \cap d_{FG} = o$ und $p_k \cap d_{GH} = o$. Setzt man $d_{FGH} = (s_F \cup s_G \cup s_H) - (i_F \cap i_G \cap i_H)$, so zeigt man (z. B. durch Zerlegen in eine Normalform), daß $d_{FGH} = d_{FG} \cup d_{GH}$. Es gilt also $p_k \cap d_{FGH} = o$ und daraus folgt $p_k \cap d_{FH} = o$. Es existieren also $p_k \leqslant a_k$ mit

$$(s_F \cup s_H) - (i_F \cap i_H) \mid\!\geqslant p_k,$$

woraus folgt

$$(s_F \cup s_H) - (i_F \cap i_H) \mid\!\geqslant a_k\,.$$

Setzt man $s = s_F \cup s_H$ und $i = i_F \cap i_H$, so heißt dies, daß zu beliebigen $a_1, \ldots a_n$ F und H existieren, so daß $s \geqslant x (x \in F \cup H)$ und $i \leqslant x (x \in F \cup H)$

[1]) Aus technischen Gründen ist die Verneinung der Beziehung $\geqslant$ durch $\mid\!\geqslant$ und die Verneinung von $\leqslant$ durch $\leqslant\!\mid$ wiedergegeben.

und $s - i \mid\geqslant a_k$, das heißt, $F \cup H \in \alpha_{a_1, \dots a_n}$. $\mathfrak{F} \wedge \mathfrak{H}$ enthält also beliebig kleine Mengen.

Die u zugeordnete Limitierung heiße τ.

II.2. Eine Konvergenzstruktur in Booleschen Algebren

In einer Booleschen Algebra E kann neben der durch die quasiuniforme Struktur u induzierten Limitierung τ noch eine zweite Limitierung σ definiert werden:

Definition: $\mathfrak{F} \underset{\sigma}{\longrightarrow} x$ ($\mathfrak{F}$ konvergiert nach x), genau dann, wenn für alle $F \in \mathfrak{F}$ ein $s_F \geqslant x (x \in F)$ und ein $i_F \leqslant x (x \in F)$ existieren, so daß $\bigcap\limits_{F \in \mathfrak{F}} s_F = \bigcup\limits_{F \in \mathfrak{F}} i_F = x$.

Es gilt offenbar: $\dot{x} \underset{\sigma}{\longrightarrow} x$. Ferner folgt aus $F \gg \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G} \underset{\sigma}{\longrightarrow} x$ leicht $\mathfrak{F} \underset{\sigma}{\longrightarrow} x$. Falls $\mathfrak{F} \underset{\sigma}{\longrightarrow} x$ und $\mathfrak{G} \underset{\sigma}{\longrightarrow} x$, so gilt $\bigcap\limits_{F \in \mathfrak{F}} s_F$ und $\bigcap\limits_{F \in \mathfrak{G}} s_F = x$. Dann folgt sofort, daß $\bigcap\limits_{\substack{F_1 \in \mathfrak{F} \\ F_2 \in \mathfrak{G}}} s_{F_1 \cup F_2} = x$. Entsprechend folgt $\bigcup i_{F_1 \cup F_2} = x$.

Also ist σ eine Limitierung.

Diese bekannte Konvergenzstruktur wird quasiuniformisiert durch die in II.1 angegebene Struktur u:

Satz. $\mathfrak{F}$ konvergiert genau dann nach x im Sinne von σ, wenn $\mathfrak{F}$ nach x konvergiert im Sinne von τ.

Beweis. a) Gelte $\mathfrak{F} \underset{\sigma}{\longrightarrow} x$. Dann gilt $\bigcap\limits_{F \in \mathfrak{F}} s_F = \bigcup\limits_{F \in \mathfrak{F}} i_F = x$. Es folgt $\bigcap\limits_{F \in \mathfrak{F}} (s_F - i_F) = o$.

Zu a_k existiert F_{a_k}, so daß $s_{F_k} - i_{F_k} \mid\geqslant a_k$. Seien $a_1, \dots a_n \neq 0$ gegeben. Sei $F_0 = \bigcap\limits_{k=1}^{n} F_{a_k}$. Dann gilt $s_{F_0} - i_{F_0} \mid\geqslant a_k$ (für alle k). Also ist $\mathfrak{F}$ ein u-Cauchyfilter. Es ist noch zu zeigen, daß $\mathfrak{F}$ im Sinne der Limitierung τ nach x konvergiert. Dazu muß $\mathfrak{F} \wedge \dot{x}$ ein Cauchyfilter sein.

Es gilt allgemein: $s_F \geqslant c \Longrightarrow s_{F \cup \{c\}} = s_F$ und $i_F = i_{F \cup \{c\}}$. $\mathfrak{F} \wedge \dot{x} = \{F \cup \{x\} : F \in \mathfrak{F}\}$. Also folgt sofort, daß $\mathfrak{F} \wedge \dot{x}$ ein Cauchyfilter ist.

b) Sei $\mathfrak{F}$ ein Cauchyfilter, der im Sinne von τ nach x konvergiert. Dann ist $\mathfrak{F} \wedge \dot{x}$ ein Cauchyfilter. Man zeigt leicht, daß dann $s_F \geqslant x \geqslant i_F$. Es folgt

$$\bigcap_{F \in \mathfrak{F} \wedge \dot{x}} s_F \geqslant \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} s_F \geqslant x \geqslant \bigcup_{F \in \mathfrak{F}} i_F \geqslant \bigcup_{F \in \mathfrak{F} \wedge \dot{x}} i_F .$$

Zu a) $(a \frown x = o)$ existiert F' mit $s_{F'} \mid\geqslant a$ und zu b) $(b \subset x)$ existiert F'' mit $i_{F''} \leqslant\mid b$, so daß für $F^* = F' \frown F''$ gilt: $s_{F^*} \mid\geqslant a$ und $i_{F^*} \leqslant\mid b$, das heißt, $\bigcap\limits_{F \in \mathfrak{F}} (s_F - i_F) = o$. Es folgt $\bigcap\limits_{F \in \mathfrak{F} \wedge \dot{x}} s_F = \bigcup\limits_{F \in \mathfrak{F} \wedge \dot{x}} i_F = \bigcap\limits_{F \in \mathfrak{F}} s_F = \bigcup\limits_{F \in \mathfrak{F}} i_F = x$.

II.3. Beispiel eines nicht konvergenten Cauchyfilters

Die abzählbare Menge E bestehe aus den Elementen:
$x_1, x_2, x_3, \ldots$ und $y_1, y_2, y_3, \ldots$
$A \subset E$ sei die Teilmenge aller x_i.
$\mathfrak{B}$ sei die Teilmenge der Potenzmenge $\mathfrak{P}(E)$, bestehend aus
1. allen endlichen Teilmengen von E,
2. allen Komplementen endlicher Teilmengen von E.

$\mathfrak{B}$ ist eine BOOLEsche Algebra, wenn man als Operationen in $\mathfrak{B}$ die von den Mengenoperationen in $\mathfrak{P}(E)$ induzierten Operationen betrachtet. In $\mathfrak{B}$ sei eine Folge A_i gegeben:

$$A_1 = \{x_1\} \quad A_2 = \{y_1\}^c \quad A_3 = \{x_1, x_2\} \quad A_4 = \{y_1, y_2\}^c \ \ldots$$

Man betrachte den zur Folge gehörigen Elementarfilter φ. Er besitzt eine abzählbare Basis:
$\mathfrak{F}_n = \{A_n, A_{n+1}, \ldots\}$. Man sieht sofort, daß $S_n = \bigcup_{A_i \in \mathfrak{F}_n} A_i$ und $\bigcap_{A_i \in \mathfrak{F}_n} A_i = I_n$ existieren. Es gilt

$$S_n = \begin{cases} \{y_1, y_2, \ldots y_{n/2}\}^c, & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ \{y_1, y_2, \ldots y_{n+1/2}\}^c, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$I_n = \begin{cases} \{x_1, x_2, \ldots x_{n/2}\}, & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ \{x_1, x_2, \ldots x_{n+1/2}\}, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} In$ existieren nicht, das heißt, φ konvergiert nicht. Anderseits existiert

$$D_n = S_n - I_n = \begin{cases} \{x_1, \ldots x_{n/2}, y_1, \ldots y_{n/2}\}^c, & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ \{x_1, \ldots x_{n+1/2}, y_1, \ldots y_{n+1/2}\}^c, & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Es gilt $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \varnothing$, das heißt, φ ist ein Cauchyfilter.

III. Atomare BOOLEsche Algebren

III.1. Eine uniforme Struktur in atomaren BOOLEschen Algebren

Gegeben sei die atomare BOOLEsche Algebra $\mathfrak{B}$. In $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ werden die Mengen betrachtet von der Form

$$\mathfrak{B} A_1, A_2, \ldots A_n = \{(X, Y) : X \triangle Y \not\supset A_i, (i = 1, \ldots n)\},$$

wobei $A_1, \ldots A_n$ eine endliche Auswahl von Elementen von $\mathfrak{B}$ sind.

Satz. Die Gesamtheit aller oben definierten $\mathfrak{B}\ldots$ bildet auf $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$ eine Filterbasis, die in $\mathfrak{B}$ eine uniforme Struktur definiert.

Beweis. Seien $B_i \subset A_i$, dann sieht man leicht, daß $\mathfrak{B}_{A_1,\ldots} \supset \mathfrak{B}_{B_1,\ldots}$. Da $\mathfrak{B}$ atomar, genügt es, zu zeigen, daß die Mengen

$$\mathfrak{B}_{x_1,\ldots x_n} = \{(X, Y) : X \triangle Y \not\ni x_i, (i = 1, \ldots n)\},$$

wobei $x_1, x_2, \ldots x_n$ endlich viele Atome von $\mathfrak{B}$ sind, eine Filterbasis auf $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$ darstellen, welche auf $\mathfrak{B}$ eine uniforme Struktur definiert.

1. Die Diagonale von $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B} : \mathfrak{D} = \{(X, X) : X \in \mathfrak{B}\}$ liegt in allen $\mathfrak{B}_{\ldots}$. Es ist nämlich $X \triangle X = \varnothing \not\ni x$ (für alle $x \in E$).

2. $\mathfrak{B}_{x_1,x_2,\ldots x_n} \cap \mathfrak{B}_{y_1,\ldots y_m} = \mathfrak{B}_{x_1,\ldots x_n, y_1,\ldots y_m}$, wobei eventuell doppelt auftretende Indexelemente gestrichen werden können. Aus formellen Gründen setzt man: $\mathfrak{B}_{\text{leere Ind. menge}} = \mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$. Damit ist gezeigt, daß die $\mathfrak{B}_{\ldots}$ eine Filterbasis bilden. Da die $\mathfrak{B}_{\ldots}$ symmetrisch sind, ist für den Beweis, daß sie eine uniforme Struktur definieren, nur noch zu zeigen, daß zu jedem $\mathfrak{B}_{\ldots}$ ein $\mathfrak{W}_{\ldots}$ existiert, so daß $\mathfrak{W}^2_{\ldots} \subset \mathfrak{B}_{\ldots}$. Dies ist insbesondere dann bewiesen, wenn die schärfere Aussage $\mathfrak{B}^2_{\ldots} = \mathfrak{B}_{\ldots}$ gezeigt wird.

$$\mathfrak{B}^2_{x_1,\ldots x_n} = \{(X, Z) : \text{Ex } Y \text{ mit } X \triangle Y \not\ni x_i \text{ und } Y \triangle Z \not\ni x_i\}.$$

Sei jetzt

$$\begin{aligned} x_i \notin X \triangle Y &= (X - Y) \cup (Y - X) \\ &= (X - Y) \cap Z + (X - Y) \cap Z^c + (Y - X) \cap Z + (Y - X) \cap Z^c \\ &= X \cap Y^c \cap Z + X \cap Y^c \cap Z^c + X^c \cap Y \cap Z + X^c \cap Y \cap Z^c. \end{aligned}$$

Sei ferner

$$x_i \notin Y \triangle Z = X \cap Y^c \cap Z + X^c \cap Y^c \cap Z + X \cap Y \cap Z^c + X^c \cap Y^c \cap Z^c,$$

so folgt leicht, daß dann auch gilt

$$x_i \notin X \triangle Z = X \cap Y \cap Z^c + X \cap Y^c \cap Z^c + X^c \cap Y \cap Z + X^c \cap Y^c \cap Z.$$

Das heißt, aus $(X, Z) \in \mathfrak{B}^2_{x_1,\ldots x_n}$ folgt $(X, Z) \in \mathfrak{B}_{x_1,x_2,\ldots x_n}$. Es gilt also

$$\mathfrak{B}^2_{x_1,\ldots x_n} \subset \mathfrak{B}_{x_1,\ldots x_n}.$$

Anderseits zeigt man leicht, daß für jede Teilmenge $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$, welche die Diagonale enthält, gilt $\mathfrak{U}^2 \supset \mathfrak{U}$. Daraus folgt, daß

$$\mathfrak{B}^2_{x_1,\ldots x_n} = \mathfrak{B}_{X_1,\ldots x_n}.$$

Damit ist bewiesen, daß die oben definierten Nachbarschaften eine uniforme Struktur auf $\mathfrak{B}$ definieren. Diese Struktur heiße u.

Separiertheit von u: u ist separiert. Sei nämlich $X_0 \neq Y_0$, dann existiert ein Punkt $z \in X_0 \triangle Y_0$. Man betrachte $\mathfrak{V}_z = \{(X, Y) : z \notin X \triangle Y\}$, dann liegt $(X_0, Y_0) \notin \mathfrak{V}_z$. Also ist u separiert.

Cauchyfilter Φ auf $\mathfrak{B}$ sind Mengensysteme, so daß zu beliebigen, aber endlichvielen Elementen $A_1, \dots A_n$ von $\mathfrak{B}$ ein $\mathfrak{F} \in$ von Φ existiert, so daß für jedes Paar X', Y' von Elementen von $\mathfrak{F}$ gilt: $X' \triangle Y' \not\supset A_i \, (i = 1, \dots n)$.

Falls $x_i \notin X \triangle Y \, (i = 1, \dots n)$, so heißen X und Y nahe von der Ordnung $x_1, \dots x_n$.

Falls für alle Paare $X, Y \in \mathfrak{A}$ gilt: $x_i \notin X \triangle Y$, so heißt $\mathfrak{A}$ klein von der Ordnung $x_1, \dots x_n$.

III.2. Die induzierte Topologie in $\mathfrak{B}$

Die separierte uniforme Struktur u auf $\mathfrak{B}$ induziert eine separierte Topologie τ auf $\mathfrak{B}$.

Umgebungsbasis von X_0.
$$\mathfrak{V}_{x_1, \dots x_n}(X_0) = \{X : (X, X_0) \in \mathfrak{V}_{x_1, \dots x_n}\} = \{X : X \triangle X_0 \not\ni x_i \, (i = 1 \dots n)\}.$$

Die $\mathfrak{V}_{x_1, \dots x_n}(X_0)$ bilden sogar eine offene Umgebungsbasis:

Sei nämlich $Y \in \mathfrak{V}_{x_1, \dots x_n}(X_0)$, dann gilt $X_0 \triangle Y \not\ni x_i \, (i = 1, \dots n)$. Für $X \in \mathfrak{V}_{x_1, \dots x_n}(X_0)$ gilt $X_0 \triangle X \not\ni x_i \, (i = 1, \dots n)$. Es folgt sofort, daß dann $X \triangle Y \not\ni x_i \, (i = 1, \dots n)$. Das heißt $X \in \mathfrak{V}_{x_1, \dots x_n}(Y)$. Es gilt also $\mathfrak{V}_{x_1, \dots x_n}(X_0) \subset \mathfrak{V}_{x_1, \dots x_n}(Y)$.

Entsprechend wird die umgekehrte Inklusion bewiesen, woraus folgt, daß
$$\mathfrak{V}_{x_1, \dots x_n}(Y) = \mathfrak{V}_{x_1, \dots x_n}(X_0), \quad \text{wenn} \quad Y \in \mathfrak{V}_{x_1, \dots x}(X_0).$$

Damit ist gezeigt, daß die angegebene Umgebungsbasis aus offenen Mengen besteht.

Offene Mengen. Aus den obigen Überlegungen folgt sofort, daß die $\mathfrak{V}_{x_1, \dots x_n}(X)$ eine Basis der offenen Mengen von $(\mathfrak{B}, \tau)$ bilden. Eine Menge $\mathfrak{O}$ ist deshalb genau dann offen, wenn für jedes $X \in \mathfrak{O}$ $x_1, \dots x_n$ existieren, so daß aus $X \triangle X' \not\ni x_i$ folgt, daß $X' \in \mathfrak{O}$.

Konvergente Filter. $\Phi \to X_0$ genau dann, wenn zu $x_1, \dots x_n$ ein $\mathfrak{F} \in \Phi$ existiert, so daß für alle $F \in \mathfrak{F}$ gilt: $F \triangle X_0 \not\ni x_1, \dots x_n$.

Separiertheit von $\mathfrak{B}$. Folgt aus der Separiertheit von u oder direkt: Sei $X \neq Y$, dann existiert $x \in X \triangle Y$. Es muß dann $\mathfrak{V}_x(X) \frown \mathfrak{V}_x(Y) =$ leer sein, da sonst Z existieren würde mit $X \triangle Z \not\ni x$ und $Y \triangle Z \not\ni x$, woraus leicht folgt, daß $X \triangle Y \not\ni x$, entgegen der Voraussetzung.

Zusammenhang. Die Mengen $\mathfrak{B}_{x_1, \dots x_n}(F)$, wobei F eine Teilmenge von $\{x_1, \dots x_n\}$ ist, sind offen und disjunkt. Sie überdecken $\mathfrak{B}$. Daraus folgt, daß sie alle auch abgeschlossen sind.

Da $\mathfrak{B}_{x_1, \dots x_n}(X) = \mathfrak{B}_{x_1, \dots x_n}(Y)$, wenn $\{x_1, \dots x_n\} \cap X = \{x_1, \dots x_n\} \cap Y$, so folgt allgemein, daß alle $\mathfrak{B}_{x_1, \dots x_n}(X)$ offen und abgeschlossen sind.

Da zu $X \neq Y$, wie oben gezeigt, immer eine der angegebenen offenen und abgeschlossenen Umgebungen von X existiert, die Y nicht enthält, folgt, daß die Zusammenhangskomponente von X gleich $\{X\}$ ist. Der Raum $(\mathfrak{B}, \tau)$ ist also total unzusammenhängend.

Dichte Teilmenge. Die Vereinigungen von endlich vielen Atomen liegen dicht in $(\mathfrak{B}, \tau)$. Zum Beweise wähle man $X \in \mathfrak{B}$. Es ist zu zeigen, daß zu einer beliebigen Umgebung von X eine endliche Menge gehört. In jeder Umgebung liegt eine Umgebung von der Form $\mathfrak{B}_{x_1, \dots x_n}(X)$. Darin liegt die «endliche Menge» $\{x_1, \dots x_n\} \cap X$.

III.3. Mengenkonvergenz (Vgl. HAUSDORFF, Grundzüge der Mengenlehre)

Sei E eine Menge. Sei $A_i (i = 1, 2, \dots)$ eine abzählbare Folge von Teilmengen von E. Es wird definiert:

$$\lim\sup A_i = \{x : x \in \text{unendlich vielen } A_1\}$$
$$\lim\inf A_i = \{x : x \in \text{ fast allen } A_i\}$$

Falls $\lim\sup A_i = \lim\inf A_i = A$, setzt man definitionsgemäß $\lim A_i = A$, und nennt die Folge der A_i konvergent.

Man kann leicht zeigen, daß

$$\lim\sup A_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \quad \text{und} \quad \lim\inf A_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i .$$

Es liegt nahe, den Begriff der Mengenkonvergenz auf Filter auszudehnen. Es kann dann leicht gezeigt werden, daß die Mengenkonvergenz auf $\mathfrak{P}(E)$ einen Limesraum definiert:

III.4. Mengenkonvergenz und Limesräume

Sei E eine Menge. $\mathfrak{P}(E)$ ihre Potenzmenge. Ein Filter Φ auf $\mathfrak{P}(E)$ ist eine nicht leere Familie von Mengensystemen $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \dots$ mit:

1. Das leere System $\mathfrak{C} \notin \Phi$
2. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \Phi \Longrightarrow \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \in \Phi$
3. $\mathfrak{A} \gg \mathfrak{B}, \mathfrak{B} \in \Phi \Longrightarrow \mathfrak{A} \in \Phi$.

Sei jetzt Φ ein Filter auf $\mathfrak{P}(E)$. Definitionsgemäß sei dann:

$$\limsup \Phi = \bigcap_{\mathfrak{F} \in \Phi} \bigcup_{A \in \mathfrak{F}} A \quad \text{und} \quad \liminf \Phi = \bigcup_{\mathfrak{F} \in \Phi} \bigcap_{A \in \mathfrak{F}} A .$$

Falls $\limsup \Phi = \liminf \Phi = A$, so setzt man $\lim \Phi = A$.

Durch diese Definition wird jedem Element $A \in \mathfrak{P}(E)$ eine Menge σA von Filtern auf $\mathfrak{P}(E)$ zugeordnet.

Satz. Die Abbildung $A \to \sigma A$ definiert auf $\mathfrak{P}(E)$ eine Limitierung.

Beweis. a) Sei $\psi \gg \Phi$. Dann gilt allgemein

$$\limsup \psi \subset \limsup \Phi \quad \text{und}$$
$$\liminf \Phi \subset \liminf \psi .$$

Wenn speziell Φ als konvergent vorausgesetzt wird, so folgt aus den obigen Ungleichungen und aus $\liminf \Phi \subset \limsup \Phi$ (für jeden Filter): $\liminf \psi = \limsup \psi$. Also konvergiert auch ψ.

b) $\dot{A} = \{\mathfrak{A} : A \in \mathfrak{A}\}$. Dann folgt sofort, daß $\liminf \dot{A} = \limsup \dot{A} = A$.

c) Sei $\Phi \xrightarrow[\sigma]{} A_0$. und $\psi \xrightarrow[\sigma]{} A_0$. Sei $\chi = \inf(\Phi, \psi) = \{\mathfrak{F} \cup \mathfrak{G}\}_{\mathfrak{F} \in \Phi \, \mathfrak{G} \in \psi}$. Da $\chi \ll \Phi$, so ist $\limsup \chi = \bigcap_{\mathfrak{F} \in \Phi \, \mathfrak{G} \in \psi} \bigcup_{A \in \mathfrak{F} \cup \mathfrak{G}} A \supset A_0$.

Anderseits kann $\limsup \chi$ auch nicht echt größer als A_0 sein, da zu jedem $x \notin A_0$ ein $\mathfrak{F}' \in \Phi$ existiert und ein $\mathfrak{G}' \in \psi$ existiert, so daß $x \notin \bigcup_{A \in \mathfrak{F}'} A$ und $x \notin \bigcup_{A \in \mathfrak{G}'} A$. Daraus folgt, daß $x \notin \bigcup_{A \in \mathfrak{F}' \cup \mathfrak{G}'} A$. Dann gilt offenbar $x \notin \limsup \chi$. Also ist $\limsup \chi = A_0$. Entsprechend wird bewiesen, daß $\liminf \chi = A_0$, das heißt, daß $\chi \xrightarrow[\sigma]{} A_0$.

In Anwendung der Ergebnisse von 3.1. und 3.2. kann auf $\mathfrak{P}(E)$ eine uniforme Struktur u definiert werden. Sie definiert auf $\mathfrak{P}(E)$ eine Topologie τ. Wie früher gezeigt, bilden die Mengen $\mathfrak{B}_{A_1, \ldots A_n} = \{(X, Y) : X \triangle Y \not\supset A_i\}$ eine Basis des Filters der Nachbarschaften.

III.5. Vergleich mit Mengenkonvergenz

Der durch die uniforme Struktur u induzierte Konvergenzbegriff τ ist identisch mit dem auf Filter erweiterten Begriff der Mengenkonvergenz: σ.

Beweis. Im ganzen Beweis sollen vorkommende Elemente $x_1, \ldots x_n$ unterteilt werden in solche $y_1, \ldots y_s \in X_0$ und in $z_1, \ldots z_r \in X_0^c$. Dann bedeutet $x_i \notin X_0 \triangle X$ dasselbe wie $y_j \in X$, $z_k \notin X$.

a) Sei jetzt $\Phi \xrightarrow[\sigma]{} X_0$, das heißt $\bigcap_{\mathfrak{F} \in \Phi} \bigcup_{F \in \mathfrak{F}} F = \bigcup_{\mathfrak{F} \in \Phi} \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F = X_0$. Dann gilt für alle $\mathfrak{F} \in \Phi$, daß $\bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F \subset X_0 \subset \bigcup_{F \in \mathfrak{F}} F$. Seien y_j, z_k gegeben. Da $\bigcup_{\mathfrak{F} \in \Phi} (\bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F) = X_0$ ist, so existieren $\mathfrak{F}_j \in \Phi$, so daß $y_j \in \bigcap_{F \in \mathfrak{F}_j} F$.

$\mathfrak{F}_y = \bigcap\limits_{j=1}^{s} \mathfrak{F}_j$ ist dann auch Element von Φ, und es gilt offenbar, daß $y_j \in \bigcap\limits_{F \in \mathfrak{F}_y} F$, das heißt $y_j \in F$ (für alle $F \in \mathfrak{F}_y$). Analog wird gezeigt, daß $\mathfrak{F}_z$ existiert, mit $z_k \notin \bigcup\limits_{F \in \mathfrak{F}_z} F$, das heißt $z_k \notin F$ (für alle $F \in \mathfrak{F}_z$).

Sei $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}_y \cap \mathfrak{F}_z$. Dann gilt für alle $F \in \mathfrak{F}' : y_j \in F$, $z_k \notin F$. Mit den ursprünglichen Bezeichnungen: $x_i \in X_0 \triangle F$.

Es gilt also $\mathfrak{F}' \in \mathfrak{V}_{x_1, \ldots x_n}(X_0)$. Damit ist gezeigt, daß zu jeder τ-Umgebung von X_0 ein $\mathfrak{F}' \in \Phi$ existiert, das ganz in dieser Umgebung liegt. Es gilt also $\Phi \xrightarrow[\tau]{} X_x$. Es ist demnach $\sigma \gg \tau$.

b) Sei anderseits $\Phi \xrightarrow[\tau]{} X_0$. Dann existiert zu $y_1, \ldots y_s \in X_0$ und zu $z_1, \ldots z_r \notin X_0$, ein $\mathfrak{F}' \in \Phi$, so daß für alle $F \in \mathfrak{F}'$ gilt: $y_j \in \bigcap\limits_{F \in \mathfrak{F}} F$ und $z_k \notin \bigcap\limits_{F \in \mathfrak{F}'} F$; woraus leicht folgt, daß $y_j \in \bigcup\limits_{\mathfrak{F} \in \Phi} \bigcap\limits_{F \in \mathfrak{F}} F$ und $z_k \notin \bigcap\limits_{\mathfrak{F} \in \Phi} \bigcup\limits_{F \in \mathfrak{F}} F$. Also gilt $\bigcup\limits_{\mathfrak{F} \in \Phi} \bigcap\limits_{F \in \mathfrak{F}} F = $ $= \bigcap\limits_{\mathfrak{F} \in \Phi} \bigcup\limits_{F \in \mathfrak{F}} F = X_0$. Es ist demnach $\sigma \ll \tau$.

III.6. Weitere Sätze über $(\mathfrak{P}(E), u)$

Vollständigkeit. Sei Φ ein Cauchyfilter. Dann existiert zu $x_1, \ldots x_n$ ein $\mathfrak{F}'$, so daß für $X, Y \in \mathfrak{F}'$ gilt $x_1 \notin Y \triangle Y$. Dann ist auch $x_i \notin \bigcup\limits_{F \in \mathfrak{F}'} F - \bigcap\limits_{F \in \mathfrak{F}'} F$, (denn würde ein $x' \in \{x_1, \ldots x_n\}$ existieren mit $x' \in \bigcup\limits_{F \in \mathfrak{F}'} F - \bigcap\limits_{F \in \mathfrak{F}'} F$, so würde ein $F_1 \in \mathfrak{F}'$ existieren, mit $x' \in F_1$ und ein $F_2 \in \mathfrak{F}'$ existieren, mit $x' \notin F_2$; dann wäre $x' \in F_1 \triangle F_2$ entgegen Voraussetzung.)

Es gilt also $\bigcap\limits_{\mathfrak{F} \in \Phi} \left(\bigcup\limits_{F \in \mathfrak{F}} F - \bigcap\limits_{F \in \mathfrak{F}} F \right) = \varnothing$, das heißt $\limsup \Phi = \liminf \Phi$. Φ ist also konvergent. Damit wurde bewiesen, daß $(\mathfrak{P}(E), u)$ vollständig ist.

Kompaktheit. $(\mathfrak{P}(E), u)$ ist vollständig und separiert.

Für die Kompaktheit ist noch zu zeigen, daß zu jeder Nachbarschaft $\mathfrak{V}$ eine endliche Überdeckung aus Mengen existiert, die klein von der Ordnung $\mathfrak{V}$ sind. Sei $\mathfrak{V}_{x_1, \ldots x_n}$ gegeben. $\{x_1, \ldots x_n\}$ hat endlich viele Teilmengen: $\varnothing$, $\{x_1\}$, $\{x_1, x_2\}$, ... Die endlich vielen Mengen

$$\mathfrak{V}_{x_1, \ldots x_n}(\varnothing),\ \mathfrak{V} x_1, \ldots x_n^{(x_1)} \ldots \mathfrak{V}_{x_1, \ldots x_n}(x_1, \ldots x_n)$$

bilden dann eine offene Überdeckung von $\mathfrak{P}(E)$.

Lim sup und lim inf. Man könnte vermuten, die immer existierenden lim sup und lim inf seien Häufungspunkte des betrachteten Filters oder mindestens Elemente der abgeschlossenen Hülle aller Häufungspunkte. Diese Vermutung ist falsch. wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:

Sei $C = A \cup B$ und $A \cap B = \varnothing$. Sei $\Phi = \{\mathfrak{F} : A, B \in \mathfrak{F}\}$. Dann ist $\bigcup\limits_{F \in \mathfrak{F}} F \supset C$ und $\bigcap\limits_{F \in \mathfrak{F}} F = \varnothing$. Häufungspunkte gibt es aber genau A und B.

Sei $X \in \operatorname{adh} \Phi$. Dann ist für alle $\mathfrak{F} \in \Phi$ und alle $x_1, \ldots x_n$:

$$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{V}_{x_1, \ldots x_n}(X) \neq \mathfrak{L}_{\text{leer}},$$

das heißt, für alle $\mathfrak{F} \in \Phi$ und alle $x_1, \ldots x_n$ existiert ein $F \in \mathfrak{F}$, so daß aus $x_i \in X$ folgt $x_i \in F$. Daraus folgt leicht, daß $\bigcup_{F \in \mathfrak{F}} F \supset X$ und damit, daß $\limsup \Phi \supset X$ (für alle $X \in \operatorname{adh} \Phi$). Entsprechend wird gezeigt, daß $\liminf \Phi \subset X$ (für alle $X \in \operatorname{adh} \Phi$).

Sei jetzt ein $x \in E$ gegeben. mit $x \in \bigcup_{X \in \operatorname{adh} \Phi} X$. Dann zeigt man leicht, daß $\mathfrak{F}'$ existiert, so daß für alle $F \in \mathfrak{F}'$ gilt: $x \notin F$. Dann ist auch $x \notin \bigcup_{F \in \mathfrak{F}'} F$ und daraus folgt $x \notin \limsup \Phi$. Es gilt also:

$$\limsup \Phi = \sup \{X : X \in \operatorname{adh} \Phi\} \quad \text{und entsprechend}$$
$$\liminf \Phi = \inf \{X : X \in \operatorname{adh} \Phi\}.$$

III.7. Abbildungen

Die Abbildung f der Menge E in die Menge F: $f: E \to F$ induziert eine Abbildung der Potenzmengen $f_{\mathfrak{P}}$: $\mathfrak{P}(E) \to \mathfrak{P}(F)$. Es soll das inverse Bild der uniformen Struktur von $\mathfrak{P}(F)$ unter $f_{\mathfrak{P}}$ untersucht werden.

$$(f_{\mathfrak{P}} \times f_{\mathfrak{P}})^{-1} \mathfrak{V}_{z_1, \ldots z_n} = \{(A, B) : f(A) \triangle f(B) \not\ni z_i\}.$$

Diese uniforme Struktur auf $\mathfrak{P}(E)$ heiße $f^{-1}(u_F)$.

$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}(E)$ sei das System aller, bezüglich der von f induzierten Äquivalenzrelation, saturierten Mengen. Man sieht jetzt sofort, daß die Spuren von u_E und $f^{-1}(u_F)$ auf $\mathfrak{S}$ identisch sind.

Die Zuordnung $S_{S \in \mathfrak{S}} \longleftrightarrow \{A : f(A) \triangle f(B) = \varnothing\}$ induziert einen Isomorphismus der uniformen Struktur $u_{E/\mathfrak{S}}$ und der zu $f^{-1}(u_F)$ assoziierten separierten uniformen Struktur.

Falls die Äquivalenzklassen $f^{-1}(\{z\})$ nur je endlich viele Elemente von E enthalten, so existiert zu jedem $\mathfrak{V}_{z_1, \ldots z_n}$ (Nachbarschaft in $\mathfrak{P}(F)$) eine Nachbarschaft in $\mathfrak{P}(E)$:

$$\mathfrak{V} f^{-1}(z_1), \ldots f^{-1}(z_n) \subset (f_P \times f_P)^{-1} \mathfrak{V}_{z_1, \ldots z_n}.$$

Daraus folgt, daß $f_{\mathfrak{P}}$ gleichmäßig stetig ist.

III.8. Bemerkung zur Vervollständigung BOOLEscher Algebren

Im Spezialfall atomarer BOOLEscher Algebren liefert das topologische Vervollständigungsverfahren genau die triviale Einbettung in die Menge aller Atome.

IV. Durchmesser

IV.1. Durchmesser und quasiuniforme Struktur

Sei eine Abbildung d gegeben von $\mathfrak{P}(E)$ in $[o, \infty]$.

Definition. d heißt Durchmesser auf E, wenn

1. $d(\varnothing) = d(\{x\}) = o$
2. $A \subset B \Longrightarrow d(A) \leqslant d(B)$
3. zu a existiert $b(a)$ mit: aus $A \frown B \neq \varnothing$, $d(A) \leqslant b$, $d(B) \leqslant b$, folgt $d(A \smile B) \leqslant a$.

Es gibt Durchmesser. Zum Beispiel kann in einem metrischen Raume definiert werden: $d(A) = \sup\{\varrho(x, y) : x \in A,\ y \in A\}$. $b(a)$ kann dann gleich $a/2$ gewählt werden.

Jedem Durchmesser ist eine quasiuniforme $\mathcal{U}_1$-Struktur zugeordnet:

Sei $\alpha_a = \{A : d(A) \leqslant a\}$. Die α_a erfüllen die Axiome der $\mathcal{U}_1$-Strukturen:

U_1 : $\varnothing \in \alpha_a$ und $\{x\} \in \alpha_a$ für alle $a \neq o$

U_2 : $\alpha_a \frown \alpha_b = \alpha_{\inf(a,b)}$. Monotonie trivial.

$U_3^{1\prime}$: Sei α_a gegeben. Man betrachtet $b(a)$.

Sei jetzt $A \frown B \neq \varnothing$ und seien $A \in \alpha_{b(a)}$ und $B \in \alpha_{b(a)}$, dann sind $d(A) \leqslant B$ und $d(B) \leqslant b$. Also gilt $d(A \smile B) \leqslant a$, das heißt $A \smile B \in \alpha_a$.

Man sieht leicht, daß die einem Durchmesser zugeordnete quasiuniforme Struktur eine abzählbare Basis besitzt: Die $\alpha_{1/n}$(n ganz) bilden schon eine Basis des Filters Φ.

Ein Durchmesser heißt separiert, wenn aus $d(A) = o$ folgt, daß A höchstens einen Punkt enthält. Man sieht sofort, daß d genau dann separiert ist, wenn die zugehörige $\mathcal{U}_1$-Struktur separiert ist.

Der quasiuniformen Struktur u ist eine Limitierung τ zugeordnet. Wenn u von einem Durchmesser erzeugt wird, heißt τ die vom Durchmesser induzierte Limitierung.

Konvergente Filter. $\mathfrak{F} \underset{d}{\rightarrow} x$, genau dann, wenn zu jedem $a \neq o$ ein $F \in \mathfrak{F}$ existiert, so daß $d(F \smile \{x\}) \leqslant a$.

Satz. Ein $\mathcal{U}_1$-Raum besitzt genau dann eine abzählbare Basis, wenn ein Durchmesser d existiert, der u induziert.

Beweis. Es ist nur noch zu zeigen, daß zu einem $\mathcal{U}_1$-Raum mit abzählbarer Basis ein Durchmesser d gefunden werden kann, dessen zugehörige $\mathcal{U}_1$-Struktur gleich u ist.

Sei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ die abzählbare Basis von Φ. Dann hat Φ sogar eine geordnete abzählbare Basis: $\beta_1, \beta_2, \ldots$ wobei $\beta_i \supset \beta_{i+1}$.

Sei definitionsgemäß:
$d(A) = \inf\{1/k : A \in \beta_k\}$. Diese Funktion ist ein Durchmesser:

$$d(\varnothing) = d(\{x\}) = \inf\{1/k : \{x\} \in \beta_k\} = \inf\{1/k : k = 1 \ldots \infty\} = o\,.$$

Sei $A \cap B \neq \varnothing$ und sei a gegeben. Sei $d(X) \leqslant a$, das heißt $X \notin \beta_{1/a}$. Man wähle $\gamma(\beta_{1/a})$ nach $U_3^{1\prime}$. Dann sei $b(a) = \inf\{1/k : \beta_k \subset \gamma\}$. Jetzt folgt leicht aus $d(A) \leqslant b$ und $d(B) \leqslant b$, daß $d(A \cup B) \leqslant a$. Die vom Durchmesser d induzierte $\mathcal{U}_1$-Struktur ist identisch mit der Ausgangsstruktur, da die $\alpha_{1/k}$ genau den β_k entsprechen.

IV.2. Familien von Durchmessern

Sei eine Familie $d_\gamma (\gamma \in \Gamma)$ von Durchmessern gegeben. u seien die zugehörigen quasiuniformen Strukturen.

$u = \sup u_\gamma$ existiert dann immer, und soll «die von der Familie d_γ erzeugte quasiuniforme Struktur heißen».

Satz. Zu jeder $\mathcal{U}_1$-Struktur existiert eine Familie von Durchmessern, die die gegebene Struktur erzeugt.

Beweis. Zu $\alpha \in \Phi$ existiert $\alpha_1 \in \Phi$ mit:
aus $A \cap B = \varnothing$ und $A \in \alpha_1$ und $B \in \alpha_1$ folgt $A \cup B \in \alpha$. Zu diesem α_1 konstruiert man entsprechend ein α_2, usw.

Die $\alpha \supset \alpha_1 \supset \alpha_2 \supset \alpha_3 \ldots$ bilden eine Filterbasis auf $\mathfrak{P}(E)$, welche die Axiome der $\mathcal{U}_1$-Strukturen erfüllt. Die auf diese Art definierte Struktur heiße u_α. u_α besitzt nach Konstruktion eine abzählbare Basis, also existiert ein Durchmesser d_α, der u_α erzeugt. Es gilt $u_\alpha \ll u$. Man denke sich diese Konstruktion ausgeführt für alle $\alpha \in \Phi$.

Man verifiziert sofort, daß die von der Familie $d_\alpha(\alpha \in \Phi)$ erzeugte Struktur identisch mit der durch Φ bestimmten Ausgangsstruktur ist.

IV.3. Pseudodurchmesser

Sei H eine Halbordnung mit dem kleinsten Element o. d sei eine Abbildung der Potenzmenge $\mathfrak{P}(E)$ einer Menge E in H: d: $\mathfrak{P}(E) \to H$.

Definition. d heißt Pseudodurchmesser, wenn

1. $d(\varnothing) = d(\{x\}) = o$ (für alle $x \in E$)
2. zu $a \in H$ existiert $b(a) \in H$, so daß aus $A \cap B \neq \varnothing$ und $d(A) \not\geqslant b$ und $d(B) \not\geqslant b$ folgt: $d(A \cup B) \not\geqslant a$.

Jeder Durchmesser ist ein Pseudodurchmesser.

Einem Pseudodurchmesser ist eine $\mathfrak{U}_1$-Struktur zugeordnet, wenn man definiert:

$$\alpha_{a_1, \ldots a_n} = \{A : d(A) \not\geqslant a_i (i = 1, \ldots n)\}$$

Es sind die Axiome der $\mathfrak{U}_1$-Strukturen zu verifizieren:

1. $\varnothing$, $\{x\} \in \alpha_{a_1, \ldots a_n}$ für alle $x \in E$ und alle $\alpha_{a_1, \ldots a_n}$.

2. Monotonie trivial. Ferner bilden die $\alpha_{a_1, \ldots a_n}$ eine Filterbasis auf $\mathfrak{P}(E)$:

$$\alpha_{a_1, \ldots a_n} \cap \alpha_{b_1, \ldots b_m} = \alpha_{a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_m}.$$

3. Zu $\alpha_{a_1, \ldots a_n}$ existiert ein $\alpha_{b_1(a_1), \ldots b_n(a_n)}$, so daß aus $A \cap B \neq \varnothing$, $A \in \alpha_{b_1, \ldots b_n}$ und $B \in \alpha_{b_1, \ldots b_n}$ folgt, $d(A) \not\geqslant b_i$, $d(B) \not\geqslant b_i$, woraus $d(A \cup B) \not\geqslant a_i$, das heißt $A \cup B \in \alpha_{a_1, \ldots a_n}$.

Jedem Pseudodurchmesser ist also ein (quasiuniformisierbarer) Limesraum zugeordnet.

Konvergente Filter. $\mathfrak{F}$ konvergiert genau dann nach x, wenn zu endlichen vielen $a_1, \ldots a_n \in H$ ein $F \in \mathfrak{F}$ existiert, so daß $d(F \cup \{x\}) \not\geqslant a_i$ (für alle i).

Satz. Ein Limesraum ist genau dann $\mathfrak{U}_1$-quasiuniformisierbar, wenn ein Pseudodurchmesser existiert, der die gegebene Limitierung erzeugt.

Beweis. Es genügt, zu zeigen, daß zu einem $\mathfrak{U}_1$-Raum (E, u) ein Pseudodurchmesser d existiert, dessen zugeordnete $\mathfrak{U}_1$-Struktur u ist.

Sei u gegeben. Dann definiert man: $d(A) = \{\alpha : A \notin \alpha\}$. Dies ist ein Pseudodurchmesser, denn:

1. $d(\varnothing) = d(\{x\}) = \{\alpha : x \notin \alpha\} = A_{\text{leer}}$

2. Monotonie trivial. Ferner: $A \subset \Phi = \{\alpha\}$ gegeben. Dann sei $B = \{\beta(\alpha)\}$, wobei die $\beta(\alpha)$ nach Axiom U_1^3 gewählt sind.

Sei jetzt

$$A \cap B \neq \varnothing \quad \text{und} \quad d(A) \not\supset B \;\; d(B) \not\supset B\,,$$

dann existiert

$$\beta_1 \in B \quad \text{mit} \quad B \in \beta_1,$$

und

$$\beta_2 \in B \quad \text{mit} \quad A \in \beta_2\,,$$

dann existiert $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ mit $\beta \notin B$ und $A \in \beta$ und $B \in \beta$, das heißt, es existiert $\alpha \in A$ mit $A \cup B \notin \alpha$; das heißt $d(A \cup B) \notin A$.

Es ist jetzt noch zu zeigen, daß dieser Pseudodurchmesser die ursprüngliche Struktur u erzeugt:

1) $\alpha_{\{\gamma\}} = \{A : d(A) \not\supset \{\gamma\}\} = \{A : \gamma \notin d(A)\} = \{A : A \in \gamma\}$
$= \gamma$, das heißt, $\{\alpha_\psi\}_{\psi \subset \Phi} \gg \Phi$.

2) $\psi \neq A_{\text{leer}}$, das heißt, es existiert $\gamma \in \psi$.

Sei jetzt $A \in \gamma$, dann ist $\gamma \notin d(A)$, und $\gamma \in \psi$, das heißt $A \in \alpha_\psi$. Es folgt demnach $\gamma \subset \alpha_\psi$, woraus folgt $\{\alpha_\psi\} \ll \Phi$, womit der Satz bewiesen ist.

V. Pseudometrik

V.1. Pseudometrische Räume

Pseudometriken sind Spezialfälle von Pseudodurchmessern. Sei nämlich H eine Halbordnung mit dem kleinsten Element o. Sei ferner d eine Abbildung von $E \times E$ in H.

Definition. d heißt Pseudometrik auf E, wenn

1. $d(x, x) = o$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. zu $a \in H$ existiert $b \in H$, so daß für x, y, z mit $d(x, y) \ngeqslant b$ und $d(y, z) \ngeqslant b$ gilt $d(x, z) \ngeqslant a$.

In einem pseudometrischen Raum kann eine Topologie τ definiert werden: Die Mengen

$$U_{a_1, \ldots a_n}(x) = \{y : d(x, y) \ngeqslant a_i \ (i = 1, \ldots n)\}$$

bilden eine Filterbasis. Man prüft leicht nach, daß sie die Axiome der Umgebungsbasen in einem topologischen Raum erfüllen. Ein Filter $\mathfrak{F}$ konvergiert genau dann nach x, wenn zu beliebigen, aber endlich vielen $a_i \in H$ ein $F \in \mathfrak{F}$ existiert, so daß für alle $y \in F$ gilt: $d(x, y) \ngeqslant a_i$.

d heißt separierte Pseudometrik, wenn zusätzlich gilt

1'. $d(x, y) = o \Longrightarrow x = y$,

d ist offenbar genau dann separiert, wenn die zugehörige Topologie separiert ist.

Eine Pseudometrik induziert auf E eine uniforme Struktur. Seien nämlich in $E \times E$ die folgenden Mengen gegeben:

$$U_{a_1, \ldots a_n} = \{(x, y) : d(x, y) \ngeqslant a_i (i = 1, \ldots n),\ a_i \neq o\}\,.$$

Diese Mengen bilden die Basis eines Filters von Nachbarschaften einer uniformen Struktur. Beweis:

1. $d(x, x) = o \ngeqslant a$ (für alle $a \neq o$), das heißt $\Delta \subset U_{a_1, \ldots a_n}$.
2. Monotonie trivial; $U_{a_1, \ldots a_n} \cap U_{b_1, \ldots b_m} = U_{a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_m}$.
3. Seien $U_{a_1, \ldots a_n}$ gegeben. Zu a_i existieren $b_i(a_i)$, so daß aus $d(x, y) \ngeqslant b_i$ und $d(y, z) \ngeqslant b_i$ folgt: $d(x, z) \ngeqslant a_i$. Sei jetzt $(x, z) \in U^2_{b_1, \ldots b_n} = \{(x, z) : \exists\, y$ mit $d(x, y) \ngeqslant b_i$ und $d(y, z) \ngeqslant b_i\}$. Daraus folgt sofort, daß $d(x, z) \ngeqslant a_i$, das heißt $(x, z) \in U_{a_1, \ldots a_n}$. Es gilt also $U_{a_1, \ldots a_n} \supset U^2_{b_1, \ldots b_n}$.

Die von der uniformen Struktur induzierte Topologie ist offenbar identisch mit der von der Pseudometrik induzierten Topologie τ. Die induzierte uniforme Struktur ist genau dann separiert, wenn die Pseudometrik separiert ist.

Im Spezialfall, wo H atomar ist, existieren zu $a_1, \ldots a_n \in H$ Atome $p_1, \ldots p_n$ mit $a_i \geqslant p_i$. Dann gilt $U_{a_1, \ldots a_n} \supset U_{p_1, \ldots p_n}$. Demnach bilden die $U_{p_1, \ldots p_n}$, wobei die p endlich viele Atome aus H sind, eine Basis des Filters der Nachbarschaften. Zu p_i existieren aber $q_i(p_i)$, so daß aus $d(x, y) \,|\!\geqslant q_i$ und $d(y, z) \,|\!\geqslant q_i$ folgt $d(x, z) \,|\!\geqslant p_i$. Da die p_i Atome sind, folgt $p_i = q_i$, das heißt $U^2{}_{p_1, \dots p_n} = U_{p_1, \dots p_n}$.

V.2. Pseudometrische und uniforme Räume

Satz. Ein topologischer Raum ist genau dann uniformisierbar, wenn er pseudometrisierbar ist.

Beweis. Der gegebene topologische Raum heiße (E, τ). Es muß nur noch gezeigt werden, daß zu einem uniformen Raum (E, u) eine Pseudometrik $\mathfrak{D}$ angegeben werden kann, so daß die von ihr induzierte uniforme Struktur gleich u ist.

Sei (E, u) gegeben. Der Filter der Nachbarschaften auf $E \times E$ heiße $\mathfrak{U}$. $\mathfrak{D}$... usw., seien die Elemente von $\mathfrak{P}(\mathfrak{U})$, insbesondere sei $\mathfrak{C}$ die leere Teilmenge von $\mathfrak{P}(\mathfrak{U})$.

Es wird definiert: $\mathfrak{D}(x, y) = \{V: (x, y) \notin V,\ \text{wobei}\ V \in \mathfrak{U}\}$. Zuerst wird gezeigt, daß $\mathfrak{D}(x, y)$ eine Pseudometrik auf E ist: $\mathfrak{D}$ sind die Elemente einer Halbordnung H, wenn man definiert, $\mathfrak{D}_1 \gg \mathfrak{D}_2$ genau dann, wenn $\mathfrak{D}_1 \supset \mathfrak{D}_2$.

$$\mathfrak{D}(x, x) = \{V: (x, x) \notin V\} = \mathfrak{C}$$
$$\mathfrak{D}(x, y) = \mathfrak{D}(y, x) .$$

Sei $\mathfrak{A}$ gegeben; dazu existiert $\mathfrak{B} = \{W\colon \text{existiert}\ V \in \mathfrak{A}\ \text{mit}\ W^2 \subset V\}$. Sei $\mathfrak{D}(x, y) \,|\!\geqslant \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}(y, z) \,|\!\geqslant \mathfrak{B}$, dann existiert $W \in \mathfrak{B}$ mit $W \notin \mathfrak{D}(x, y)$ und $W \notin \mathfrak{D}(y, z)$. Also ist $(x, y) \in W$ und $(y, z) \in W$. Daraus folgt, daß $(x, z) \in W^2$. Das heißt, es existiert $\underline{V \in \mathfrak{A}}$ mit $(x, z) \in V$, woraus folgt $\underline{V \notin \mathfrak{D}(x, z)}$. Also ist $(x, y) \in \{(x, y)\colon \mathfrak{D}(x, y) \,|\!\geqslant \mathfrak{A}\}$, das heißt $\mathfrak{D}(x, y) \,|\!\geqslant \mathfrak{A}$. $\mathfrak{D}$ ist demnach eine Pseudometrik.

Es ist jetzt noch zu zeigen, daß die von der Pseudometrik induzierte uniforme Struktur gleich u ist. Die induzierte Struktur v besitzt eine Basis von Nachbarschaften:

$$V_{\mathfrak{A}_i} = \{(x, y)\colon \mathfrak{D}(x, y) \,|\!\geqslant \mathfrak{A}_i\} = \{(x, y)\colon \text{es existieren}\ U_i \in \mathfrak{A}_i\ \text{und}\ U_i \notin \mathfrak{D}(x, y)\} .$$

Um zu zeigen, daß $u = v$, wird bewiesen:

1. *Jedes* $W \in \mathfrak{U}$ *ist ein* $V_{\mathfrak{A}}$.

$$V_{\{W\}} = \{(x, y)\colon \mathfrak{D}(x, y) \,|\!\geqslant \{W\}\} = \{(x, y)\colon W \notin \mathfrak{D}(x, y)\} = \{(x, y)\colon (x, y) \in W\} = W .$$

Es gilt also $\{V_{\mathfrak{A}}\} \gg \mathfrak{U}$.

2. *In jedem* $V_{\mathfrak{A}}$ *liegt ein* W.

Sei $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{C}$, das heißt, es existiert ein $W \in \mathfrak{A}$. Dann ist $W \subset V_{\mathfrak{A}}$, da aus $(x, y) \in W$ folgt: $W \notin \mathfrak{D}(x, y)$ und $W \in \mathfrak{A}$, was bedeutet, daß $(x, y) \in V_{\mathfrak{A}}$. Es ist also $\{V_{\mathfrak{A}}\} \ll \mathfrak{U}$.
Damit ist gezeigt, daß jeder uniforme Raum pseudometrisierbar ist.

Bemerkung. Dieselben Überlegungen lassen sich durchführen, wenn man sich auf eine Basis des Nachbarschaftsfilters und deren Potenzmenge beschränkt.

Beispiel. Pseudometrik in der Potenzmenge einer Menge

$$\Delta(A, B) = \{\mathfrak{V}_{x_1, \dots x_n} : (A, B) \in \mathfrak{V}_{x_1, \dots x_n}\} =$$
$$= \{\mathfrak{V}_{x_1, \dots x_n} : x_i \in A \triangle B\}.$$

In diesem Fall kann diese Pseudometrik durch äquivalente ersetzt werden. Zum Beispiel wird durch die Zuordnung
$\mathfrak{V}_{x_1, \dots x_n} \longleftrightarrow \{x_1, \dots x_n\}$ die neue Distanz
$\mathfrak{D}(A, B) = (F : F \subset A \triangle B$, wobei F endlich$\}$ gefunden.
Man verifiziert leicht, daß $\mathfrak{D}$ wieder die ursprüngliche uniforme Struktur in $\mathfrak{P}(E)$ induziert, da für $F = \{x_1, \dots x_n\}$ die Nachbarschaften
$\mathfrak{V}_{\{F\}} = \{(A, B) : \mathfrak{D}(A, B) \not\ni F\} = \{(A, B) : F \not\subset A \triangle B\}$ genau den frühern $\mathfrak{V}_{x_1, \dots x_n}$ entsprechen.
Analog kann $D(A, B) = A \triangle B$ als Distanz in $\mathfrak{P}(E)$ eingeführt werden.

(Eingegangen den 23. Januar 1963)