

# Fonctions d'ensemble et intégration.

Autor(en): **Cairolì, R.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **39 (1964-1965)**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-29874>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Fonctions d'ensemble et intégration

par R. CAIROLI, Zurich

**Introduction :** Le présent travail a pour but, premièrement, d'étudier une possibilité d'associer une intégrale à une intégrale supérieure où à une fonction numérique d'ensemble, non négative, définie sur la classe des sous-ensembles d'un ensemble donné  $S$ ; deuxièmement, d'établir le rapport qui existe entre l'intégrale obtenue et le théorie connue de la mesure et de l'intégration. La mesure associée à la fonction d'ensemble sera réalisée à l'aide d'une intégrale supérieure et d'une condition de mesurabilité, celle-ci présentant une analogie évidente avec la condition de mesurabilité de CARATHÉODORY dans la théorie de la mesure extérieure. En effet les ensembles  $\mu^*$ -mesurables sont définis comme les ensembles qui coupent tous les autres ensembles de manière additive par rapport à la mesure extérieure  $\mu^*$ . Ici on dira qu'une fonction est mesurable si ses parties positive et négative coupent toute fonction positive de manière additive par rapport à l'intégrale supérieure (la définition exacte sera donnée au paragraphe 4).

A l'aide de cette notion de mesurabilité nous pourrons ensuite transposer dans la théorie de l'intégrale supérieure quelques notions de la théorie de la mesure extérieure, comme, par exemple, les notions d'intégrale induite et d'intégrale supérieure régulière.

Dans l'étude des rapports avec la théorie de la mesure nous supposerons que la constante 1 soit mesurable. Cette hypothèse est toutefois nécessaire parce que l'ensemble donné  $S$  est  $\mu^*$ -mesurable.

Sous l'hypothèse que l'intégrale supérieure satisfasse à une condition analogue à la notion  $\sigma$ -fini dans la théorie de la mesure, il nous sera aussi possible d'étudier le rapport entre les fonctions mesurables et l'enveloppe de BAIRE de l'espace vectoriel engendré par les fonctions caractéristiques des ensembles  $\mu^*$ -mesurables. Nous introduirons parallèlement la notion d'intégrale supérieure  $\sigma$ -finie.

Sur maintes questions, les trois articles de H. M. STONE « *Notes on Integration*, I, II et III » [4] nous ont fourni une source précieuse de renseignements. L'idée de définir une intégrale supérieure à l'aide d'une fonction positive d'ensemble  $a$ , par exemple, ces articles pour origine. Nous ferons constamment emploi des notations  $f^+ = \sup(f, 0)$ ,  $f^- = \sup(-f, 0)$ ,  $\implies$  (implication) et de la définition  $0 \cdot \infty = 0$ .

J'ai le plaisir d'exprimer ma plus vive gratitude à M. le Prof. Dr. A. PFLUGER, qui a suivi mon travail, pour ses précieux conseils.

**1. Définition d'une intégrale supérieure à partir d'une fonction numérique d'ensemble:** Soit  $S$  un ensemble quelconque non vide. Supposons donnée une fonction numérique d'ensemble  $\psi$  (finie ou non), non négative, définie sur la classe de tous les sous-ensembles de  $S$ . Désignons par  $\mathfrak{F}$  la classe de toutes les fonctions numériques (finies ou non) définies sur  $S$  et par  $\mathfrak{F}^+$  celle des fonctions non négatives. Si  $f$  appartient à  $\mathfrak{F}^+$ , on appellera *intégrale supérieure de  $f$  par rapport à  $\psi$*  le nombre

$$j(f) = \inf \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \psi(E_{\nu}) \mid f \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \varphi_{E_{\nu}}, a_{\nu} \geq 0 \right\} \quad (1,1)$$

où  $\varphi_{E_{\nu}}$  désigne la fonction caractéristique de l'ensemble  $E_{\nu} \subset S$ , c'est-à-dire:

$$\varphi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \in S - E. \end{cases}$$

Comme les termes des séries apparaissant dans la définition (1,1) sont positifs, les sommes existeront toujours, parce qu'on admettra  $\infty$  comme valeur possible de ces sommes. Remarquons aussi que toute fonction  $f \in \mathfrak{F}^+$  est majorée par au moins une série du type de celles qui apparaissent dans (1,1), ne serait-ce que par  $\infty \cdot \varphi_S + 0 + 0 + \dots$

**2. Propriétés de l'intégrale supérieure:** La fonction  $j$  qu'on vient d'introduire vérifie les propriétés ordinaires d'une intégrale supérieure.

**Propriété 2.1:** Pour toute fonction  $f \in \mathfrak{F}^+$  on a  $0 \leq j(f) \leq \infty$ .

**Propriété 2.2:**  $j(\varphi_E) \leq \psi(E)$ ,  $E \subset S$ .

Ces deux propriétés sont évidentes.

**Propriété 2.3:**  $j(\lambda f) = \lambda j(f)$ ,  $f \in \mathfrak{F}^+$ ,  $\lambda \geq 0$ .

Le cas  $\lambda = 0$  est évident. Supposons donc  $\lambda > 0$ . Si  $j(f)$  est fini, il existe, pour tout  $\varepsilon > 0$ , une série  $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \varphi_{E_{\nu}} \geq f$  telle que  $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \psi(E_{\nu}) \leq j(f) + \varepsilon$ . Or, comme  $\lambda f \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda a_{\nu} \varphi_{E_{\nu}}$ , on aura:  $j(\lambda f) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda a_{\nu} \psi(E_{\nu}) \leq \lambda(j(f) + \varepsilon)$ . On en déduit, comme  $\varepsilon$  est arbitraire, que  $j(\lambda f) \leq \lambda j(f)$ . Evidemment, cette inégalité reste aussi vraie dans le cas où  $j(f) = \infty$ . D'autre part, en posant  $g = \lambda f$ ,  $\mu = \frac{1}{\lambda}$  on aura  $j(\mu g) \leq \mu j(g)$ , c'est-à-dire  $\lambda j(f) \leq j(\lambda f)$ , ce qui achève la démonstration.

**Propriété 2.4:**  $f \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{\nu}$ ,  $f, f_{\nu} \in \mathfrak{F}^+ \implies j(f) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} j(f_{\nu})$ .

La propriété est évidente si, pour un indice  $\nu$  quelconque,  $j(f_{\nu}) = \infty$ . On

suppose donc  $j(f_\nu) < \infty$  pour tout indice. Dans ce cas, il existe, pour tout  $\nu$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , une série  $\sum_{r=1}^{\infty} a_r^\nu \varphi_{E_r^\nu}$  majorant  $f_\nu$ , telle que  $\sum_{r=1}^{\infty} a_r^\nu \psi(E_r^\nu) \leq j(f_\nu) + \frac{\varepsilon}{2^\nu}$ .

Puisque  $f \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} a_r^\nu \varphi_{E_r^\nu}$ , on a :

$$j(f) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} a_r^\nu \psi(E_r^\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( j(f_\nu) + \frac{\varepsilon}{2^\nu} \right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} j(f_\nu) + \varepsilon.$$

Le nombre  $\varepsilon$  étant arbitraire, on en déduit l'inégalité à démontrer.

Comme cas particuliers, on a les deux corollaires suivants :

$$f_1 \leq f_2, \quad f_1, f_2 \in \mathfrak{F}^+ \implies j(f_1) \leq j(f_2). \quad (1)$$

$$j(f_1 + f_2) \leq j(f_1) + j(f_2). \quad (2)$$

*Remarque:* Les propriétés 1, 3 et 4 restent aussi vraies si, dans la définition (1,1),  $\psi$  est une fonction numérique d'ensemble, non négative, définie dans une sous-classe  $\mathfrak{C}$  de la classe de tous les sous-ensembles de  $S$ . Dans ce cas, il faudra alors définir  $j(f) = \infty$ , si  $f$  n'est pas majorée par une série du type

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \varphi_{E_\nu}, \quad a_\nu \geq 0, \quad E_\nu \in \mathfrak{C}.$$

### 3. Quelques propositions concernant des propriétés vraies presque partout :

On utilisera l'abréviation p. p. (presque partout) pour affirmer qu'une certaine propriété est vraie pour tout  $x \in S$  n'appartenant pas à un ensemble  $E \subset S$  tel que  $j(\varphi_E) = 0$ .

Dans ce paragraphe, comme précédemment, on désignera par  $f$  une fonction numérique appartenant à  $\mathfrak{F}^+$ .

**Proposition 3.1 :**  $f(x) = 0$  p. p.  $\iff j(f) = 0$ .

**Proposition 3.2 :**  $f_1(x) = f_2(x)$  p. p.  $\implies j(f_1) = j(f_2)$ .

**Proposition 3.3 :**  $j(f) < \infty \implies f(x) < \infty$  p. p.

Ces assertions résultent facilement des propriétés 2.3 et 2.4, en utilisant les méthodes usuelles de la théorie de l'intégration.

Désignons par  $E$  l'ensemble  $\{x \mid x \in S, f(x) \neq 0\}$ . La condition  $\psi(E) = 0$  entraîne alors, d'après la propriété 2.2,  $j(\varphi_E) = 0$ . D'où, comme corollaire, la proposition suivante :

**Proposition 3.4 :** a)  $\psi(\{x \mid x \in S, f(x) \neq 0\}) = 0 \implies j(f) = 0$ .

b)  $\psi(\{x \mid x \in S, f_1(x) \neq f_2(x)\}) = 0 \implies j(f_1) = j(f_2)$ .

**4. Fonctions mesurables:** D'habitude l'intégrale supérieure et les fonctions intégrables sont obtenues comme prolongement d'une intégrale élémentaire, c'est-à-dire d'une mesure préalablement donnée. Ici, l'intégrale supérieure a été obtenue sans mesure donnée d'avance, mais à l'aide d'une fonction numérique d'ensemble positive, non nécessairement additive. Le problème que nous aborderons sera donc de définir une mesure à l'aide d'une condition définissant les fonctions qu'on appellera mesurables. La condition que nous proposons ici nous semble appropriée parce qu'elle nous permettra d'établir assez aisément toutes les propriétés usuelles d'une intégrale.

En utilisant, comme d'habitude, les deux notations  $f \vee g = \sup(f, g)$  et  $f \wedge g = \inf(f, g)$ , nous pourrons écrire, pour tout couple  $f, g$  de fonctions appartenant à  $\mathfrak{F}^+$ :  $j(f) \leq j(f \wedge g) + j[(f - g)^+]$ ; car, ceci est une conséquence immédiate de l'égalité  $f = (f \wedge g) + (f - g)^+$  et de la propriété 2.4 (2) (on suppose que  $g$  soit finie).

*Nous dirons qu'une fonction finie  $g \in \mathfrak{F}^+$  est mesurable, si l'égalité*

$$j(f) = j(f \wedge g) + j[(f - g)^+] \quad (4,1)$$

*est satisfaite pour toute fonction  $f \in \mathfrak{F}^+$ .*

Nous désignerons la classe de ces fonctions par  $\mathfrak{M}^+$ . Elle ne sera pas vide, car elle contiendra au moins la fonction  $g = 0$ .

Remarquons que pour démontrer l'appartenance d'une fonction non négative à  $\mathfrak{M}^+$ , il suffira de démontrer que la condition (4,1) soit satisfaite pour toute fonction  $f \in \mathfrak{F}^+$  telle que  $j(f) < \infty$ , car, si  $j(f) = \infty$ , l'égalité résulte de la propriété 2.4 (2). Ainsi, dans les démonstrations des propriétés suivantes, nous supposerons toujours  $j(f) < \infty$ .

**Propriété 4.1:**  $g \in \mathfrak{M}^+, \lambda \geq 0 \implies \lambda g \in \mathfrak{M}^+$ .

Le cas  $\lambda = 0$  est évident. Supposons alors  $\lambda > 0$ . Comme  $g$  appartient à  $\mathfrak{M}^+$ , on aura:  $j\left(\frac{f}{\lambda}\right) = j\left(\frac{f}{\lambda} \wedge g\right) + j\left[\left(\frac{f}{\lambda} - g\right)^+\right]$ , ou bien  $\frac{1}{\lambda} j(f) = \frac{1}{\lambda} j(f \wedge \lambda g) + \frac{1}{\lambda} j[(f - \lambda g)^+]$ , c'est-à-dire  $j(f) = j(f \wedge \lambda g) + j[(f - \lambda g)^+]$  pour toute fonction  $f \in \mathfrak{F}^+$ , ce qui achève la démonstration.

**Propriété 4.2:**  $g_1, g_2 \in \mathfrak{M}^+ \implies g_1 + g_2 \in \mathfrak{M}^+$ .

De l'égalité  $f \wedge (g_1 + g_2) = (f \wedge g_1) + [(f - g_1)^+ \wedge g_2]$  on déduit:  $j[f \wedge (g_1 + g_2)] \leq j(f \wedge g_1) + j[(f - g_1)^+ \wedge g_2]$ . D'où, comme le dernier terme est fini:  $j(f \wedge g_1) \geq j[f \wedge (g_1 + g_2)] - j[(f - g_1)^+ \wedge g_2]$  <sup>(1)</sup>. On a d'autre part:  $j(f) = j(f \wedge g_1) + j[(f - g_1)^+]$  <sup>(2)</sup>. De <sup>(1)</sup> et <sup>(2)</sup> on déduit l'inégalité  $j(f) \geq j[f \wedge (g_1 + g_2)] + j[(f - g_1)^+] - j[(f - g_1)^+ \wedge g_2]$  <sup>(3)</sup>. Par hypothèse, on a aussi la relation suivante:  $j[(f - g_1)^+] = j[(f - g_1)^+ \wedge g_2] + j[(f - g_1)^+ - g_2]^+$ .

En remplaçant dans <sup>(3)</sup> et en tenant compte de l'égalité  $[(f - g_1)^+ - g_2]^+ = [f - (g_1 + g_2)]^+$ , on obtient:  $j(f) \geq j[f \wedge (g_1 + g_2)] + j[[f - (g_1 + g_2)]^+]$ . L'inégalité opposée étant aussi vraie, la démonstration est achevée.

**Propriété 4.3:**  $g_1, g_2 \in \mathfrak{M}^+ \implies g_1 \wedge g_2 \in \mathfrak{M}^+$ .

On a par hypothèse:  $j(f \wedge g_1) = j[(f \wedge g_1) \wedge g_2] + j[(f \wedge g_1) - g_2]^+$  et  $j(f) = j(f \wedge g_1) + j[(f - g_1)^+]$ . D'où:  $j(f) = j[(f \wedge g_1) \wedge g_2] + j[(f \wedge g_1) - g_2]^+ + j[(f - g_1)^+]$  <sup>(4)</sup>. De l'égalité  $[f - (g_1 \wedge g_2)]^+ = [(f \wedge g_1) - g_2]^+ + (f - g_1)^+$  on déduit aussi, comme l'intégrale supérieure du dernier terme est finie:  $j[(f \wedge g_1) - g_2]^+ \geq j[[f - (g_1 \wedge g_2)]^+] - j[(f - g_1)^+]$ . En remplaçant dans <sup>(4)</sup> on obtient:  $j(f) \geq j[f \wedge (g_1 \wedge g_2)] + j[[f - (g_1 \wedge g_2)]^+]$ , ce qui achève la démonstration.

**Propriété 4.4:**  $g_1, g_2 \in \mathfrak{M}^+, g_1 \geq g_2, j(g_2) < \infty \implies g_1 - g_2 \in \mathfrak{M}^+$ .

Il suffira de démontrer l'inégalité  $j(f) \geq j[f \wedge (g_1 - g_2)] + j[[f - (g_1 - g_2)]^+]$ , qui, d'après l'hypothèse  $j(f + g_2) = j[(f + g_2) \wedge g_1] + j[(f + g_2) - g_1]^+$ , pourra être écrite aussi sous la forme équivalente suivante:  $j(f) + j[(f + g_2) \wedge g_1] \geq j[f \wedge (g_1 - g_2)] + j[[f - (g_1 - g_2)]^+] + j[(f + g_2) \wedge g_1] = j(f + g_2) + j[f \wedge (g_1 - g_2)]$ . Comme  $g_2 \in \mathfrak{M}^+$ , on aura:  $j[(f + g_2) \wedge g_1] = j[(f + g_2) \wedge g_1 \wedge g_2] + j[((f + g_2) \wedge g_1) - g_2]^+$ ; ce qui donne, si on tient compte des égalités  $g_2 = (f + g_2) \wedge g_1 \wedge g_2$  et

$$f \wedge (g_1 - g_2) = [(f + g_2) \wedge g_1] - g_2: j[(f + g_2) \wedge g_1] = j(g_2) + j[f \wedge (g_1 - g_2)].$$

D'où:  $j(f) + j[(f + g_2) \wedge g_1] = j(f) + j(g_2) + j[f \wedge (g_1 - g_2)] \geq j(f + g_2) + j[f \wedge (g_1 - g_2)]$ , ce qui achève la démonstration.

Nous dirons qu'une fonction finie  $g \in \mathfrak{F}$  est mesurable si ses parties positive  $g^+$  et négative  $g^-$  appartiennent à  $\mathfrak{M}^+$ . Nous désignerons la classe de ces fonctions par  $\mathfrak{M}$ .

**Proposition 4.1:**  $\mathfrak{M}$  a les propriétés suivantes:

$$g \in \mathfrak{M}, \alpha \text{ nombre réel} \implies \alpha g \in \mathfrak{M}. \quad (1)$$

$$g_1, g_2 \in \mathfrak{M}, j(|g_1|) \text{ et } j(|g_2|) < \infty \implies g_1 + g_2, g_1 \vee g_2, g_1 \wedge g_2 \in \mathfrak{M}. \quad (2)$$

L'assertion (1) est évidente. En outre  $(g_1 + g_2)^+ = (g_1^+ + g_2^+) - [(g_1^+ + g_2^+) \wedge (g_1^- + g_2^-)] \geq 0$  appartiendra à  $\mathfrak{M}^+$ , en vertu des propriétés 4.2, 4.3, 4.4 et du fait que l'intégrale supérieure du dernier terme de la différence est fini. La fonction  $(g_1 + g_2)^-$ , comme partie positive de  $[(-g_1) + (-g_2)]$ , appartiendra aussi à  $\mathfrak{M}^+$ . Donc  $g_1 + g_2 \in \mathfrak{M}$ . En utilisant les deux égalités  $g_1 \vee g_2 = g_1 + (g_2 - g_1)^+$ ,  $g_1 \wedge g_2 = g_2 - (g_2 - g_1)^+$ , on voit aisément que les fonctions  $g_1 \vee g_2$  et  $g_1 \wedge g_2$  appartiennent aussi à  $\mathfrak{M}$ .

Pour démontrer la proposition suivante, nous aurons besoin du

**Lemme 4.1:** *Soit  $\{g_n\}$  une suite non décroissante de fonctions mesurables non négatives et  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ . On aura alors:  $\lim_{n \rightarrow \infty} j(f \wedge g_n) = j(f \wedge g)$  pour toute fonction non négative  $f$  et, en particulier,  $\lim_{n \rightarrow \infty} j(g_n) = j(g)$ .*

La suite  $f \wedge g_n$  est non décroissante et  $f \wedge g = \lim_{n \rightarrow \infty} f \wedge g_n$ . Supposons d'abord  $j(f \wedge g_n) < \infty$  pour tout indice  $n$ . On aura alors:  $f \wedge g = \sum_{v=1}^{\infty} [(f \wedge g_v) - (f \wedge g_{v-1})]$ , où  $g_0 = 0$ . D'où:  $j(f \wedge g) \leq \sum_{v=1}^{\infty} j[(f \wedge g_v) - (f \wedge g_{v-1})]$ . En outre, en vertu de la mesurabilité de  $g_{v-1}$ , on pourra écrire:  $j(f \wedge g_v) = j[(f \wedge g_v) \wedge g_{v-1}] + j[((f \wedge g_v) - g_{v-1})^+]$ . En tenant compte des égalités  $(f \wedge g_v) \wedge g_{v-1} = f \wedge g_{v-1}$  et  $[(f \wedge g_v) - g_{v-1}]^+ = [(f \wedge g_v) - (f \wedge g_{v-1})]$ , on en déduit:  $j(f \wedge g_v) = j(f \wedge g_{v-1}) + j[(f \wedge g_v) - (f \wedge g_{v-1})]$ . Donc, comme  $j(f \wedge g_{v-1}) < \infty$ :  $j(f \wedge g_v) - j(f \wedge g_{v-1}) = j[(f \wedge g_v) - (f \wedge g_{v-1})]$ . Il s'ensuit:  $j(f \wedge g) \leq \sum_{v=1}^{\infty} j[(f \wedge g_v) - (f \wedge g_{v-1})] = \sum_{v=1}^{\infty} [j(f \wedge g_v) - j(f \wedge g_{v-1})] = \lim_{n \rightarrow \infty} j(f \wedge g_n)$ . D'autre part, en vertu de la propriété 2.4 (1),  $\lim_{n \rightarrow \infty} j(f \wedge g_n) \leq j(f \wedge g)$ . On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} j(f \wedge g_n) = j(f \wedge g)$ . Dans le cas où, à partir d'un certain indice  $n$ ,  $j(f \wedge g_n) = \infty$ , le lemme est évident.

**Proposition 4.2:** *Si la fonction finie  $g$  est limite d'une suite non décroissante  $\{g_n\}$  de fonctions mesurables non négatives, elle sera aussi une fonction mesurable.*

Pour toute fonction  $f \in \mathfrak{F}^+$  et tout indice  $n$ , on a, par hypothèse:  $j(f) = j(f \wedge g_n) + j[(f - g_n)^+]$ , donc, en vertu du lemme 4.1,  $j(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} j(f \wedge g_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} j[(f - g_n)^+] = j(f \wedge g) + \lim_{n \rightarrow \infty} j[(f - g_n)^+] \geq j(f \wedge g) + j[(f - g)^+]$ , car la suite  $\{j[(f - g_n)^+]\}$  est non croissante et par conséquent  $j[(f - g_n)^+] \geq j[(f - g)^+]$  pour tout indice  $n$ . D'autre part:  $j(f) \leq j(f \wedge g) + j[(f - g)^+]$ , ce qui achève la démonstration.

**Proposition 4.3:** *Si la fonction finie  $g$  est limite d'une suite monotone  $\{g_n\}$  de fonctions mesurables telle que  $j(|g_n|) < \infty$  pour tout  $n$ , alors  $g$  sera aussi une fonction mesurable.*

Supposons d'abord que la suite  $\{g_n\}$  soit non décroissante. On aura  $g_n^+ \uparrow g^+$  et  $g_n^- \downarrow g^-$ . La fonction  $g^+$  sera alors, d'après la proposition 4.2, mesurable.

Démontrons que  $g^-$  est aussi mesurable: les fonctions  $(g_1^- - g_n^-)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sont, en vertu de la propriété 4.4, mesurables;  $g_1^- - g^-$ , comme limite de la suite non décroissante  $\{g_1^- - g_n^-\}$ , l'est aussi;  $g^- = g_1^- - (g_1^- - g^-)$  appartient alors

à  $\mathfrak{M}^+$ . Donc  $g$  est mesurable. Si la suite est non croissante, on considère la suite  $\{-g_n\}$ .

Ces propriétés établies, qui d'ailleurs ne sont pas exactement toutes les propriétés ordinaires d'une classe de fonctions mesurables, il nous sera maintenant aisé d'introduire l'espace des fonctions intégrables.

**5. Fonctions intégrables:** Nous désignerons par  $\mathfrak{L}$  la classe des fonctions  $g \in \mathfrak{M}$  telles que  $j(|g|) < \infty$ .

**Proposition 5.1:**  $\mathfrak{L}$  est un espace vectoriel réticulé, c'est-à-dire:

$$g \in \mathfrak{L}, \alpha \text{ nombre réel} \implies \alpha g \in \mathfrak{L}. \quad (1)$$

$$g_1, g_2 \in \mathfrak{L} \implies g_1 + g_2, g_1 \vee g_2, g_1 \wedge g_2 \in \mathfrak{L}. \quad (2)$$

L'assertion (1) est évidente. Il est aussi évident, d'après les propriétés de la classe  $\mathfrak{M}$ , que  $g_1 + g_2$  appartient à  $\mathfrak{L}$ . Démontrons, par exemple, qu'il en sera de même de  $g_1 \wedge g_2$ . A cet effet, il suffit de prouver que  $j(|g_1 \wedge g_2|)$  est fini. Mais ceci résulte de l'inégalité  $j(|g_1 \wedge g_2|) \leq j[(g_1 \wedge g_2)^+] + j[(g_1 \wedge g_2)^-]$ , puisque les deux termes du membre de droite sont finis, étant majorés par  $j(g_1^+)$  resp.  $j(g_1^- + g_2^-)$ , finis par hypothèse.

Nous dirons qu'une fonction  $g$  est intégrable si elle appartient à  $\mathfrak{L}$  et on appellera *intégrale de  $g$  par rapport à  $\psi$*  le nombre

$$i(g) = j(g^+) - j(g^-).$$

La fonction  $i$  vérifie les propriétés ordinaires d'une intégrale:

**Propriété 5.1:**  $g \in \mathfrak{L}, g \geq 0 \implies i(g) = j(g) \geq 0$ .

**Propriété 5.2:**  $g_1, g_2 \in \mathfrak{L} \implies i(g_1 + g_2) = i(g_1) + i(g_2)$ .

Remarquons d'abord que si  $h \in \mathfrak{M}^+$  et  $f \in \mathfrak{F}^+$ , alors  $j(h+f) = j[(h+f) \wedge h] + j[(h+f-h)^+] = j(h) + j(f)$ . Ceci établi, on aura, en vertu des égalités  $(g_1 + g_2)^+ + [(g_1^+ + g_2^+) \wedge (g_1^- + g_2^-)] = g_1^+ + g_2^+$  et  $(g_1 + g_2)^- + [(g_1^+ + g_2^+) \wedge (g_1^- + g_2^-)] = g_1^- + g_2^-$ :  $j[(g_1 + g_2)^+] + j[(g_1^+ + g_2^+) \wedge (g_1^- + g_2^-)] = j(g_1^+) + j(g_2^+)$  et  $j[(g_1 + g_2)^-] + j[(g_1^+ + g_2^+) \wedge (g_1^- + g_2^-)] = j(g_1^-) + j(g_2^-)$ . En soustrayant la deuxième égalité de la première, on obtient:  $j[(g_1 + g_2)^+] - j[(g_1 + g_2)^-] = [j(g_1^+) - j(g_1^-)] + [j(g_2^+) - j(g_2^-)]$ , c'est-à-dire  $i(g_1 + g_2) = i(g_1) + i(g_2)$ .

**Propriété 5.3:**  $g \in \mathfrak{L}, \alpha \text{ nombre réel} \implies i(\alpha g) = \alpha i(g)$ .

En effet, si  $\alpha \geq 0$  on a  $i(\alpha g) = j(\alpha g^+) - j(\alpha g^-) = \alpha [j(g^+) - j(g^-)] = \alpha i(g)$ . Si  $\alpha < 0$ :  $i(\alpha g) = i[(-\alpha)(-g)] = (-\alpha)i(-g) = (-\alpha)[j[(-g)^+] - j[(-g)^-]] = (-\alpha)[j(g^-) - j(g^+)] = \alpha i(g)$ .



**Propriété 5.4:** *Si une suite monotone de fonctions  $g_n \in \mathcal{Q}$  converge vers  $g \in \mathcal{Q}$ , alors la suite  $\{i(g_n)\}$  converge vers  $i(g)$ .*

Il suffit de considérer le cas où la suite est non décroissante. On aura alors  $g_n^+ \uparrow g^+$  et  $g_n^- \downarrow g^-$ . Donc:  $\lim_{n \rightarrow \infty} i(g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [j(g_n^+) - j(g_n^-)] = \lim_{n \rightarrow \infty} j(g_n^+) - \lim_{n \rightarrow \infty} j(g_n^-)$ . Le premier terme de la différence sera égal, en raison du lemme 4.1, à  $j(g^+)$ . En outre  $(g_1^- - g_n^-) \uparrow (g_1^- - g^-)$  entraîne  $j(g_1^- - g_n^-) \uparrow j(g_1^- - g^-)$ , c'est-à-dire  $[j(g_1^-) - j(g_n^-)] \uparrow [j(g_1^-) - j(g^-)]$ . Il en résulte que  $\lim_{n \rightarrow \infty} j(g_n^-) = j(g^-)$  et par conséquent  $\lim_{n \rightarrow \infty} i(g_n) = j(g^+) - j(g^-) = i(g)$ .

**Propriété 5.5:** *Si une suite monotone de fonctions  $g_n \in \mathcal{Q}$  est telle que la suite  $\{i(g_n)\}$  soit bornée, alors la fonction limite  $g$  coïncide p. p. avec une fonction intégrable.*

Il suffit de considérer le cas où la suite est non décroissante. On aura alors:  $g_n^+ \uparrow g^+$ ,  $g_n^- \downarrow g^-$ . Par hypothèse, la suite  $\{j(g_n^+) - j(g_n^-)\}$  est bornée. La suite  $\{j(g_n^-)\}$  étant aussi bornée, il en sera de même de  $\{j(g_n^+)\}$ . La proposition résulte alors du lemme 4.1 et des propositions 3.3 et 4.3, en tenant compte que, si  $f$  appartient à  $\mathcal{Q}(\mathfrak{M})$  et  $f = f'$  p. p.,  $f'$  finie, alors  $f'$  appartient aussi à  $\mathcal{Q}(\mathfrak{M})$ .

Le lemme suivant (FATOU), dont nous aurons besoin dans la suite, résulte des propriétés établies, en utilisant la démonstration de la théorie de l'intégrale de LEBESGUE.

**Lemme 5.1:** *Si la suite  $\{f_n\}$  de fonctions non négatives intégrables converge p. p. vers une fonction finie  $f$  et si la suite des intégrales  $\{i(f_n)\}$  est bornée, alors  $f$  sera aussi intégrable et on aura:  $i(f) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} i(f_n)$ .*

*Remarque:* La définition (4.1) de mesurabilité se révèle donc comme un outil approprié dans la construction de l'intégrale. Il s'agit, brièvement, de choisir parmi les fonctions numériques définies dans  $S$ , à intégrale supérieure de la valeur absolue finie, celles dont les parties positive et négative coupent toutes les fonctions positives de façon additive par rapport à l'intégrale supérieure.

**6. Discussion de la propriété 4.4. Intégrale supérieure  $\sigma$ -finie:** Nous avons déjà remarqué qu'en vertu des résultats établis jusqu'ici  $\mathfrak{M}$  ne doit pas nécessairement vérifier toutes les propriétés usuelles d'une classe de fonctions mesurables. Ceci dérive du fait que la propriété 4.4 a été démontrée seulement sous l'hypothèse  $j(g_2) < \infty$ . Sans cette restriction,  $\mathfrak{M}$  aurait toutes les propriétés

mentionnées plus haut: elle admettrait donc les structures d'espace vectoriel, d'ensemble réticulé et la propriété de classe monotone. En effet, les propositions 4.1 et 4.3 resteraient vraies sans les hypothèses  $j(|g_1|), j(|g_2|) < \infty$  et  $j(|g_n|) < \infty$  pour tout  $n$ . Nous nous proposons, dans ce paragraphe, d'établir quelques conditions qui maintiennent la validité de la propriété 4.4, sans l'hypothèse  $j(g_2) < \infty$ .

**Condition 6.1:**  $\mathfrak{M}^+$  contient une suite  $\{f_n\}$  telle que  $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_{\nu} \neq 0$  et  $j(f_n) < \infty$  pour tout indice  $n$ .

Désignons  $\sum_{\nu=1}^n f_{\nu}$  par  $h_n$ . Les fonctions  $g_1 \wedge nh_n$  et  $g_2 \wedge nh_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) appartiennent à  $\mathfrak{M}^+$ . En outre, de l'inégalité  $j(g_2 \wedge nh_n) \leq nj(h_n) = n \sum_{\nu=1}^n j(f_{\nu})$  on déduit que  $j(g_2 \wedge nh_n)$  est fini pour tout entier positif  $n$ . En raison de la propriété 4.4, la fonction  $[(g_1 \wedge nh_n) - (g_2 \wedge nh_n)]$  appartiendra alors, pour tout  $n$ , à  $\mathfrak{M}^+$ . D'autre part, la suite de ces fonctions est non décroissante et converge vers  $g_1 - g_2$ . D'après la proposition 4.2, on aura donc  $g_1 - g_2 \in \mathfrak{M}^+$ .

Il est peut-être utile de formuler le cas particulier suivant:

**Condition 6.2:** L'ensemble  $S$  est la réunion d'une suite d'ensembles  $\{E_n\}$  tels que  $\varphi_{E_n} \in \mathfrak{M}^+$  et  $j(\varphi_{E_n}) < \infty$ .

Si la condition 6.1 est satisfaite, alors toute fonction  $f \in \mathfrak{F}^+$ , et, en particulier toute fonction  $f \in \mathfrak{M}^+$ , est majorée par une série  $\sum_{\nu=1}^{\infty} g_{\nu}$ ,  $g_{\nu} \in \mathfrak{M}^+$ , telle que  $j(g_{\nu}) < \infty$  pour tout indice  $\nu$ ; car, la série  $\sum_{n,m=1}^{\infty} g_{nm}$ , où  $g_{nm} = nf_m$ , a bien cette propriété. Ceci nous propose alors une dernière condition, plus faible que les précédentes:

**Condition 6.3:** Pour tout  $f \in \mathfrak{M}^+$  il existe une suite  $\{f_n\}$ ,  $f_n \in \mathfrak{M}^+$ , telle que  $f \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n$  et  $j(f_n) < \infty$  pour tout indice  $n$ .

En effet, si  $g_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ , où  $f_n \in \mathfrak{M}^+$  et  $j(f_n) < \infty$  pour tout  $n$ , et si on désigne  $\sum_{\nu=1}^n f_{\nu}$  par  $h_n$ , la suite non décroissante  $\{(g_1 \wedge h_n) - (g_2 \wedge h_n)\}$  converge vers  $g_1 - g_2$ , qui, d'après la proposition 4.2, appartiendra à  $\mathfrak{M}^+$ .

L'analogie entre la dernière condition et la notion  $\sigma$ -fini dans la théorie de la mesure est évidente. Par conséquent, nous dirons qu'une intégrale supérieure  $j$  est  $\sigma$ -finie si elle vérifie la condition 6.3. On en déduit la

**Proposition 6.1:** Si l'intégrale supérieure  $j$  est  $\sigma$ -finie,  $\mathfrak{M}$  est un espace vectoriel réticulé monotone de fonctions numériques finies sur  $S$ .

**7. Relation avec la théorie de la mesure :** L'intégrale supérieure obtenue au premier paragraphe nous permet de définir, sur la classe des sous-ensembles de  $S$ , une fonction d'ensemble  $\mu^*$ , en posant  $\mu^*(E) = j(\varphi_E)$ . Elle aura, d'après les propriétés 2.1 et 2.4, les propriétés d'une mesure extérieure :

$$\mu^*(\emptyset) = 0, \quad (1)$$

$$E \subset F, E, F \subset S \implies 0 \leq \mu^*(E) \leq \mu^*(F), \quad (2)$$

$$E = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} E_{\nu}, E_{\nu} \subset S \implies \mu^*(E) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu^*(E_{\nu}). \quad (3)$$

Nous dirons, comme d'habitude, qu'un ensemble  $A \subset S$  est  $\mu^*$ -mesurable, s'il satisfait la condition de CARATHÉODORY  $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E - A)$ , pour tout  $E \subset S$ . Nous appellerons, d'autre part, les ensembles  $A$  tels que  $\varphi_A \in \mathfrak{M}$  ensembles mesurables.

**Proposition 7.1 :** *Tout ensemble mesurable est  $\mu^*$ -mesurable. Pour que tout ensemble  $\mu^*$ -mesurable soit mesurable, il faut et il suffit que la constante 1 appartienne à  $\mathfrak{M}$ .*

Soit  $A$  mesurable.  $\varphi_A$  appartient alors à  $\mathfrak{M}$ , c'est-à-dire  $j(f) = j(f \wedge \varphi_A) + j[(f - \varphi_A)^+]$  pour toute fonction  $f \in \mathfrak{F}^+$ . Pour tout  $E \subset S$  on aura alors  $j(\varphi_E) = j(\varphi_E \wedge \varphi_A) + j[(\varphi_E - \varphi_A)^+]$ , c'est-à-dire  $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E - A)$ . Mais ceci signifie que  $A$  est  $\mu^*$ -mesurable.

La nécessité de l'appartenance à  $\mathfrak{M}$  de la constante 1, pour que la deuxième partie de la proposition soit vraie, est évidente, puisque l'ensemble  $S$  est  $\mu^*$ -mesurable. Pour démontrer que cette condition est aussi suffisante, on prouvera d'abord que si  $A$  est  $\mu^*$ -mesurable, alors  $j(f) = j(f \varphi_A) + j[f(1 - \varphi_A)]$  pour toute fonction  $f \in \mathfrak{F}^+$ . Ici, comme précédemment, il suffit de considérer les fonctions  $f \in \mathfrak{F}^+$  telles que  $j(f) < \infty$ . Il existe alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , une série  $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \varphi_{E_{\nu}} \geq f, a_{\nu} \geq 0$ , telle que  $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \psi(E_{\nu}) \leq j(f) + \varepsilon$ . En outre:  $f \varphi_A \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} [a_{\nu} \varphi_{E_{\nu}} \varphi_A]$  et  $f(1 - \varphi_A) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} [a_{\nu} \varphi_{E_{\nu}} (1 - \varphi_A)]$ . D'où:  $j(f \varphi_A) + j[f(1 - \varphi_A)] \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} [j(\varphi_{E_{\nu}} \varphi_A) + j[\varphi_{E_{\nu}} (1 - \varphi_A)]]$ .  $A$  est  $\mu^*$ -mesurable, par hypothèse, donc  $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E - A)$  pour tout  $E \subset S$ . La dernière égalité peut être écrite aussi sous la forme suivante:  $j(\varphi_E) = j(\varphi_E \wedge \varphi_A) + j[(\varphi_E - \varphi_A)^+] = j(\varphi_E \varphi_A) + j[\varphi_E (1 - \varphi_A)]$ , où  $\varphi_E$  est une fonction caractéristique quelconque. On en déduit, en tenant compte de la propriété 2.2:  $j(f \varphi_A) + j[f(1 - \varphi_A)] \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} j(\varphi_{E_{\nu}}) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \psi(E_{\nu}) \leq j(f) + \varepsilon$ . Il résulte,  $\varepsilon$  étant arbitraire:  $j(f) \geq j(f \varphi_A) + j[f(1 - \varphi_A)]$ . Comme  $f = f \varphi_A + f(1 - \varphi_A)$ , l'inégalité opposée sera aussi vraie. D'où:

$j(f) = j(f\varphi_A) + j[f(1 - \varphi_A)]$  <sup>(1)</sup>, pour toute fonction  $f \in \mathfrak{F}^+$ . Cette égalité et la condition d'appartenance de la constante 1 à  $\mathfrak{M}$ , nous permettrons maintenant de compléter la démonstration. On aura:  $j(\varphi_A f) = j[(\varphi_A f) \wedge 1] + j[(\varphi_A f) - 1]^+$ , pour toute fonction  $f \in \mathfrak{F}^+$ . En remplaçant dans <sup>(1)</sup>, on obtient:  $j(f) = j[(\varphi_A f) \wedge 1] + j[(\varphi_A f) - 1]^+ + j[f(1 - \varphi_A)]$  <sup>(2)</sup>. En outre en remplaçant  $f$  par  $(f - \varphi_A)^+$  dans <sup>(1)</sup>, on aura:  $j[(f - \varphi_A)^+] = j[(f - \varphi_A)^+ \varphi_A] + j[(f - \varphi_A)^+(1 - \varphi_A)]$ . En vertu de cette égalité et des égalités  $(\varphi_A f) \wedge 1 = f \wedge \varphi_A$ ,  $(f - \varphi_A)^+ \varphi_A = [(\varphi_A f) - 1]^+$  et  $(f - \varphi_A)^+(1 - \varphi_A) = f(1 - \varphi_A)$ , de <sup>(2)</sup> on déduit:  $j(f) = j(f \wedge \varphi_A) + j[(f - \varphi_A)^+]$ , pour toute fonction  $f \in \mathfrak{F}^+$ , c'est-à-dire  $\varphi_A \in \mathfrak{M}$ .

**Proposition 7.2:** *Si l'intégrale supérieure  $j$  est  $\sigma$ -finie, ou si  $1 \in \mathfrak{M}$ , les ensembles mesurables forment un  $\sigma$ -anneau et  $\mu(A) = j(\varphi_A)$  une mesure complète sur cet anneau.*

Cette proposition est, d'après les propriétés de  $\mathfrak{M}$  et de  $j$ , évidente.

**8. Relation avec l'enveloppe de BAIRE:** Au paragraphe 7, nous avons introduit les ensembles  $\mu^*$ -mesurables à l'aide de la condition de mesurabilité de CARATHÉODORY. Formons maintenant l'espace vectoriel  $\mathfrak{B}$  des fonctions  $f = \sum_{\nu=1}^n a_\nu \varphi_{E_\nu}$ , où les  $a_\nu$  sont des nombres réels et les  $E_\nu$  des ensembles  $\mu^*$ -mesurables, deux à deux sans point commun. On dit qu'une classe de fonctions réelles est monotone, si elle est fermée par rapport aux limites finies de suites monotones. La plus petite classe monotone contenant l'espace  $\mathfrak{B}$  est appelée enveloppe de BAIRE et ses éléments fonctions de BAIRE. Nous désignerons cette classe par  $\mathfrak{B}$ . Il est connu que  $\mathfrak{B}$  est une classe réticulée, fermée par rapport aux opérations algébriques. Notre prochain problème sera d'étudier la relation entre les deux classes  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{M}$ . Nous supposons, au cours de ce paragraphe, que l'intégrale supérieure  $j$  soit  $\sigma$ -finie.

**Proposition 8.1:** *Pour que  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{M}$ , il faut et il suffit que la constante 1 appartienne à  $\mathfrak{M}$ .*

La condition est nécessaire, parce que  $1 \in \mathfrak{B}$ , mais aussi suffisante, car, si  $1 \in \mathfrak{M}$ , tout ensemble  $\mu^*$ -mesurable  $E$  sera, en vertu de la proposition 7.1, mesurable, c'est-à-dire  $\varphi_E \in \mathfrak{M}$ . On en déduit que  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{M}$  et, comme  $\mathfrak{M}$  est une classe monotone (proposition 6.1) contenant  $\mathfrak{B}$ , en raison de la définition de la classe  $\mathfrak{B}$ , que  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{M}$ .

**Proposition 8.2:** *Pour que  $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B}$ , il suffit que la constante 1 appartienne à  $\mathfrak{M}$ .*

Il suffit de démontrer que si  $f \in \mathfrak{M}^+$ ,  $f$  est limite d'une suite monotone de fonctions appartenant à  $\mathfrak{B}$ . A cet effet nous utiliserons un procédé connu.

Désignons par  $E_a$  l'ensemble  $\{x \in S \mid f(x) \geq a, a \text{ nombre réel positif}\}$ . Les fonctions  $[n(f - (f \wedge a))] \wedge 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) appartiennent à  $\mathfrak{M}^+$  et forment une suite non décroissante qui converge vers  $\varphi_{E_a}$ . On en déduit que  $E_a$  est mesurable, donc  $\mu^*$ -mesurable. Désignons par  $E_{ab}$  l'ensemble  $\{x \in S \mid a \leq f(x) < b, a, b \text{ nombres réels positifs, } a \leq b\}$ . Puisque  $E_{ab} = E_a - E_b$ ,  $E_{ab}$  sera  $\mu^*$ -mesurable. Il en résulte que, si  $n$  désigne un nombre entier positif, la fonction.

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\nu - 1}{2^n}, & \text{si } \frac{\nu - 1}{2^n} \leq f(x) < \frac{\nu}{2^n}, \nu = 1, 2, \dots, 2^n n \\ n, & \text{si } f(x) \geq n \end{cases}$$

appartient à  $\mathfrak{B}$ . En outre, la suite  $\{f_n\}$  est non décroissante et converge vers  $f$ . Donc  $f \in \mathfrak{B}$ .

Comme corollaire, on aura la

**Proposition 8.3:** *Pour que  $\mathfrak{B} = \mathfrak{M}$ , il faut et il suffit que la constante 1 soit mesurable.*

**9. Spécialisation de la fonction d'ensemble  $\psi$ :** Rappelons que la fonction d'ensemble  $\psi$ , dont on s'est servi au paragraphe 1 pour définir l'intégrale supérieure  $j$ , n'était soumise qu'à la seule condition d'être non négative. Rappelons aussi que l'intégrale supérieure obtenue vérifiait la condition  $j(\varphi_E) = \mu^*(E) \leq \psi(E)$ , pour tout ensemble  $E \subset S$  (cf. propriété 2.2). Nous nous posons maintenant la question suivante: existe-t-il des conditions, satisfaites par la fonction d'ensemble  $\psi$ , telles que  $\mu^*(E) = \psi(E)$ ? Nous pouvons écrire immédiatement la condition suivante:

**Proposition 9.1:** *Pour que  $\mu^*(E) = \psi(E), E \subset S$ , il faut et il suffit que l'inégalité  $\varphi_E \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \varphi_{E_{\nu}}, a_{\nu} \geq 0, E_{\nu} \subset S$ , entraîne  $\psi(E) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \psi(E_{\nu})$ .*

La nécessité de cette condition est, d'après (1,1), évidente. D'autre part, si  $\psi(E) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \psi(E_{\nu})$ , pour toute série  $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \varphi_{E_{\nu}} \geq \varphi_E$ , alors  $\mu^*(E) \geq \psi(E)$ . Cette inégalité et la propriété 2.2 entraînent  $\mu^*(E) = \psi(E)$ .

Comme corollaire, on a la

**Proposition 9.2:** *Une condition nécessaire pour que  $\mu^*(E) = \psi(E), E \subset S$ , est que l'inégalité  $\varphi_E \leq \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} \varphi_{E_{\nu}}, a_{\nu} \geq 0, E_{\nu} \subset S$ , entraîne  $\psi(E) \leq \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} \psi(E_{\nu})$ .*

On dit qu'une fonction d'ensemble  $\psi$  est semi-continue inférieurement en  $E \subset S$ , si  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \psi(E_{\nu}) = \psi(E)$ , pour toute suite non décroissante  $\{E_{\nu}\}, E_{\nu} \subset S$ ,

telle que  $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} E_{\nu} = E$ . On dit que  $\psi$  est semi-continue inférieurement quand elle est semi-continue inférieurement pour tout  $E \subset S$ .

**Proposition 9.3:** *Si  $\psi$  est semi-continue inférieurement en  $E \subset S$ , la condition de la proposition 9.2 est suffisante pour que  $\mu^*(E) = \psi(E)$ .*

Il suffit de démontrer que  $\mu^*(E) \geq \psi(E)$ . Soit  $\varphi_E \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \varphi_{E_{\nu}}$ . Si on pose  $h_n = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} \varphi_{E_{\nu}}$ , la suite  $\{h_n\}$  est non décroissante, puisque les  $a_{\nu}$  sont non négatifs, et  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \varphi_{E_{\nu}} \geq \varphi_E$ . En outre, si  $\varepsilon$  désigne un nombre positif plus petit que 1, les ensembles  $M_{\nu} = \{x \in E \mid h_{\nu}(x) < 1 - \varepsilon\}$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) forment une suite non croissante telle que  $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} M_{\nu} = \emptyset$ , où  $\emptyset$  désigne l'ensemble vide. Sinon, il existerait au moins un point  $x \in E$  qui appartient à tous les  $M_{\nu}$ , ce qui signifierait que  $h_{\nu}(x) < 1 - \varepsilon$  pour tout indice  $\nu$ , c'est-à-dire que  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} h_{\nu}(x) \leq 1 - \varepsilon$ , en contradiction avec l'hypothèse  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} h_{\nu} \geq \varphi_E$ . En outre, la relation  $E - \bigcap_{\nu=1}^n M_{\nu} = \bigcup_{\nu=1}^n (E - M_{\nu})$  entraîne  $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} (E - M_{\nu}) = E$ . Or, puisque la suite  $\{E - M_n\}$  est non décroissante, en vertu de l'hypothèse, on aura  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(E - M_n) = \psi(E)$ . Comme  $h_n(x) \geq 1 - \varepsilon$ , pour tout  $x \in (E - M_n)$ , on aura aussi:  $h_n \geq (1 - \varepsilon) \varphi_{(E - M_n)}$ , c'est-à-dire  $\sum_{\nu=1}^n a_{\nu} \varphi_{E_{\nu}} \geq (1 - \varepsilon) \varphi_{(E - M_n)}$ . On en déduit, en utilisant la condition de la proposition 9.2:  $\sum_{\nu=1}^n a_{\nu} \psi(E_{\nu}) \geq (1 - \varepsilon) \psi(E - M_n)$ . Si on fait tendre  $n$  vers l'infini, on obtient:  $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \psi(E_{\nu}) \geq (1 - \varepsilon) \psi(E)$  et, puisque  $\varepsilon$  est arbitraire,  $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \psi(E_{\nu}) \geq \psi(E)$ . Ceci étant valable pour toute série  $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \varphi_{E_{\nu}}$  majorant  $\varphi_E$ , il résulte que  $\psi(E) \leq \mu^*(E)$ , ce qui achève la démonstration.

Toute mesure extérieure régulière  $\psi$  étant semi-continue inférieurement (cf. par ex. [2] ou [3]), on aura, comme corollaire, la proposition suivante:

**Proposition 9.4:**  *$\psi$  étant une mesure extérieure régulière,  $\mu^*(E) = \psi(E)$  pour tout  $E \subset S$ .*

En effet, il est aisé de voir que  $\psi$  vérifie la condition de la proposition 9.2, pour tout  $E \subset S$ .

**10. Les espaces normés  $F$  et  $L$ :** Dans l'espace vectoriel  $F$  des fonctions  $f \in \mathfrak{F}$  telles que  $|f|, j(|f|) < \infty$ ,  $\|f\| = j(|f|)$  est une pseudo-norme. En identifiant, dans  $F$ , les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  telles que  $f_1 = f_2$  p.p., ou, d'après la propo-

sition 3.1, ce qui revient au même, telles que  $j(|f_1 - f_2|) = 0$ ,  $\|f\|$  devient une norme. L'espace normé  $F$  sera complet (pour la démonstration cf. M. H. STONE [4]).

Désignons par  $L$  l'espace des fonctions  $f \in \mathcal{Q}$ , avec la même identification que dans  $F$ .  $L$  est un sous-espace de  $F$ .

**Proposition 10.1:** *Dans la topologie de la norme,  $L$  est un sous-espace fermé de  $F$ .*

En effet, soit  $\{f_n\}$  une suite de fonctions intégrables telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ , où  $|f|, j(|f|) < \infty$ . Nous pouvons définir une suite croissante  $\{n_k\}$  d'entiers positifs telle que  $j(|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|) \leq 2^{-k}$ . Il existe alors (cf. M. H. STONE, loc. cit.) une fonction  $g$  telle que  $g = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}$  p. p. et  $\lim_{k \rightarrow \infty} j(|f_{n_k} - g|) = 0$ . L'hypothèse  $\lim_{k \rightarrow \infty} j(|f_{n_k} - f|) = 0$  entraîne donc  $f = g$  p. p., c'est-à-dire  $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}$  p. p. D'où:  $f^+ = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}^+$  p. p.,  $f^- = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}^-$  p. p. La suite  $\{i(|f_{n_k}|) = j(|f_{n_k}|)\}$  est convergente, donc bornée. Les suites  $\{i(f_{n_k}^+)\}$  et  $\{i(f_{n_k}^-)\}$  le seront aussi. En raison du lemme 5.1,  $f^+$  et  $f^-$  appartiendront à  $\mathcal{Q}$ , ce qui prouve que  $f$  appartient à  $\mathcal{Q}$ .

Comme corollaire, on a la proposition suivante:

**Proposition 10.2:**  *$L$  est un espace de BANACH.*

**11. Considérations générales:** Soit  $S$ , comme précédemment, un ensemble quelconque non vide.

Rappelons que par *intégrale supérieure* on entend une application  $j$  de la classe  $\mathfrak{F}^+$  de toutes les fonctions numériques positives (finies ou non) définies sur  $S$ , dans  $[0, \infty]$ , satisfaisant aux deux propriétés suivantes:

- (1)  $j(\lambda f) = \lambda j(f), f \in \mathfrak{F}^+, \lambda \geq 0$ ;
- (2)  $f \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{\nu}, f, f_{\nu} \in \mathfrak{F}^+ \implies j(f) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} j(f_{\nu})$ .

Par *intégrale*, on entendra un couple  $(\mathcal{Q}, i)$  qui satisfait aux axiomes suivants:

(1)  $\mathcal{Q}$  est un espace vectoriel réticulé de fonctions numériques (finies), définies dans  $S$ .  $i$  est une forme linéaire positive sur  $\mathcal{Q}$ ;

$$(2) \quad f_n \uparrow f, f, f_n \in \mathcal{Q} \implies i(f_n) \uparrow i(f);$$

$$(3) \quad f_n \uparrow f, f_n \in \mathcal{Q}, \sup_n i(f_n) < \infty \implies f \text{ coïncide p. p. avec } g \in \mathcal{Q}$$

Le symbole p. p, signifiera ici:  $\varphi_{\{f \neq g\}} \leq h \in \mathcal{Q}, i(h) = 0$ . Il est aisé de vérifier que si  $f, g \in \mathcal{Q}, f = g$  p. p.  $\iff i(|f - g|) = 0$ , et que dans (3)  $i(f_n) \uparrow i(g)$ .

La condition (4,1) nous permet de résoudre le problème suivant: déterminer, en partant d'une intégrale supérieure  $j$ , une intégrale  $(\mathcal{Q}, i)$  telle que  $j(|f|) = i(|f|)$  pour toute fonction  $f \in \mathcal{Q}$ . En effet, en raison des résultats des paragraphes 4 et 5, si on désigne par  $\mathcal{Q}$  la classe des fonctions finies  $g \in \mathfrak{F}$  telles que  $j(|g|) < \infty$  et que la condition

$$j(f) = j(f \wedge \bar{g}) + j[(f - \bar{g})^+], \quad \text{où } \bar{g} = g^+ \text{ et } \bar{g} = g^-, \quad (11,1)$$

soit satisfaite pour toute fonction  $f \in \mathfrak{F}^+$  et si on désigne  $j(g^+) - j(g^-)$  par  $i(g)$ , le couple  $(\mathcal{Q}, i)$  ainsi défini aura les propriétés mentionnées plus haut. On l'appellera *intégrale induite par l'intégrale supérieure  $j$* .

**12. Prolongement d'une intégrale élémentaire:** La condition (4,1) nous offre aussi la possibilité de prolonger une intégrale élémentaire. Le but de ce paragraphe sera d'examiner cette possibilité, puis d'établir la relation entre la prolongement obtenu et ceux de STONE [4] et BOURBAKI [1]. Supposons donnée une *intégrale élémentaire*  $(\mathfrak{E}, e)$ , où  $\mathfrak{E}$  désigne un espace vectoriel réticulé de fonctions numériques (finies) définies dans l'ensemble  $S$  et  $e$  une fonction numérique sur  $\mathfrak{E}$ , qui vérifie les axiomes de STONE [4]:

$$f, g \in \mathfrak{E}, \alpha \text{ nombre réel} \implies e(\alpha f) = \alpha e(f), e(f + g) = e(f) + e(g), e(|f|) \geq 0; \quad (1)$$

$$f, f_n \in \mathfrak{E}, |f| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \implies e(|f|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} e(|f_n|). \quad (2)$$

Désignons par  $\mathfrak{F}$ , comme précédemment, la classe de toutes les fonctions numériques  $f$  (finies ou non) définies dans  $S$ . Considérons sur  $\mathfrak{F}^+$ , d'après STONE [4], la fonction

$$j(f) \begin{cases} = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} e(|f_n|) \mid f \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|, f_n \in \mathfrak{E} \right\}, \\ \text{si une telle suite } \{f_n\} \text{ existe,} \\ = \infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

$j$  a les propriétés d'une intégrale supérieure. En outre, si  $f \in \mathfrak{E}^+$ ,  $j(f) = e(f)$ . Nous appellerons  $j$  *intégrale supérieure induite par l'intégrale élémentaire  $(\mathfrak{E}, e)$* . Si  $(\mathcal{Q}, i)$  désigne l'intégrale induite par  $j$ , on aura la

**Proposition 12.1:** *L'intégrale  $(\mathcal{Q}, i)$  est un prolongement de l'intégrale élémentaire  $(\mathfrak{E}, e)$ .*

Pour démontrer que  $\mathfrak{E} \subset \mathcal{Q}$ , il suffit de prouver que si  $0 \leq g \in \mathfrak{E}$ , alors  $g \in \mathcal{Q}$ . Soit  $\varepsilon$  un nombre positif et  $f \in \mathfrak{F}^+$  une fonction telle que  $j(f) < \infty$ . Il existe alors une suite  $\{g_\nu\}$ ,  $g_\nu \in \mathfrak{E}^+$ , telle que  $f \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu$  et que  $\sum_{\nu=1}^{\infty} e(g_\nu) \leq j(f) + \varepsilon$ .



D'où :

$$j(f) + \varepsilon \geq \sum_{\nu=1}^{\infty} e(g_{\nu}) \geq \sum_{\nu=1}^n e(g_{\nu}) = e\left(\sum_{\nu=1}^n g_{\nu}\right) = e\left[\left(\sum_{\nu=1}^n g_{\nu}\right) \wedge g\right] + e\left[\left(\sum_{\nu=1}^n g_{\nu}\right) - g\right]^+,$$

qui entraîne

$$j(f) + \varepsilon \geq \lim_{n \rightarrow \infty} e\left[\left(\sum_{\nu=1}^n g_{\nu}\right) \wedge g\right] + \lim_{n \rightarrow \infty} e\left[\left(\sum_{\nu=1}^n g_{\nu}\right) - g\right]^+.$$

Considérons maintenant une suite non décroissante de fonctions  $h_n \in \mathfrak{E}^+$  et désignons par  $h$  la limite de cette suite. On aura, comme  $h = \sum_{\nu=1}^{\infty} (h_{\nu} - h_{\nu-1})$ , où  $h_0 = 0$  :  $j(h) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} [e(h_{\nu}) - e(h_{\nu-1})] = \lim_{n \rightarrow \infty} e(h_n)$ . D'où, puisque la suite est non décroissante :  $\lim_{n \rightarrow \infty} e(h_n) = j(h) = j(h)$ . Cette propriété, appliquée à notre cas, nous donne :

$$\begin{aligned} j(f) + \varepsilon &\geq j\left[\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} g_{\nu}\right) \wedge g\right] + j\left[\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} g_{\nu}\right) - g\right]^+ \\ &\geq j(f \wedge g) + j[(f - g)^+]. \end{aligned}$$

Si l'on tient compte de la propriété 2.4 (2), il résulte,  $\varepsilon$  étant arbitraire :  $j(f) = j(f \wedge g) + j[(f - g)^+]$ . Donc  $g \in \mathcal{Q}$ . En outre, pour tout  $g \in \mathfrak{E}$ ,  $e(g) = e(g^+) - e(g^-) = j(g^+) - j(g^-) = i(g)$ , ce qui achève la démonstration.

M. STONE obtient, dans les travaux cités, le prolongement  $(\mathcal{Q}', i')$  de  $(\mathfrak{E}, e)$  en prenant l'adhérence de  $E$  (espace normé associé à l'intégrale élémentaire) dans  $F$  (cf. paragraphe 10) dans la topologie de la norme  $j(|f|)$ . Nous avons démontré (proposition 10.1) que  $L$  est fermé dans  $F$ . D'où, comme l'identification de fonctions dans  $\mathcal{Q}'$  est la même que dans  $\mathcal{Q}$ , la proposition suivante :

**Proposition 12.2 :** *Soit  $j$  l'intégrale supérieure induite par l'intégrale élémentaire  $(\mathfrak{E}, e)$ . Si  $(\mathcal{Q}', i')$  désigne le prolongement de STONE de  $(\mathfrak{E}, e)$  et  $(\mathcal{Q}, i)$  l'intégrale induite par  $j$ , alors  $(\mathcal{Q}', i') \subset (\mathcal{Q}, i)$ .*

La proposition reste vraie si  $(\mathfrak{E}, e)$  désigne une mesure de RADON sur l'espace  $\mathfrak{E}$  des fonctions continues à support compact, définies dans un espace séparé localement compact et  $j$ , resp.  $(\mathcal{Q}', i')$ , l'intégrale supérieure, resp. le prolongement de BOURBAKI.

La méthode de prolonger une intégrale élémentaire présentée plus haut se résume donc à une construction d'une intégrale supérieure (intégrale supérieure induite) et à une condition - (11,1) - qui fixe directement la classe  $\mathcal{Q}$  des fonctions intégrables (intégrale induite).  $L$  contient l'adhérence  $L'$  de  $E$  dans  $F$ . Le problème de savoir si  $\mathcal{Q}$  coïncide avec  $\mathcal{Q}'$  sera traité dans la proposition suivante :

**Proposition 12.3:** Soit  $j$  l'intégrale supérieure induite par l'intégrale élémentaire  $(\mathfrak{E}, e)$ . Si  $(\mathfrak{Q}, i)$  désigne une intégrale qui prolonge  $(\mathfrak{E}, e)$ , telle que  $i(|f|) = j(|f|)$  pour toute fonction  $f \in \mathfrak{Q}$ , alors  $(\mathfrak{Q}, i) \subset (\mathfrak{Q}', i')$ .

Il suffit de démontrer que si  $g \in \mathfrak{Q}^+$ , il existe, pour tout  $\varepsilon > 0$ , une fonction  $k \in \mathfrak{Q}'$  telle que  $j(|k - g|) \leq \varepsilon$ . Comme  $j(g) < \infty$ , il existe, si  $\varepsilon > 0$ , une série  $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_{\nu} \geq g$ , où  $f_{\nu} \in \mathfrak{E}^+$ , telle que  $j(g) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} e(f_{\nu}) \leq j(g) + \varepsilon$ . Si on pose  $k_n = \sum_{\nu=1}^n f_{\nu}$ , la suite  $\{k_n\}$  est non décroissante et sa limite coïncide p. p. avec  $k \in \mathfrak{Q}' \cap \mathfrak{Q}$ , puisque  $k_n \in \mathfrak{E}$  et  $\{e(k_n)\}$  est une suite bornée. Donc  $j(g) = i(g) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} e(k_n) = i(k) \leq j(g) + \varepsilon = i(g) + \varepsilon$ . On en déduit, comme  $k \geq g$  p. p.:  $i(k) - i(g) = i(k - g) = j(|k - g|) \leq \varepsilon$ , ce qui achève la démonstration.

**Corollaire 12.1:** Si  $(\mathfrak{Q}, i)$  désigne l'intégrale induite par  $j$ , alors  $(\mathfrak{Q}, i) = (\mathfrak{Q}', i')$ .

**13. Intégrale supérieure régulière:** Supposons donnée une intégrale supérieure  $j$ . Formons l'intégrale induite  $(\mathfrak{Q}, i)$  et à l'aide de celle-ci l'intégrale supérieure induite  $j'$ . Si  $j'(f) < \infty$ , on aura:

$$j'(f) = \inf \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} i(|f_{\nu}|) / f \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |f_{\nu}|, f_{\nu} \in \mathfrak{Q} \right\}.$$

Il existe donc, pour tout  $\varepsilon > 0$ , une série  $\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_{\nu}|$  telle que  $\sum_{\nu=1}^{\infty} i(|f_{\nu}|) \leq j'(f) + \varepsilon$ , ce qui donne, puisque  $i(|f_{\nu}|) = j(|f_{\nu}|)$ :  $j(f) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} j(|f_{\nu}|) = \sum_{\nu=1}^{\infty} i(|f_{\nu}|) \leq j'(f) + \varepsilon$ .  $\varepsilon$  étant arbitraire, on aura:

$$j(f) \leq j'(f) \tag{13,1}$$

pour toute fonction  $f \in \mathfrak{F}^+$ , cette inégalité restant vraie si  $j'(f) = \infty$ .

En général, les deux fonctions  $j$  et  $j'$  ne seront pas identiques. Si  $j(f) = j'(f)$  pour toute fonction  $f \in \mathfrak{F}^+$ , nous dirons que l'intégrale supérieure  $j$  est régulière.

**Proposition 13.1:** Pour qu'une intégrale supérieure soit régulière, il faut et il suffit qu'elle soit induite par une intégrale élémentaire.

La nécessité de la condition étant évidente, supposons que l'intégrale supérieure  $j$  soit induite par l'intégrale élémentaire  $(\mathfrak{E}, e)$  et désignons par  $(\mathfrak{Q}, i)$  l'intégrale induite par  $j$ . Puisque  $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{Q}$ , on aura, si  $j(f) < \infty$ :  $j(f) = \inf \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} e(|f_{\nu}|) = \sum_{\nu=1}^{\infty} j(|f_{\nu}|) / f \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |f_{\nu}|, f \in \mathfrak{F}^+, f_{\nu} \in \mathfrak{E} \right\} \geq \inf \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} j(|f_{\nu}|) / f \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |f_{\nu}|, f \in \mathfrak{F}^+, f_{\nu} \in \mathfrak{Q} \right\} = j'(f)$

$\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |f_{\nu}|$ ,  $f \in \mathfrak{F}^+$ ,  $f_{\nu} \in \mathfrak{Q}\}$  =  $j'(f)$ . Donc  $j(f) \geq j'(f)$  pour toute fonction  $f \in \mathfrak{F}^+$ , cette inégalité étant aussi vraie si  $j(f) = \infty$ . On en déduit, si on tient compte de (13,1), que  $j'(f) = j(f)$  pour toute  $f \in \mathfrak{F}^+$ , ce qui achève la démonstration.

Une intégrale supérieure régulière est donc toujours engendrée par une mesure. Etant donnée l'intégrale supérieure, la relation (11,1) nous permet de reconstruire cette mesure.

**14. Intégrale supérieure produit:** Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux ensembles non vides. On désigne par  $S_1 \times S_2$  leur produit cartésien, c'est-à-dire l'ensemble des couples ordonnés  $(x, y)$  tels que  $x \in S_1$  et  $y \in S_2$ . On appelle rectangle un sous-ensemble de  $S_1 \times S_2$  de la forme  $E = A \times B$ , où  $A \subset S_1$  et  $B \subset S_2$ . Soient  $\psi_1$  et  $\psi_2$  deux fonctions numériques d'ensemble non négatives, définies dans la classe des sous-ensembles de  $S_1$ , resp. de  $S_2$ . Nous pouvons définir, dans la classe des rectangles  $A \times B \subset S_1 \times S_2$  ( $A, B$  ensembles non vides), une fonction d'ensemble non négative  $\psi$ , en posant:

$$\psi(A \times B) = \psi_1(A)\psi_2(B).$$

A l'aide de  $\psi$  nous obtenons, d'après la remarque du deuxième paragraphe, une intégrale supérieure  $j$  sur la classe  $\mathfrak{F}^+$  des fonctions numériques non négatives  $f$ , définies dans  $S_1 \times S_2$ , en posant:

$$j(f) = \inf \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \psi(A_{\nu} \times B_{\nu}) \mid f \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \varphi_{A_{\nu} \times B_{\nu}}, a_{\nu} \geq 0, \right. \\ \left. A_{\nu} \subset S_1 \text{ et } B_{\nu} \subset S_2 \text{ ensembles non vides} \right\}.$$

Dans ce qui suit, les différentes classes de fonctions introduites aux paragraphes précédents seront désignées par les mêmes lettres, affectées de l'indice 1, resp. 2, si elles sont associées à  $S_1$  resp.  $S_2$ .

Nous dirons que  $j$  est l'intégrale supérieure produit de  $j_1$  par  $j_2$ .

**Proposition 14.1:** Si  $f(x) \in \mathfrak{F}_1^+$  et  $g(y) \in \mathfrak{F}_2^+$ , alors  $j[f(x)g(y)] \leq j_1[f(x)]j_2[g(y)]$ , sauf éventuellement dans le cas où le membre de droite de l'inégalité est de la forme  $0 \cdot \infty$ .

On peut supposer  $j_1[f(x)] < \infty$  et  $j_2[g(y)] < \infty$ . Il existe alors, si  $\varepsilon$  désigne un nombre positif, deux séries  $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \varphi_{A_{\nu}}(x) \geq f(x)$  et  $\sum_{\varrho=1}^{\infty} b_{\varrho} \varphi_{B_{\varrho}}(y) \geq g(y)$ , où  $a_{\nu} \geq 0$ ,  $b_{\varrho} \geq 0$ ,  $A_{\varrho} \subset S_1$ ,  $B_{\varrho} \subset S_2$ , telles que  $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \psi_1(A_{\nu}) \leq j_1[f(x)] + \varepsilon$  et  $\sum_{\varrho=1}^{\infty} b_{\varrho} \psi_2(B_{\varrho}) \leq j_2[g(y)] + \varepsilon$ . D'autre part  $f(x)g(y) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \varphi_{A_{\nu}}(x) \sum_{\varrho=1}^{\infty} b_{\varrho} \varphi_{B_{\varrho}}(y) = \sum_{\nu, \varrho=1}^{\infty} a_{\nu} b_{\varrho} \varphi_{A_{\nu}}(x) \varphi_{B_{\varrho}}(y) = \sum_{\nu, \varrho=1}^{\infty} a_{\nu} b_{\varrho} \varphi_{A_{\nu} \times B_{\varrho}}(x, y)$ . Donc  $j[f(x)g(y)] \leq$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\nu, \varrho=1}^{\infty} a_{\nu} b_{\varrho} \psi(A_{\nu} \times B_{\varrho}) = \sum_{\nu, \varrho=1}^{\infty} a_{\nu} b_{\varrho} \psi_1(A_{\nu}) \psi_2(B_{\varrho}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \psi_1(A_{\nu}) \sum_{\varrho=1}^{\infty} b_{\varrho} \psi_2(B_{\varrho}) \leq \\ &\leq [j_1[f(x)] + \varepsilon] [j_2[g(y)] + \varepsilon]. \text{ Puisque } \varepsilon \text{ est arbitraire, on en déduit: } j[f(x)g(y)] \leq \\ &\leq j_1[f(x)] j_2[g(y)], \text{ ce qui achève la démonstration.} \end{aligned}$$

**Proposition 14.2:** Si  $f(x, y) \in \mathfrak{F}^+$ , alors

$$j[f(x, y)] \begin{cases} \geq j_1[j_2[f(x, y)]] \\ \geq j_2[j_1[f(x, y)]] \end{cases},$$

la première intégration de l'intégrale supérieure double devant s'effectuer en tenant  $x$  resp.  $y$  fixé.

Il suffit de démontrer la première de ces inégalités. On peut supposer  $j[f(x, y)] < \infty$ . Il existe alors, si  $\varepsilon$  désigne un nombre positif, une série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \varphi_{A_{\nu} \times B_{\nu}}(x, y) \geq f(x, y), \text{ où } a_{\nu} \geq 0, A_{\nu} \subset S_1 \text{ et } B_{\nu} \subset S_2, \text{ telle que}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \psi_1(A_{\nu}) \psi_2(B_{\nu}) \leq j[f(x, y)] + \varepsilon. \text{ D'autre part, si } x \text{ est fixe: } j_2[f(x, y)] \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} j_2[a_{\nu} \varphi_{A_{\nu}}(x) \varphi_{B_{\nu}}(y)] = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \varphi_{A_{\nu}}(x) \psi_2(B_{\nu}). \text{ D'où: } j_1[j_2[f(x, y)]] \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} j_1[a_{\nu} \varphi_{A_{\nu}}(x) \psi_2(B_{\nu})] \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \psi_1(A_{\nu}) \psi_2(B_{\nu}) \leq j[f(x, y)] + \varepsilon. \text{ Comme } \varepsilon \text{ est arbitraire, il résulte que } j[f(x, y)] \geq j_1[j_2[f(x, y)]].$$

Comme corollaire on a la proposition suivante:

**Proposition 14.3:** Si  $f(x) \in \mathfrak{F}_1^+$  et  $g(y) \in \mathfrak{F}_2^+$ , alors  $j[f(x)g(y)] = j_1[f(x)]j_2[g(y)]$ , sauf éventuellement dans le cas où le membre de droite de l'égalité est de la forme  $0 \cdot \infty$ .

**15. Intégration dans l'espace produit:** Considérons la classe des fonctions de la forme

$$h(x, y) = f_1(x)g_1(y) + \dots + f_n(x)g_n(y),$$

où  $f_{\nu}(x) \in \mathcal{Q}_1^+$  et  $g_{\nu}(y) \in \mathcal{Q}_2^+$ . Soit  $\mathfrak{C}$  une sous-classe qui comprend, avec  $h_1$  et  $h_2$ ,  $h_1 \wedge h_2$  et, si  $h_1 \geq h_2$ ,  $h_1 - h_2$ . L'espace vectoriel engendré par  $\mathfrak{C}$  sera alors réticulé et son élément général aura la forme  $h(x, y) = h^+(x, y) - h^-(x, y)$ , où  $h^+(x, y)$  et  $h^-(x, y)$  appartiennent à  $\mathfrak{C}$ . Désignons par  $L$  l'adhérence, dans  $F$ , de l'espace normé associé à cet espace (cf. paragraphe 10) et posons, pour toute fonction  $f(x, y) \in \mathcal{Q}$ :

$$i[f(x, y)] = j[f^+(x, y)] - j[f^-(x, y)].$$

**Proposition 15.1:**  $(\mathcal{Q}, i)$  est une intégrale telle que  $i(|f|) = j(|f|)$ , pour toute fonction  $f \in \mathcal{Q}$ .

Il suffit de prouver, en vertu des propriétés de  $j$ , que si  $h_1$  et  $h_2$  appartiennent à  $\mathfrak{C}$ , alors  $j(h_1 + h_2) = j(h_1) + j(h_2)$ ,  $i$  étant alors le prolongement de STONE d'une intégrale élémentaire. Mais cette additivité est, en vertu de la proposition 14.3, une conséquence immédiate de l'égalité

$$j\left[\sum_{\nu=1}^n f_{\nu}(x)g_{\nu}(y)\right] = \sum_{\nu=1}^n j_1[f_{\nu}(x)]j_2[g_{\nu}(y)], \quad f_{\nu}(x) \in \mathfrak{Q}_1^+, g_{\nu}(y) \in \mathfrak{Q}_2^+$$

que nous allons démontrer. En vertu de la proposition 14.2, on pourra écrire :

$$j\left[\sum_{\nu=1}^n f_{\nu}(x)g_{\nu}(y)\right] \geq j_1\left[j_2\left[\sum_{\nu=1}^n f_{\nu}(x)g_{\nu}(y)\right]\right].$$

Comme la fonction  $\sum_{\nu=1}^n f_{\nu}(x)g_{\nu}(y)$  appartient, si  $x$  est fixé, à  $\mathfrak{Q}_2^+$ , on aura :

$$j_2\left[\sum_{\nu=1}^n f_{\nu}(x)g_{\nu}(y)\right] = \sum_{\nu=1}^n f_{\nu}(x)j_2[g_{\nu}(y)],$$

et, comme le membre de droite de l'égalité appartient à  $\mathfrak{Q}_1^+$  :

$$j_1\left[j_2\left[\sum_{\nu=1}^n f_{\nu}(x)g_{\nu}(y)\right]\right] = \sum_{\nu=1}^n j_1[f_{\nu}(x)]j_2[g_{\nu}(y)].$$

D'où :

$$j\left[\sum_{\nu=1}^n f_{\nu}(x)g_{\nu}(y)\right] \geq \sum_{\nu=1}^n j_1[f_{\nu}(x)]j_2[g_{\nu}(y)].$$

D'autre part, d'après la proposition 14.3, on aura :

$$j\left[\sum_{\nu=1}^n f_{\nu}(x)g_{\nu}(y)\right] \leq \sum_{\nu=1}^n j[f_{\nu}(x)g_{\nu}(y)] = \sum_{\nu=1}^n j_1[f_{\nu}(x)]j_2[g_{\nu}(y)],$$

ce qui achève la démonstration.

Nous pouvons maintenant formuler, pour les fonctions  $f \in \mathfrak{Q}$ , la proposition suivante (pour la démonstration, directement applicable à notre cas, si on désigne par  $f_n(x, y)$  une fonction appartenant à l'espace engendré par  $\mathfrak{C}$ , cf. STONE [4], III, page 485) :

**Proposition 15.2 :** *L'intégrale d'une fonction  $f(x, y) \in \mathfrak{Q}$  peut être exprimée par une double intégration, c'est-à-dire :  $i[f(x, y)] = i_1[i_2[f(x, y)]] = i_2[i_1[f(x, y)]]$ .*

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI: *Intégration*. Livre VI. Paris, Hermann & Cie. (1952).
- [2] P. R. HALMOS: *Measure Theory*. New York, D. Van Nostrand (1950).
- [3] M. E. MUNROE: *Introduction to Measure and Integration*. Cambridge, Addison-Wesley (1953).
- [4] M. H. STONE: *Notes on Integration, I, II et III*. Proc. Nat. Ac. Sci., 34 (1948).

(Reçu le 10 mai 1963)