**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici

**Band:** 39 (1964-1965)

**Artikel:** Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises II.

**Autor:** Strebel, Kurt

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-29877

# Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises II

von KURT STREBEL, Freiburg (Schweiz)

## Einleitung

1. Bildet man den Einheitskreis $|z| < 1$ durch eine analytische Funktion $z^* = \Phi(z)$ auf eine RIEMANNsche Fläche $R^*$ über der $z^*$-Ebene ab, streckt diese durch die affine Abbildung $w^* = F(z^*) = Kx^* + iy^*$ $(K \geqslant 1)$, wodurch sie in eine RIEMANNsche Fläche $S^*$ über der $w^*$-Ebene übergeführt wird, und bildet schließlich $S^*$ durch die Umkehrfunktion einer im Einheitskreis $|w| < 1$ analytischen Funktion $\Psi$ wieder auf den letzteren ab, so erhält man durch Zusammensetzung eine $K$-quasikonforme Abbildung $f = \Psi^{-1} \circ F \circ \Phi$ von $|z| < 1$ auf $|w| < 1$. Die Abbildung $f$ induziert eine topologische Abbildung des Randes $|z| = 1$ auf den Rand $|w| = 1$. Im ersten Teil dieser Arbeit [4] wurden gewisse Eigenschaften der Fläche $R^*$ angegeben, aus denen folgt, daß $f$ für die induzierte Randabbildung die extremale quasikonforme Abbildung ist, das heißt diejenige mit der kleinsten maximalen Dilatation, und es wurden Beispiele gegeben, in denen $f$ wohl eine extremale Abbildung, aber nicht die einzige, und solche, in denen $f$ nicht extremal ist. Insbesondere ist $f$ nach Satz 1 der zitierten Arbeit stets einzige Extremale, wenn $R^*$ in der Metrik der $z^*$-Ebene endlichen Flächeninhalt $\iint\limits_{|z|<1} |\Phi'|^2 \, dxdy$ hat.

2. Es liegt auf der Hand, daß die Eindeutigkeit der Funktion $\Phi$ eine allzu einschränkende Voraussetzung in diesem Unitätssatz darstellt. Bildet man zum Beispiel den über $|z| < 1$ gelegenen Teil der zweiblättrigen Fläche der Quadratwurzel durch die Funktion $z^* = \Phi(z) = z^{\frac{3}{2}}$ auf ein dreiblättriges Flächenstück $R^*$ über $|z^*| < 1$ ab, unterwirft dieses der Streckung $F$, wodurch es in ein dreiblättriges elliptisches Flächenstück $S^*$ übergeführt wird, und nachträglich $S^*$ der Abbildung $\Phi^{-1}$, so wird dadurch eine quasikonforme Abbildung $f$ des schlichten Einheitskreises auf ein schlichtes dreizipfliges Gebiet (das man noch konform auf den Einheitskreis $|w| < 1$ abbilden kann) induziert. Es ist leicht zu sehen (und wird aus unserem Satz folgen), daß diese Abbildung $f$ für die durch sie induzierte Randabbildung einzige Extremale ist. Der Beweis von Satz 1 besagt jedoch nur, daß $F: R^* \to S^*$ unter allen quasikonformen Abbildungen $H$ von $R^*$ auf die gestreckte Fläche $S^*$, die auf dem Rande mit $F$ übereinstimmen, die kleinste maximale Dilatation hat. Wenn wir nun $f$ mit einer andern quasikonformen Abbildung $h$ gleichen Randverhaltens

vergleichen wollen, liegt es nahe, diese auf die Quadratwurzelflächen über $|z| < 1$ und $|w| < 1$ «hinaufzudrücken» und dann den Vergleich auf $R^*$ durchzuführen. Aber das kann man nur, wenn $h(0) = 0$ ist, das heißt der Verzweigungspunkt auf den Verzweigungspunkt abgebildet wird. Man möchte jedoch $f$ mit allen $h$, die nur auf dem Rande mit $f$ übereinstimmen, vergleichen.

Ein Horizontalquerschnitt $\gamma^*$ von $R^*$ wird durch $F$ auf einen Horizontalquerschnitt $F(\gamma^*)$ von $S^*$ der $K$-fachen Länge und durch eine Vergleichsabbildung $H$ auf eine Kurve von mindestens der $K$-fachen Länge abgebildet, da sie dieselben Endpunkte auf $S^*$ hat wie $F(\gamma^*)$. Im Falle eines beliebigen $h$ wird man $\Phi^{-1}(\gamma^*)$ im Einheitskreis nehmen und deren $h$-Bild auf die Quadratwurzelfläche über der $w$-Ebene hinaufdrücken. Die entsprechende Kurve auf $S^*$ ist wegen der zwei Blätter nicht eindeutig bestimmt, aber ihre Länge ist es, und man kontrolliert leicht, daß diese mindestens gleich der Länge von $F(\gamma^*)$ ist, auch wenn die Kurve nicht dieselben Endpunkte wie $F(\gamma^*)$ besitzt. Diese Sachlage gestattet es, die Methode der SCHWARZschen Ungleichung auch hier anzuwenden.

3. O. TEICHMÜLLER [6] hat die extremale quasikonforme Abbildung des Einheitskreises auf sich bestimmt, die jeden Randpunkt festhält, aber den Nullpunkt in einen gegebenen Punkt $w_0 \neq 0$ überführt. Die Abbildung $\Phi$ bildet die zweiblättrige Überlagerungsfläche des Einheitskreises mit Windungspunkt im Nullpunkt, $\Psi$ diejenige mit Windungspunkt im Punkte $w_0$ je auf eine schlichte Ellipse $R^*$ beziehungsweise $S^*$ ab, die einander durch $F$ entsprechen. Die gesuchte Abbildung ist $f = \Psi^{-1} \circ F \circ \Phi$. (Die Zweideutigkeit von $\Phi$ wird durch $\Psi$ wieder aufgehoben.) Eine Vergleichsabbildung $h$ mit $h(0) = w_0$ induziert durch «Hinaufdrücken» eine Abbildung $H$ von $R^*$ auf $S^*$, die mit $F$ auf dem Rande von $R^*$ übereinstimmt, und hat daher größere maximale Dilatation als $f$, außer wenn $h = f$ ist. Es ist jedoch leicht zu sehen, daß in diesem Falle für Abbildungen $h$ mit $h(0) \neq w_0$ die Länge des Bildes eines Horizontalquerschnittes $\gamma^*$ von $R^*$ kleiner als das $K$-fache der Länge von $\gamma^*$ sein kann.

4. In diesem II. Teil wird der Satz 1 auf TEICHMÜLLERsche Abbildungen verallgemeinert. Die Bezeichnungsweise ist gegenüber der früheren Arbeit, deren Kenntnis nicht erforderlich ist, etwas anders gewählt.

## TEICHMÜLLERsche Abbildungen

5. *Wir bezeichnen mit $T$ die Menge aller topologischen Abbildungen $f$ von $|z| < 1$ auf $|w| < 1$, die mit Ausnahme höchstens isolierter Punkte von der Form «konform $\circ$ affin $\circ$ konform» sind. Das bedeutet: Mit Ausnahme einer*

*Punktmenge, die sich höchstens gegen* $|z| = 1$ *häuft, besitzt jeder Punkt des Einheitskreises eine Umgebung* $U$, *so daß in* $U$ *und* $V = f(U)$ *je eine eineindeutige konforme Abbildung* $\Phi = \Phi_U$ *beziehungsweise* $\Psi = \Psi_V$ *und eine affine Abbildung* $F = F_U$ *existieren, für welche in* $U$ *gilt* $f = \Psi^{-1} \circ F \circ \Phi$.

Mit $f$ ist auch $f^{-1}$ eine Abbildung dieser Klasse (von $|w| < 1$ auf $|z| < 1$).

Sind $U_1$ und $U_2$ zwei ausgezeichnete Umgebungen mit nicht-leerem Durchschnitt und $F_1$ und $F_2$ entsprechende affine Abbildungen mit den Dilatationen $K_1$ beziehungsweise $K_2$, so ist im gemeinsamen Teil $U_1 \frown U_2$ die Abbildung $f$ sowohl $K_1$ als auch $K_2$-quasikonform, und es muß daher $K_1 = K_2$ sein. Da man zwei beliebige ausgezeichnete Umgebungen durch eine zusammenhängende Kette von solchen miteinander verbinden kann, müssen alle lokalen affinen Abbildungen dieselbe Dilatation $K$ haben. $f$ ist somit eine $K$-quasikonforme Abbildung von $|z| < 1$ auf $|w| < 1$. Man kann die lokalen konformen Abbildungen $\Phi$ und $\Psi$ durch zusätzliche Ähnlichkeitstransformationen so abändern, daß $F$ die Form bekommt

$$w^* = F(z^*) = Kx^* + iy^* \quad (K \geqslant 1)$$

und damit von der Umgebung $U$ unabhängig wird.

Sei nun $K > 1$. Die Urbilder der Horizontalen $y^* =$ konst mittels der lokalen konformen Abbildung $\Phi_1$ sind die Linien größter Richtungsableitung von $f$ in $U_1$. Dasselbe gilt für $\Phi_2$ in $U_2$. Im Durchschnitt $U_1 \frown U_2$ müssen daher $\Phi_1$ und $\Phi_2$ gleich sein bis auf eine Ähnlichkeit mit reellem Koeffizienten $\lambda \neq 0: \Phi_2 = \lambda \Phi_1 + \mu$. Sind $\Psi_1$ und $\Psi_2$ die $\Phi_1$ beziehungsweise $\Phi_2$ entsprechenden lokalen konformen Abbildungen von $V_1 = f(U_1)$ beziehungsweise $V_2 = f(U_2)$, so besteht eine ebensolche Beziehung zwischen $\Psi_1$ und $\Psi_2$, und wegen

$$\Psi_2 = F(\Phi_2) = F(\lambda \Phi_1 + \mu) = \lambda F(\Phi_1) + F(\mu) = \lambda \Psi_1 + F(\mu)$$

erhalten wir denselben Koeffizienten $\lambda$ und die additive Konstante $\nu = F(\mu)$. Wählt man nun an Stelle des lokalen Abbildungspaares $(\Phi_2, \Psi_2)$ in den Umgebungen $U_2, V_2$ das Paar $(\tilde{\Phi}_2, \tilde{\Psi}_2) = \left(\frac{1}{\lambda}(\Phi_2 - \mu), \frac{1}{\lambda}(\Psi_2 - \nu)\right)$, so stimmen die neuen lokalen Abbildungen in den Durchschnitten $U_1 \frown U_2$ beziehungsweise $V_1 \frown V_2$ mit den alten überein. Ein beliebiges Paar $(\Phi_1, \Psi_1)$ von zusammengehörenden konformen Abbildungselementen kann demnach in den beiden punktierten Einheitskreisen $|z| < 1$ und $|w| < 1$ unbegrenzt fortgesetzt werden. *Die einander entsprechenden Abbildungselemente werden dadurch zu Funktionselementen je einer i. A. mehrdeutigen analytischen Funktion, die wir wieder mit* $\Phi$ *beziehungsweise* $\Psi$ *bezeichnen.* Die Bildflächen nennen wir $R^*$ beziehungsweise $S^*$. Die Abbildung $f$ hat nun die Darstellung

$f = \Psi^{-1} \circ F \circ \Phi$ im großen. Das Paar $(\Phi, \Psi)$ ist durch $f$ bis auf eine Transformation $\lambda\Phi + \mu$, $\lambda\Psi + \nu$, wo $\lambda \neq 0$ reell und $\nu = F(\mu)$ ist, eindeutig bestimmt.

6. Setzt man ein Funktionselement $\Phi_1$ von $\Phi$ längs einem geschlossenen Weg $\gamma$, der die Ausnahmepunkte meidet, und das entsprechende Element $\Psi_1$ von $\Psi$ längs $f(\gamma)$ fort, so geht es in $\lambda\Phi_1 + \mu$ beziehungsweise $\lambda\Psi_1 + {} + \nu$ $(\nu = F(\mu))$ über. Wählt man an Stelle von $\Phi_1$ ein anderes Ausgangselement $\Phi_2 = \lambda_1\Phi_1 + \mu_1$, so geht dieses bei der Fortsetzung längs $\gamma$ über in

$$\lambda_1(\lambda\Phi_1 + \mu) + \mu_1 = \lambda(\lambda_1\Phi_1 + \mu_1) + \mu_1(1 - \lambda) + \lambda_1\mu = \lambda\Phi_2 + \mu_1(1 - \lambda) + \lambda_1\mu,$$

das heißt der Koeffizient $\lambda$ hängt nur vom Weg, nicht aber von der Wahl des Ausgangselementes ab. *Wir setzen nun voraus, daß $\lambda = \pm 1$ sei für jeden solchen Weg $\gamma$. Das ist für $\Phi$ und $\Psi$ gleichzeitig der Fall, und es ist gleichbedeutend damit, daß $\varphi = \Phi'^2$ und $\psi = \Psi'^2$ eindeutige analytische Funktionen sind in den punktierten Einheitskreisen.*

Ist $z_0$, $w_0 = f(z_0)$ ein Paar von Ausnahmepunkten, und setzen wir die einander entsprechenden Zweige $\Phi_1$, $\Psi_1$ in hinreichend kleinen Umgebungen $U$ und $V = f(U)$ der Punkte $z_0$, $w_0$ unbegrenzt fort, so sind wegen der Darstellung $f = \Psi_1^{-1} \circ F \circ \Phi_1$ beide Zweige zugleich beschränkt oder unbeschränkt. Bei einmaligem Umlauf von $z_0$ beziehungsweise $w_0$ gehen sie über entweder in $\Phi_1 + \mu$, $\Psi_1 + \nu$ oder in $-\Phi_1 + \mu$, $-\Psi_1 + \nu$, wo $\nu = F(\mu)$ ist. Ist die Konstante $\mu = 0$ und $\lambda = 1$ für einen Zweig von $\Phi$, so ist sie es für alle; dann ist auch $\nu = 0$.

*$\Phi_1$ ist dann und nur dann beschränkt in $U$, wenn $\varphi$ an der Stelle $z_0$ regulär ist oder höchstens einen Pol 1. Ordnung besitzt.* Ist nämlich $\Phi_1$ beschränkt, so muß im ersten Falle $\mu = 0$ sein und daher $\Phi_1$ eindeutig in $U$ und gleich einer Potenzreihe in $z - z_0$, woraus die Regularität von $\varphi$ folgt. Im zweiten Fall ist $\Phi_1$ eine eindeutige Funktion von $\zeta = \sqrt{z - z_0}$ ($\Phi_1$ reproduziert sich bei zweimaligem Umlauf) und, da beschränkt, eine Potenzreihe in $\zeta$. Daraus folgt offenbar, daß $\left(\frac{d\Phi_1}{dz}\right)^2 = \left(\frac{d\Phi_1}{d\zeta}\frac{1}{2\sqrt{z - z_0}}\right)^2$ höchstens einen Pol erster Ordnung hat. Die Umkehrung ist evident, denn aus

$$\varphi(z) = (z - z_0)^n(a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \ldots), \quad n \geqq -1, \; a_n \neq 0$$

folgt

$$\Phi(z) = (z - z_0)^{\frac{n+2}{2}}(c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots), \quad c_0 \neq 0$$

Es sind dann offenbar alle Zweige von $\Phi$ und $\Psi$ über $U$ beziehungsweise $V$ beschränkt. Die Entwicklung von $\psi$ im Punkte $w_0$ hat die Form

$$\psi(w) = (w - w_0)^m(b_m + b_{m+1}(w - w_0) + \ldots), \quad m \geqq -1, \; b_m \neq 0$$

und
$$\Psi(w) = (w - w_0)^{\frac{m+2}{2}} (d_0 + d_1(w - w_0) + \ldots) , \quad d_0 \neq 0 .$$
Wir wollen zeigen, daß $m = n$ ist. Der Fall $\Phi_1 \to \Phi_1 + \mu$, $\Psi_1 \to \Psi_1 + \nu$ entspricht offenbar geraden Werten $n$ und $m$, der Fall $\Phi_1 \to -\Phi_1 + \mu$, $\Psi_1 \to -\Psi_1 + \nu$ ungeraden. Die Exponenten $m$ und $n$ sind daher beide gerade oder beide ungerade. Bei geradem $n$ wird eine einblättrige Umgebung von $z_0$ durch $\Phi_1$ auf eine $\frac{n+2}{2}$-blättrige von $\Phi_1(z_0)$ abgebildet, und da bei $F$ die Blätterzahl unverändert bleibt, muß der Exponent $m = n$ sein. Bei ungeradem $n$ wird eine zweiblättrige Umgebung von $z_0$ auf eine $n + 2$-blättrige abgebildet, und es muß daher aus demselben Grunde $m = n$ sein.

Eine beliebige $K$-quasikonforme Abbildung $w(z)$ besitzt fast überall ein totales Differential $dw = p\,dz + q\,d\bar{z}$, und der Betrag der komplexen Dilatation $\varkappa = \frac{q}{p}$ ist $|\varkappa| \leqslant k = \frac{K-1}{K+1}$. Zwei quasikonforme Abbildungen mit fast überall derselben komplexen Dilatation unterscheiden sich nur um eine konforme Transformation des Bildgebietes (LEHTO & VIRTANEN [2]). Die komplexe Dilatation unserer Abbildung $f$ ist außer in den kritischen Punkten von $f$ gleich $\varkappa_f = k \frac{\bar{\varphi}}{|\varphi|}$. Sei nun umgekehrt $\varphi$ bis auf Pole höchstens erster Ordnung regulär in $|z| < 1$, $0 < k < 1$, und $f$ quasikonform mit der komplexen Dilatation $\varkappa = k \frac{\bar{\varphi}}{|\varphi|}$. Wir betrachten im Einheitskreis der $z$-Ebene eine hinreichend kleine Umgebung $U$, die keinen kritischen Punkt von $\varphi$ (Pol oder Nullstelle) enthält und $V = f(U)$. $U$ wird durch einen Zweig von $\Phi = \int \sqrt{\varphi(z)}\,dz$ konform auf eine schlichte Umgebung $U^*$ in der $z^*$-Ebene abgebildet, die wir der Horizontalstreckung $F$ mit der Dilatation $K$ unterwerfen. Das Bild sei $V^*$. Die Abbildung $F \circ \Phi$ von $U$ auf $V^*$ hat die komplexe Dilatation $k \frac{\bar{\varphi}}{|\varphi|}$, und es gibt daher eine konforme Abbildung $\Psi$ von $V$ auf $V^*$, so daß in $U$ $f = \Psi^{-1} \circ F \circ \Phi$ ist. $f$ ist daher von der Form $f = \Psi^{-1} \circ F \circ \Phi$ im großen, mit $\Phi'^2 = \varphi$.

**Definition:** *Unter einer* TEICHMÜLLER*schen Abbildung $f$ von $|z| < 1$ auf $|w| < 1$ verstehen wir eine quasikonforme Abbildung mit der komplexen Dilatation $k \frac{\bar{\varphi}}{|\varphi|}$, wo $\varphi$ bis auf Pole 1. Ordnung in $|z| < 1$ regulär analytisch und $0 \leqslant k < 1$ ist.*[1] *Ist insbesondere $\varphi$ regulär, so nennen wir $f$ regulär.*

---

[1]) Wenn man nicht einen einheitlichen Parameter $z$ hat, wie das hier der Fall ist, so ist das quadratische Differential $\varphi dz^2$ die invariante Größe.

7. Wir betrachten nun speziell reguläre TEICHMÜLLERsche Abbildungen. Ist $\Phi$ eindeutig, so ist
$$\iint\limits_{|z|<1} |\Phi'|^2\, dx\,dy = \iint\limits_{|z|<1} |\varphi|\, dx\,dy$$
gleich dem Inhalt der Bildfläche $R^*$ über der $z^*$-Ebene, und die Endlichkeit dieses Integrals, die nur von $f$ abhängt, ist hinreichend dafür, daß $f$ einzige Extremale ist. Wir wollen nun zeigen, daß das auch im allgemeinen Falle gilt. Die geometrische Bedeutung von $\iint\limits_{|z|<1} |\varphi|\, dx\,dy$ ist evident: Zerlegt man den Einheitskreis in ein oder mehrere einfach zusammenhängende Gebiete $G_j$, die keine kritischen Stellen (= Nullstellen) von $\varphi$ im Innern enthalten, und so, daß die gesamte Berandung den Flächeninhalt null hat – zum Beispiel in *ein* Gebiet, indem man von den kritischen Stellen aus zum Rand $|z| = 1$ radial aufschlitzt – so kann man in jedem derselben einen eindeutigen Zweig von $\Phi$ auswählen. Das Integral $\iint\limits_{G_j} |\Phi'|^2\, dx\,dy = \iint\limits_{G_j} |\varphi|\, dx\,dy$ ist von der Wahl dieses Zweiges unabhängig und $\iint\limits_{|z|<1} |\varphi|\, dx\,dy$ gibt den Gesamtflächeninhalt der Bilder aller $G_j$ durch die Zweige $\Phi_j$.

**Satz:** *Eine reguläre* TEICHMÜLLER*sche Abbildung $f$ von $|z| < 1$ auf $|w| < 1$ mit endlichem $\iint\limits_{|z|<1} |\varphi|\, dx\,dy$ ist für die durch sie induzierte Randabbildung die einzige extremale quasikonforme Abbildung.*

## Die Metrik $|\varphi|^{\frac{1}{2}}\, |dz|$

8. Sei $\varphi(z)$ analytisch im Einheitskreis. Wir betrachten die Metrik $|\varphi|^{\frac{1}{2}}\, |dz|$.[2]) Die lokalen Eigenschaften der Geodätischen findet man am bequemsten, wenn man in der Umgebung des interessierenden Punktes $z_0$ die Abbildung $z^* = \Phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} \sqrt{\varphi(z)}\, dz$ einführt, womit $|dz^*| = \left|\frac{d\Phi}{dz}\right| |dz| = |\varphi|^{\frac{1}{2}}\, |dz|$ wird. Auf dem Flächenstück $R^*$ existiert die kürzeste Verbindung zweier hinreichend nahe am Nullpunkt gelegenen Punkte stets und ist eindeutig bestimmt: Sie besteht aus der Verbindungsstrecke, falls die beiden Punkte im selben Halbblatt liegen, und sonst aus den beiden Verbindungsstrecken zum Windungspunkt. Bei ungeradem $n$ sind dabei Punkte auf $R^*$, deren Argumente sich um $(2 + n)\pi$ unterscheiden, als gleichwertig zu betrachten, da ihre Urbilder übereinanderliegen. Daraus folgt auch, daß zwei Teilbogen einer geodätischen Linie stets mindestens einen Winkel von $\frac{2\pi}{n+2}$ bilden.

[2]) Die Sätze dieser Nr. finden sich in der Literatur und sind hier nur der Vollständigkeit halber wiedergegeben. Siehe zum Beispiel AHLFORS [1], S. 28/29.

Ist $\gamma$ eine rektifizierbare Jordankurve in $|z| < 1$, die mindestens an den Nullstellen $z_k$ von $\varphi$ einseitige Tangenten besitzt, deren innere Zwischenwinkel wir mit $\omega_k$ bezeichnen, so ergibt das Argumentprinzip

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma d\arg\varphi(z) = \sum_j n_j + \sum_k \frac{\omega_k}{2\pi} n_k\,,$$

wobei die $n_j$ die Vielfachheiten der inneren Nullstellen von $\varphi$ und die $n_k$ diejenigen der Nullstellen $z_k$ auf dem Rande $\gamma$ sind: Nullstellen auf dem Rande sind nur zu einem Teil, nämlich mit dem Bruchteil des inneren Winkels von $2\pi$ zu rechnen. (Sind auch Pole vorhanden, so sind deren Vielfachheiten mit Minuszeichen mitzunehmen.)

Unter einem *geodätischen Polygonzug* verstehen wir eine Kurve, deren Seiten geodätische Linien sind, die nicht durch kritische Punkte von $\varphi$ gehen. Die «Ecken» sind die kritischen Stellen von $\varphi$ und dazu beliebige weitere Punkte, aber höchstens endlich viele. Ein *geodätisches Polygon* ist außerdem eine Jordankurve. Längs einer Seite eines geodätischen Polygons ist offenbar das Argument von $d\Phi^2 = \varphi dz^2 =$ konst und daher $d(\arg\varphi) = -2d(\arg dz)$. Da die gesamte Drehung des Argumentes von $dz$ auf den Seiten $2\pi - \sum_k(\pi - \omega_k)$ ist, erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma d(\arg\varphi) = \sum_j n_j + \sum_k \frac{\omega_k}{2\pi} n_k = -\frac{1}{\pi}\left(2\pi - \sum_k(\pi - \omega_k)\right)$$

und daraus die Winkelrelation

$$2 + \sum_j n_j = \sum_k\left(1 - \frac{1}{2\pi}\,\omega_k(2 + n_k)\right)$$

und die Ungleichung $\sum_k\left(1 - \frac{1}{2\pi}\,\omega_k(2 + n_k)\right) \geqslant 2\,.$

Aus dieser Ungleichung schließt man leicht, daß sich zwei Punkte $z_1$ und $z_2$ höchstens durch eine geodätische Linie verbinden lassen. Sind nämlich $\gamma_1$ und $\gamma_2$ zwei kürzeste Verbindungskurven von $z_1$ und $z_2$, die nicht zusammenfallen, so gibt es zwei Punkte $z_1'$ und $z_2'$, die beide sowohl auf $\gamma_1$ als auch auf $\gamma_2$ liegen, aber so, daß die beiden Verbindungsbogen dieser Punkte ein geodätisches Polygon bilden. Wenden wir auf dieses die obige Ungleichung an, so ergibt sich ein Widerspruch, da alle Winkel $\omega_k \geqslant \dfrac{2\pi}{n_k + 2}$ sind, außer höchstens bei $z_1'$ und $z_2'$, wo sie aber jedenfalls noch positiv sind.

Bei diesem Eindeutigkeitsbeweis benützt man nur, daß $\gamma_1$ und $\gamma_2$ lokal geodätisch sind. Eine Kurve heißt lokal geodätisch, wenn jeder Punkt eine Umgebung besitzt, in der sie zwischen zwei beliebigen ihrer Punkte die kürzeste Verbindung darstellt. Wir haben somit bewiesen:

**Lemma 1:** *Zwei Punkte $z_1$ und $z_2$ lassen sich höchstens durch eine lokal geodätische Linie verbinden.*

Dies gilt auch, wenn $z_1 = z_2$ ist. *Eine geschlossene Linie, die außerhalb höchstens eines ihrer Punkte lokal geodätisch ist, reduziert sich auf diesen Punkt.* Ist nämlich $z_1$ dieser Punkt, so könnte man andernfalls einen weiteren Teilungspunkt $z_2$ einführen. Die Kurve müßte dann aus einem einzigen Verbindungsbogen der Punkte $z_1$ und $z_2$ bestehen und wäre bei $z_2$ nicht lokal geodätisch. Das ist jedoch nur eine scheinbare Verschärfung des Eindeutigkeitssatzes, wie das folgende Lemma zeigt.

9. **Lemma 2:** *Eine Verbindungskurve $\gamma$ zweier Punkte $z_1$ und $z_2$, die lokal geodätisch ist, ist es auch im großen.*

*Beweis:* Sei $\gamma$ eine lokal geodätische Verbindungslinie von $z_1$ und $z_2$ und $\tilde{\gamma}$ eine beliebige weitere Verbindungskurve. Es ist zu zeigen, daß die Länge $|\tilde{\gamma}| \geqslant |\gamma|$ ist. Wir dürfen die Kurve $\tilde{\gamma}$ als geodätischen Polygonzug voraussetzen, da wir sie sonst hinreichend fein unterteilen und die einzelnen Intervalle durch lokale Geodätische ersetzen könnten; dabei würde die Länge höchstens verkleinert.

Wir wählen $z_1'$ und $z_2'$ so, daß sie auf beiden Kurven liegen und die Zwischenstücke keine weiteren Punkte gemeinsam haben. Da eventuell vorhandene gemeinsame Stücke von $\gamma$ und $\tilde{\gamma}$ gleiche Länge haben, genügt es, die Ungleichung für solche Jordanpolygone zu beweisen und dann aufzusummieren. Wir können also zum vorneherein voraussetzen, daß $\gamma$ und $\tilde{\gamma}$ zusammen ein geodätisches Polygon bilden. Unter allen Verbindungskurven von $z_1$ und $z_2$, die in der abgeschlossenen Hülle $\overline{G}$ des Innengebietes $G$ dieses Polygons liegen, gibt es eine kürzeste. Ist nämlich $l_0 > 0$ die untere Grenze der Längen aller in $\overline{G}$ gelegenen Verbindungskurven, so gibt es jedenfalls eine Minimalfolge $\gamma_n$, $l_n = |\gamma_n| \to l_0$. Sei $g_n(t), 0 \leqslant t \leqslant 1$, die Parameterdarstellung von $\gamma_n$, wobei der Parameter $t = \frac{s_n}{l_n}$ und $s_n$ die Bogenlänge ist. Jeder Punkt $z \in \overline{G}$ ist Mittelpunkt eines geodätischen Kreises in $|z| < 1$ von einem Radius $\varrho$ (entsprechend einer Kreisumgebung in der $\Phi$-Ebene), so daß auch der Kreis mit dem Radius $2\varrho$ außer höchstens $z$ keinen kritischen Punkt von $\varphi$ enthält. Durch endlich viele solcher Umgebungen $U$ können wir $\overline{G}$ überdecken und dann eine Unterteilung des Parameterintervalles in gleiche Teile so vornehmen, daß das $g_n$-Bild jedes Teilintervalles für jedes $n$ ganz in einem $\overline{U}$ liegt. Die Teilungspunkte bezeichnen wir mit $t_j$, und wir können eine Teilfolge der $g_n$ finden, die auf den $t_j$ konvergiert; die Limites nennen wir $z_j$. Diese $z_j$ verbinden wir nun mit den benachbarten Punkten durch die lokale Geodätische, falls die betreffende Umgebung ganz in $\bar{G}$ liegt; andernfalls durch die kürzeste Verbindung in $\bar{U} \cap \bar{G}$, die offenbar auch existiert. Wir erhalten dadurch einen geodätischen Polygonzug $\gamma_0$, der $z_1$ mit $z_2$ in $\bar{G}$ verbindet, und dessen Länge daher $|\gamma_0| \geqslant l_0$ ist. Anderseits ist diese für hinreichend große $n$ offensichtlich beliebig wenig größer als $|\gamma_n|$, woraus $|\gamma_0| = l_0$ folgt.

$\gamma_0$ ist natürlich ein Jordanbogen und hat daher zwei Seiten. Wir bezeichnen die Winkel auf der Seite von $\gamma$ als die inneren. Wir dürfen auf $\gamma_0$ zusätzliche Teilungspunkte wählen, so daß die Seiten lokale geodätische werden, die keinen kritischen Punkt von $\varphi$ enthalten. Sei $z_0$ nun eine Ecke von $\gamma_0$. Wäre der innere Winkel $\omega_0 < \dfrac{2\pi}{n_0 + 2}$, so könnte $z_0$ nicht auf $\gamma$ liegen, und man könnte daher einen Bogen von $\gamma_0$, der $z_0$ enthält, durch einen kürzeren ersetzen, der auch in $\bar{G}$ liegt, was auf Grund der Konstruktion von $\gamma_0$ nicht sein kann. Es sind daher alle inneren Winkel $\geqslant \dfrac{2\pi}{n_j + 2}$ und man schließt wie oben, daß $\gamma = \gamma_0$ sein muß. Daraus folgt wegen $|\gamma_0| \leqslant |\tilde{\gamma}|$, daß $|\gamma| \leqslant |\tilde{\gamma}|$, q. e. d.

**Korollar:** Das Urbild $\gamma = \Phi^{-1}(\gamma^*)$ einer Geraden $\gamma^*$ auf $R^*$, die durch keinen Windungspunkt von $R^*$ geht, ist durch $\arg (d\Phi)^2 = \arg \varphi dz^2 = $ $=$ konst ausgezeichnet. $\gamma$ heißt insbesondere eine Trajektorie oder orthogonale Trajektorie von $\varphi$, wenn dieses Argument gleich 0 beziehungsweise $\pi$, das heißt $\varphi dz^2 > 0$ beziehungsweise $< 0$ ist. *Eine solche Linie ist zwischen zwei beliebigen ihrer Punkte geodätisch.*

## Geometrische Hilfsbetrachtungen

10. *Jede Trajektorie $\gamma$ ist ein Querschnitt von $|z| < 1$.* Nach Lemma 1 kann $\gamma$ keinen Doppelpunkt haben und ist daher ein offener Jordanbogen. Die beiden Enden von $\gamma$ haben keinen Häufungspunkt in $|z| < 1$. Wäre nämlich $z_0$ ein solcher Häufungspunkt, so gäbe es eine Folge von Punkten $z_n^*$ auf $\gamma^*$, die gegen den Rand von $R^*$ gehen, und deren Urbilder $z_n =$ $= \Phi^{-1}(z_n^*)$ nach $z_0$ streben. Wir wählen eine Umgebung $U$ von $z_0$ so klein, daß darin zwei beliebige Punkte sich geodätisch verbinden lassen, und $m$ und $n \neq m$ so groß, daß $z_m \in U$, $z_n \in U$, aber der Verbindungsbogen von $z_m$ und $z_n$ nicht ganz in $U$ liegt. Dieser ist eine von der lokalen kürzesten Verbindung verschiedene lokal geodätische Linie zwischen $z_m$ und $z_n$, im Widerspruch zu Lemma 1.

11. Wir betrachten ein senkrechtes offenes Intervall $\beta^*$ auf $R^*$, das keinen Windungspunkt von $R^*$ trifft, und ziehen von den Punkten von $\beta^*$ aus die Horizontalen $\gamma^*$ bis zum nächsten Windungspunkt beziehungsweise bis zum Rand von $R^*$. Wir erhalten auf diese Weise ein offenes, einfach zusammenhängendes, über der $z^*$-Ebene schlichtes Gebiet $G^*$ auf $R^*$, das wir einen *offenen Horizontalstreifen* (den zu $\beta^*$ gehörigen) nennen wollen. $G = \Phi^{-1}(G^*)$ ist ein schlichtes Gebiet des Einheitskreises. Gäbe es nämlich zwei Punkte $z_1^*$ und $z_2^* \neq z_1^*$ in $G^*$, die auf denselben Punkt $z$ abgebildet werden, so könnten vorerst $z_1^*$ und $z_2^*$ nicht auf derselben Horizontalen liegen, sonst wäre das $\Phi$-Urbild des Intervalles $z_1^* \ldots z_2^*$ eine geschlossene Trajektorie. Liegen sie auf verschiedenen Horizontalen, so betrachten wir das Zwischenintervall auf $\beta^*$. Dessen Urbild ist eine orthogonale Trajektorie, deren beide Endpunkte auf der Trajektorie durch den Punkt $z$ liegen, was wieder einen Widerspruch gegen Lemma 1 bedeutet. $G = \Phi^{-1}(G^*)$ besteht aus einer orthogonalen Trajektorie $\beta$ und den durch ihre Punkte gehenden Trajektorien, wobei jedoch kritische Punkte von $\varphi$ nicht überschritten werden.

Unter einem *Horizontalstreifen* $E^*$ verstehen wir eine Teilmenge von Horizontalen eines offenen Streifens, deren Ordinaten eine meßbare Teilmenge von $\beta^*$ darstellen. Auch für diese gilt daher, daß $E = \Phi^{-1}(E^*)$ schlicht ist in $|z| < 1$. Dem Streifen $E^*$ ordnen wir eine Funktion $l(y^*)$ zu: Ihr Wert ist gleich der Länge der Horizontalen in $E^*$ mit der Ordinate $y^*$, wenn es eine solche gibt, sonst null. Wegen $\iint\limits_{E^*} \left| \frac{d\Phi^{-1}}{dz^*} \right|^2 dx^* dy^* \leqq \pi$ folgt aus der SCHWARZschen Ungleichung, daß fast alle Urbilder der Horizontalen eines Streifens endliche Länge, und daher um so mehr konvergente Enden haben. Das Flächenmaß eines Streifens ist $\iint\limits_{E} |\Phi'|^2 dxdy \leqq \iint\limits_{|z|<1} |\varphi| dxdy < \infty$.

12. Auf der Fläche $R^*$ läßt sich eine Folge außerhalb voneinander liegender Streifen $E_n^*$ angeben, deren Urbilder $E_n = \Phi^{-1}(E_n^*)$ keine gemeinsamen Punkte haben und $|z| < 1$ bis auf eine Punktmenge vom Maße null (sogar bis auf die kritischen Punkte von $\varphi$) ausschöpfen. Zum Beweis wählen wir auf $R^*$ eine überall dichte, abzählbare Punktmenge $\{P_j^*\}$ und durch jedes $P_j^*$ eine offene Vertikalstrecke $\beta_j^*$ (die wir etwa bis zum Rande oder bis zum nächsten Windungspunkt verlängern). Zu jeder dieser Strecken konstruieren wir den offenen Horizontalstreifen $G_j^*$; offenbar liegt jeder Punkt $P^* \in R^*$, der kein Windungspunkt ist, in mindestens einem $G_j^*$, und daher jeder nichtkritische Punkt von $|z| < 1$ in einem $G_j$. Wir zerlegen nun $|z| < 1$ in der folgenden Weise:

$$G_1 + (G_2 - G_1) + (G_3 - (G_1 \cup G_2)) + \ldots + (G_n - (G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_{n-1})) + \cdots$$

Die $E_n = G_n - (G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_{n-1})$ sind offenbar getrennt und schöpfen

$|z| < 1$ bis auf die kritischen Punkte von $\varphi$ aus. Ist $z \in G_n \cap G_m$, so gilt dies für alle Trajektorien, die durch eine Umgebung von $z$ gehen, und daher ist der Teil $E_n^*$ von $G_n^*$, der durch $\Phi^{-1}$ auf $E_n$ abgebildet wird, offenbar ein Streifen. Das sind die gesuchten Streifen $E_n^*$.

## Der Eindeutigkeitsbeweis

13. Sei $f = \Psi^{-1} \circ F \circ \Phi$ eine reguläre TEICHMÜLLERsche Abbildung von $|z| < 1$ auf $|w| < 1$ mit endlichem $\iint\limits_{|z|<1} |\varphi|\, dxdy$ und $h$ eine Vergleichsabbildung. Mit $\gamma_z$ bezeichnen wir eine konvergente Trajektorie von $\varphi$. Die Kurve $f(\gamma_z) = \gamma_w$ ist dann eine konvergente Trajektorie von $\Psi$, denn sie ist das $\Psi$-Urbild eines Horizontalquerschnittes von $S^*$ und konvergiert, weil $f$ quasikonform ist. Das $h$-Bild von $\gamma_z$, das wir mit $h(\gamma_z) = \tilde{\gamma}_w$ bezeichnen, ist ein Querschnitt von $|w| < 1$ mit den selben Endpunkten wie $\gamma_w$. Da $|dw^*| = \left|\dfrac{d\Psi}{dw}\right| |dw| = |\psi|^{\frac{1}{2}} |dw|$ eindeutig ist, hat $\tilde{\gamma}_w$ in dieser Metrik eine bestimmte Länge (die $= \infty$ sein kann). Wir erhalten sie, indem wir ein (nicht eindeutig bestimmtes) $\Psi$-Bild von $\tilde{\gamma}_w$ betrachten und die Länge desselben in der Metrik der $w^*$-Ebene messen. Wir können uns etwa auf diejenigen $\gamma_w$ beschränken, die durch keinen kritischen Punkt von $\psi$ gehen, indem wir nur Trajektorien zulassen, die die $h$-Urbilder der kritischen Punkte von $\psi$ in $|z| < 1$ meiden. Für diese Länge gilt $|\tilde{\gamma}_w| = \int\limits_{\tilde{\gamma}_w} |\psi|^{\frac{1}{2}} |dw| \geqq |\gamma_w|$.

Zum Beweis benützen wir Lemma 2 und die Forderung, daß $\iint |\varphi|\, dydx < \infty$ ist. Die Trajektorie $\gamma_w$ ist zwischen zwei beliebigen ihrer Punkte Geodätische. Sei $w_0$ ein Endpunkt von $\gamma_w$. Wir betrachten die von den Punkten von $\gamma_w$ ausgehenden Bogen auf den Kreisen $|w - w_0| = \varrho$, solange sie in $|w| < 1$ liegen und keinen kritischen Punkt von $\psi$ treffen. Fast alle haben einen Punkt mit $\tilde{\gamma}_w$ gemeinsam. Ihre Länge, gemessen in der Metrik $|\psi|^{\frac{1}{2}} |dw|$, bezeichnen wir mit $L(\varrho) = \int |\psi|^{\frac{1}{2}} |dw| = \int |\psi|^{\frac{1}{2}} \varrho\, d\vartheta$. Aus der SCHWARZschen Ungleichung ergibt sich auf bekannte Weise

$$L^2(\varrho) \leqq \varrho\pi \int |\psi|\, \varrho d\vartheta$$

und daraus

$$\int\limits_0 \frac{L^2(\varrho)}{\varrho}\, d\varrho \leqq \pi \cdot \iint\limits_{|w|<1} |\psi|\, \varrho d\varrho d\vartheta = \pi \cdot K \iint\limits_{|z|<1} |\varphi|\, dxdy < \infty .$$

Daher gibt es für beliebig kleine Werte von $\varrho$ beliebig kurze Verbindungsbogen von $\gamma_w$ und $\tilde{\gamma}_w$. Daraus folgt offenbar $|\tilde{\gamma}_w| \geqq |\gamma_w|$.

14. Das totale Differential $dw = p dz + q d\bar{z}$ der Abbildung $h$ existiert fast überall in $|z| < 1$. Lokal lassen sich die drei Abbildungen $\Phi^{-1}$, $h$, $\Psi$ außerhalb der kritischen Punkte von $\varphi$ und $\psi$ zusammensetzen; dabei existiert das Differential $dw^* = p^* dz^* + q^* d\overline{z^*}$ der Zusammensetzung fast überall auf $R^*$ und ist bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt. Der Flächeninhalt der Vereinigungsmenge der Streifen $E_j^*$, gemessen in dieser Metrik, ist offenbar

$$\iint_{\Sigma_j E_j^*} (|p^*|^2 - |q^*|^2) dx^* dy^* = \iint_{|w|<1} |\psi| du dv = K \iint_{|z|<1} |\varphi| dx dy =: K \Sigma_j |E_j^*| ,$$

währenddem die Länge $L_j(y^*)$ eines Horizontalquerschnittes von $E_j^*$ nach obigem für fast alle $y^*$

$$L_j(y^*) = \int |dw^*| = \int |p^* + q^*| dx^* \geqslant K l_j(y^*)$$

wird, wo $l_j(y^*)$ die Länge der Horizontalen von $E_j^*$ in der Metrik der zu Grunde liegenden $z^*$-Ebene bedeutet. Wenden wir nun die Methode der SCHWARZschen Ungleichung auf die Vereinigung der Streifen $E_j^*$ an, so erhalten wir folgendes:

$$K \Sigma_j \int l_j(y^*) dy^* \leqslant \iint_{\Sigma_j E_j^*} |p^* + q^*| dx^* dy^* ,$$

daraus mittels der SCHWARZschen Ungleichung

$$K^2 (\Sigma_j |E_j^*|)^2 \leqslant \Big( \iint_{\Sigma_j E_j^*} |p^* + q^*| dx^* dy^* \Big)^2 \leqslant$$

$$\iint_{\Sigma_j E_j^*} (|p^*|^2 - |q^*|^2) dx^* dy^* \iint_{\Sigma_j E_j^*} \frac{|p^* + q^*|^2}{|p^*|^2 - |q^*|^2} dx^* dy^*$$

$$= K (\Sigma_j |E_j^*|) \iint_{\Sigma_j E_j^*} \frac{|1 + \varkappa^*|^2}{1 - |\varkappa^*|^2} dx^* dy^* .$$

Hier ist $\varkappa^* = \dfrac{q^*}{p^*}$ die eindeutig bestimmte komplexe Dilatation des Differentials $dw^* = p^* dz^* + q^* d\overline{z^*} = p^* \Phi'(z) dz + q^* \overline{\Phi'}(z) d\bar{z}$. Aus $dw^* = \dfrac{dw^*}{dw} dw = \Psi'(w)(p dz + q d\bar{z})$ folgt $\varkappa = \dfrac{q}{p} = \dfrac{q^* \overline{\Phi'}(z)}{p^* \Phi'(z)} = \varkappa^* \dfrac{\bar{\varphi}}{|\varphi|}$ und daher $|\varkappa^*| = |\varkappa| \leqslant \tilde{k}$ fast überall, wobei $\tilde{K} = \dfrac{1 + \tilde{k}}{1 - \tilde{k}}$ die maximale Dilatation der Abbildung $h$ bedeutet. Die Abschätzung

$$|1 + \varkappa^*|^2 = 1 + |\varkappa^*|^2 + 2 Re\, \varkappa^* \leqslant (1 + \tilde{k})^2 - 2(\tilde{k} - Re\, \varkappa^*)$$

ergibt

$$\frac{|1 + \varkappa^*|^2}{1 - |\varkappa^*|^2} \leqslant \tilde{K} - \frac{2}{1 - \tilde{k}^2} (\tilde{k} - Re\, \varkappa^*)$$

und damit

$$K^2(\sum_j |E_j^*|)^2 \leqslant K(\sum_j |E_j^*|)\left(\tilde{K}(\sum_j |E_j^*|) - \frac{2}{1-\tilde{k}^2} \iint_{\sum_j E_j^*} (\tilde{k} - Re\,\varkappa^*)\,dx^*dy^*\right) \leqslant$$

$$\leqslant K\tilde{K}(\sum_j |E_j^*|)^2 .$$

Daraus folgt $K \leq \tilde{K}$, und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn fast überall $\varkappa^* = \tilde{k}$ und daher $\varkappa = \frac{\overline{\varphi}}{|\varphi|}\tilde{k}$ ist.

Die komplexe Dilatation der Abbildung $f$ mit dem Differential $dw = \frac{dw}{dw^*}dw^* = \Psi'^{-1}\frac{K+1}{2}(dz^* + k\overline{dz^*}) = \Psi'^{-1}\frac{K+1}{2}(\Phi' dz + \overline{\Phi'}k\overline{dz})$ ist $k\frac{\overline{\varphi}}{|\varphi|}$. Aus der Gleichung $K = \tilde{K}$ folgt somit, daß $h$ und $f$ fast überall in $|z| < 1$ dieselbe komplexe Dilatation haben und daraus, daß sie bis auf eine konforme Transformation der $w$-Ebene gleich sind. Wegen der Übereinstimmung auf dem Rand $|w| = 1$ müssen sich somit identisch sein.

## LITERATUR

[1] L. V. Ahlfors: *On quasiconformal mappings.* J. d'analyse math. III (1953/54), 1–58.

[2] O. Lehto-K. Virtanen: *On the existence of quasiconformal mappings with prescribed complex dilation.* Ann. Acad. Sci. Fenn. 274 (1960), 1–23.

[3] E. Reich: *Sharpened distortion theorems of quasiconformal mapping.* Notices of the Amer. Math. Soc. 10 (1963) 81.

[4] K. Strebel: *Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises.* Comment. Math. Helv. 36 (1962), 306–323.

[5] O. Teichmüller: *Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale.* Abh. Preuss. Acad. Wiss. math.-naturw. Kl. 22 (1939), 1–197.

[6] O. Teichmüller: *Ein Verschiebungssatz der quasikonformen Abbildung.* Deutsche Mathematik 7 (1944), 336–343.

(Eingegangen den 10. Oktober 1963)