Sur quelques formules du calcul de Ricci global.

Autor(en): **Vaisman, Izu**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **41 (1966-1967)**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-31372

Sur quelques formules du calcul de Ricci global

par IZU VAISMAN

1. Introduction

Récemment, divers auteurs ont réalisé la globalisation du calcul différentiel absolu, ou calcul de Ricci, en présentant sous une forme globale les tenseurs d'une variété différentiable et leurs dérivées covariantes. On en trouve des exposés systématiques dans les livres de S. HELGASON [2] (dans lequel on trouve aussi la bibliographie du problème) et M. M. POSTNIKOV [5] (voir encore le livre de NOMIZU [3] et le mémoire de J. SCHMID [7]).*)

Ici, nous nous proposons de donner certains nouveaux résultats concernant les espaces à connexion linéaire, les dérivées de Lie, les espaces munis de deux connexions linéaires et les groupes de cohomologie d'une variété différentiable.

Pour éviter les répétitions, convenons une fois pour toutes d'employer les notations et les définitions de [2]. En particulier, nous notons par M une variété C^∞-différentiable et à n dimensions, par $\mathfrak{F}$ l'algèbre des fonctions réelles de classe C^∞ sur M, par $\mathfrak{D}_s^r$ le module des champs de tenseurs réguliers du type (r, s) (et aussi $\mathfrak{D}_s^0 = \mathfrak{D}_s$, $\mathfrak{D}_0^r = \mathfrak{D}^r$) et par $\mathfrak{D}$ l'algèbre tensorielle de M, considérée comme algèbre sur les nombres réeles et avec $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{D}$.

2. Prolongements de champ de vecteurs

Tout d'abord nous allons nous occuper d'une catégorie d'opérateurs différentiels, agissant sur les champs de tenseurs.*)

Définition. Appelons *prolongement de champ de vecteurs* ou p.c.v. une dérivation de l'algèbre $\mathfrak{D}$ qui garde le type des tenseurs, c'est-à-dire une application $\mathrm{D}: \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$, qui garde le type des tenseurs et pour laquelle on a

1°. $$\mathrm{D}(T_1 + T_2) = \mathrm{D}\, T_1 + \mathrm{D}\, T_2,$$

2°. $$\mathrm{D}(T_1 \otimes T_2) = \mathrm{D}\, T_1 \otimes T_2 + T_1 \otimes \mathrm{D}\, T_2,$$

$(T_1, T_2 \in \mathfrak{D})$. Appelons *restriction d'un p.c.v.* D le champ de vecteurs Res D, défini par la restriction de D à $\mathfrak{F}$.

---

*) Un autre exposé détaillé se trouve dans le livre de S. Kobayaschi et K. Nomizu - *Foundations of differential geometry Interscience Publ. New York* 1963, qui m'est parvenu ultérieurement. Nous signalons que les *dérivations* considérées par ces auteurs sont les p.c.v. de la première espèce envisagées dans la présente Note.

On a donc

$$(\operatorname{Res} D)(f) = Df \qquad (f \in \mathfrak{F}). \tag{2.1}$$

On dit encore que D est un *prolongement de Res* D.

Il est simple de voir que, si D_1 et D_2 sont des p.c.v., alors $D_1 + D_2, fD_1 (f \in \mathfrak{F})$ et $D_1 D_2 - D_2 D_1$ en sont également; le dernier sera noté encore par $[D_1, D_2]$ et sera appelé le *crochet* des deux p.c.v. donnés – il satisfait aux identités bien connues de Jacobi. De même, on a

$$\begin{gathered}\operatorname{Res}(D_1 + D_2) = \operatorname{Res} D_1 + \operatorname{Res} D_2; \quad \operatorname{Res}(fD) = f \operatorname{Res} D;\\ \operatorname{Res}[D_1, D_2] = [\operatorname{Res} D_1, \operatorname{Res} D_2].\end{gathered} \tag{2.2}$$

Il en suit que l'ensemble des p.c.v. de M est un module sur $\mathfrak{F}$ et une algèbre de Lie sur les réeles; nous le noterons par $\mathfrak{P}(M)$ ou simplement par $\mathfrak{P}$. Les formules (2.2) montrent que l'application

$$\operatorname{Res}: \mathfrak{P} \to \mathfrak{D}^1 \tag{2.3}$$

est un homomorphisme. Plus tard, nous verrons qu'elle est un épimorphisme.

On sait [2] qu'un élément $T \in \mathfrak{D}$ peut s'identifier à une fonction, qui attache à chaque point $p \in M$ un tenseur T_p en ce point, celui-ci dépendant d'une manière différentiable de p. Il en suit qu'un p.c.v. peut s'identifier à une fonction, qui attache à chaque point $p \in M$ une différentiation de l'algèbre tensorielle de ce point $\mathfrak{D}(p)$, celle-ci dépendant d'une manière différentiable de p, dans le sens que si T est un champ différentiable de tenseurs, la même chose a lieu pour D T. La démonstration détaillée de cette affirmation reprend les méthodes utilisées, dans les situations analogues par [2] et c'est pourquoi nous ne la donnons pas.

Compte tenu de cette observation, nous avons maintenant:

THÉORÈME. *Un p.c.v. sur M est uniquement déterminé par ses restrictions à* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{D}^1$ *et* $\mathfrak{D}_1$.

En effet, sur un voisinage de coordonnées, on a pour un champ T quelconque de tenseurs

$$T = a^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \omega^{j_1} \otimes \omega^{j_2} \otimes \dots \otimes \omega^{j_s} \otimes X_{i_1} \otimes X_{i_2} \otimes \dots \otimes X_{i_r},$$

où

$$a^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \in \mathfrak{F}, \; \omega^{j_h} \in \mathfrak{D}_1 \quad \text{et} \quad X_{i_k} \in \mathfrak{D}^1.$$

Alors par les conditions 1° et 2° de la définition d'un p.c.v., D T est uniquement déterminé sur ce voisinage, donc sur M aussi.

D'ailleurs, on peut donner aussi la formule globale pour D T. Celle-ci est

$$\begin{aligned}(DT)(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) = {} & D(T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)) - \\ & - \sum_{h=1}^{r} T(\omega^1, \dots, D\omega^h, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) - \\ & - \sum_{k=1}^{s} T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, DX_k, \dots, X_s),\end{aligned} \tag{2.4}$$

les champs de tenseurs T et D T étant conçus ici comme des fonctions $\mathfrak{F}$-linéaires des arguments $\omega^1, \ldots, \omega^r \in \mathfrak{D}_1$, $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{D}^1$. En effet, on vérifie sans difficulté que D T donné par (2.4) est un champ de tenseurs et qu'il satisfait aux conditions de la définition d'un p.c.v.

Appelons *tenseur de Kronecker* sur M le tenseur

$$I(\omega, X) = \omega(X). \tag{2.5}$$

On trouve alors d'après (2.4)

$$(\mathrm{D}\,I)(\omega, X) = \mathrm{D}(\omega(X)) - (\mathrm{D}\,\omega)(X) - \omega(\mathrm{D}\,X). \tag{2.6}$$

Maintenant nous considérons la classification suivante des p.c.v.

Définition. On dit que le p.c.v. D est de la *première espèce* si l'on a

$$\mathrm{D}\,I = 0 \tag{2.7}$$

ou, ce qui est la même chose, si D commute avec les contractions [2]. Dans le cas contraire D sera dit de la *seconde espèce.*

Les formules (2.6) et (2.7) montrent que, pour un p.c.v. de la première espèce, les valeurs sur $\mathfrak{D}_1$ sont déterminées par les valeurs sur $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{D}^1$, à l'aide de la formule

$$(\mathrm{D}\,\omega)(X) = \mathrm{D}(\omega(X)) - \omega(\mathrm{D}\,X), \tag{2.8}$$

qui est un cas particulier de la formule (2.4). Le théorème précédent revient maintenant à un résultat, établi dans un autre contexte, par WILLMORE [11]: D est déterminé uniquement par ses restrictions à $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{D}^1$. Mais D est aussi déterminé dans ce cas par ses restrictions à $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{D}_1$, car ses valeurs sur $\mathfrak{D}^1$ sont données alors par la formule

$$(\mathrm{D}\,X)(\omega) = \omega(\mathrm{D}\,X) = \mathrm{D}(\omega(X)) - (\mathrm{D}\,\omega)(X). \tag{2.9}$$

Il est évident que, si D_1 et D_2 sont des p.c.v. de la première espèce, alors $\mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_2$, $f\,\mathrm{D}_1$ et $[\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2]$ en sont également. Donc l'ensemble des p.c.v. de la première espèce, que nous noterons par $\mathfrak{P}^1(M)$ ou $\mathfrak{P}^1$ est un sous-module (respectivement sous-algèbre de Lie) de $\mathfrak{P}$.

3. Définition d'une connexion linéaire

Maintenant, nous montrons que la définition donnée en [2] pour une connexion linéaire sur M (définition due à J. L. Koszul) peut se reformuler d'une manière plus naturelle. Nous considérons aussi la notion importante de fonction de connexion.

La définition d'une connexion linéaire [2] peut être énoncée ainsi

Définition. On appelle *connexion linéaire* sur M une application $\mathfrak{F}$-linéaire $\nabla: \mathfrak{D}^1 \to \mathfrak{P}^1$, pour laquelle on a

$$\operatorname{Res} \nabla(X) = X \quad \text{pour tout} \quad X \in \mathfrak{D}^1. \tag{3.1}$$

On voit donc que ∇ est un homomorphisme des $\mathfrak{F}$-modules $\mathfrak{D}^1$ et $\mathfrak{P}^1$. Le p.c.v. $\nabla(X)$ est encore noté par ∇_X et il s'appelle *dérivée covariante par rapport à X*.

De la définition précédente il suit $\nabla_X I=0$ et, en vue de (3.1), $\nabla_X f=Xf$. Il en suit que ∇_X est uniquement déterminé par sa restriction à $\mathfrak{D}^1$ ou à $\mathfrak{D}_1$. La dérivée covariante d'un champ de tenseurs T, du type (r,s) est donnée d'après (2.4) par la formule

$$\begin{aligned}(\nabla_X T)(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) = X(T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)) - \\ - \sum_{h=1}^{r} T(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^h, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) - \\ - \sum_{k=1}^{s} T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, \nabla_X X_k, \dots, X_s).\end{aligned} \tag{3.2}$$

Dans cette formule on a d'après (2.8)

$$(\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y) \tag{3.3}$$

si l'on suppose connue la restriction de ∇ à $\mathfrak{D}^1$, ou la formule correspondante obtenue de (2.9) si l'on connaît la restriction à $\mathfrak{D}_1$.

Une fois ces considérations faites, on développe la théorie des connexions linéaires comme en [2] ou [5]. Rappelons seulement que *les opérateurs de la torsion et de la courbure* de la connexion ∇ sont définis respectivement par

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \tag{3.4}$$

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}. \tag{3.5}$$

Remarquons que $R(X, Y)$ peut être considéré comme un p.c.v. de la première espèce, à restriction nulle.

Dans la suite, nous allons attacher à la connexion ∇ une fonction qui peut la remplacer.

Définition. On appelle *fonction de connexion* de la connexion linéaire ∇, l'application

$$\Gamma : \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}^1 \times \mathfrak{D}^1 \to \mathfrak{F}$$

définie par

$$\Gamma(\omega, X, Y) = \omega(\nabla_X Y) \quad (\omega \in \mathfrak{D}_1;\ X, Y \in \mathfrak{D}^1). \tag{3.6}$$

Compte tenu des propriétés de ∇_X, on voit immédiatement que:

1°. La fonction Γ est $\mathfrak{F}$-linéaire dans les deux premiers arguments;

2°. $$\Gamma(\omega, X, Y_1 + Y_2) = \Gamma(\omega, X, Y_1) + \Gamma(\omega, X, Y_2).$$

3°. $$\Gamma(\omega, X, fY) = f\,\Gamma(\omega, X, Y) + (Xf)\,\omega(Y).$$

Par les méthodes employées en [2] pour les tenseurs, on trouve aisément que la fonction Γ induit, en vertu de 1°, 2°, 3°, une fonction de connexion Γ/U pour toute sous-variété ouverte U de M – c'est la fonction de la connexion induite sur U par ∇. Alors, si l'on prend pour U un voisinage de coordonnées et si X_i est le repère naturel de celles-ci et ω^i son dual, on trouve que *les coefficients de la connexion* ∇ sont

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma(\omega^k, X_i, X_j) \quad (i, j, k = 1, \ldots, n). \tag{3.7}$$

Ces coefficients vérifient la loi connue de transformation par changement de coordonnées.

On sait que les coefficients (3.7) déterminent la connexion ∇. On voit donc, qu'on pourrait définir celle-ci par une fonction $\Gamma(\omega, X, Y)$, satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3°, énoncées plus haut. Nous avons donc obtenu le

THÉORÈME. *Une connexion linéaire sur M est uniquement déterminée par sa fonction de connexion.*

Remarquons qu'à l'aide de la fonction de connexion, *les tenseurs de torsion et de courbure* de ∇ [2] s'expriment respectivement par

$$T(\omega, X, Y) = \omega(T(X, Y)) = \Gamma(\omega, X, Y) - \Gamma(\omega, Y, X) - \omega([X, Y]), \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} R(\omega, X, Y, Z) = \omega(R(X, Y)(Z)) = \Gamma(\omega, X, \nabla_Y Z) - \\ - \Gamma(\omega, Y, \nabla_X Z) - \Gamma(\omega, [X, Y], Z). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Il est utile d'associer à la connexion ∇ donnée deux autres connexions linéaires. D'abord, *la connexion transposée* [7], définie par la dérivée covariante

$$\nabla'_X Y = \nabla_Y X - [Y, X], \tag{3.10}$$

dont la fonction de connexion est

$$\Gamma'(\omega, X, Y) = \Gamma(\omega, Y, X) + \omega([X, Y]). \tag{3.11}$$

Puis, *la partie symétrique de* ∇, définie par la dérivée covariante

$$\mathring{\nabla}_X Y = \tfrac{1}{2}(\nabla_X Y + \nabla'_X Y), \tag{3.12}$$

dont la fonction de connexion est

$$\mathring{\Gamma}(\omega, X, Y) = \tfrac{1}{2}\{\Gamma(\omega, X, Y) + \Gamma(\omega, Y, X) - \omega([Y, X])\}. \tag{3.13}$$

Cette dernière connexion est évidemment sans torsion.

4. Formules pour les dérivées de Lie

Des définitions globales pour la dérivee de Lie d'un champ de tenseurs sur une varieté differentiable ont été données par R.S. PALAIS [4] et T. J. WILLMORE [11]. Nous allons reprendre cette dernière définition pour donner une expression de la dérivée de Lie des tenseurs dans un espace à connexion linéaire. Nous donnerons aussi des formules globales pour la dérivée de Lie d'une connexion linéaire.

Définition. Soit Y un champ de vecteurs. Alors on appelle dérivée de Lie des champs de tenseurs de M, par rapport à Y, le p.c.v. de la première espèce L_Y, déterminé par les relations

$$\operatorname{Res} L_Y = Y, \qquad L_Y X = [Y, X]. \tag{4.1}$$

La formule (2.8) montre alors qu'on a

$$(L_Y \omega)(X) = Y(\omega(X)) - \omega([Y, X]) \tag{4.2}$$

et la formule (2.4) donne pour la dérivée de Lie d'un tenseur quelconque

$$\begin{aligned}(L_Y T)(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) &= Y(T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)) - \\ &- \sum_{h=1}^{r} T(\omega^1, \dots, L_Y \omega^h, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) - \\ &- \sum_{k=1}^{s} T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, L_Y X_k, \dots, X_s).\end{aligned} \tag{4.3}$$

Sous une autre forme, cette formule a été établie par PALAIS [4].

Il est clair que la dérivée de Lie L_Y est un p.c.v. qui peut être construit pour tout champ de vecteurs Y; il en résulte alors que l'homomorphisme (2.3) est un épimorphisme. Plus encore, L_Y étant de la première espèce, l'homomorphisme Res: $\mathfrak{P}^1 \to \mathfrak{D}^1$ est aussi un épimorphisme. Donc, le $\mathfrak{F}$-module $\mathfrak{D}^1$ est le quotient de $\mathfrak{P}$ (ou de $\mathfrak{P}^1$) par rapport au module des p.c.v. qui sont des prolongements du champ de vecteurs nuls.

Supposons maintenant que la variété M est munie de la connexion linéaire ∇. Alors, on peut attacher au champ de vecteurs Y un prolongement de la première espèce du champ 0, noté L_Y^* et défini par les relations

$$\operatorname{Res} L_Y^* = 0, \qquad L_Y^* X = -\nabla'_X Y, \tag{4.4}$$

car on a en effet

$$\begin{aligned} L_Y^*(X_1 + X_2) &= L_Y^* X_1 + L_Y^* X_2, \\ L_Y^*(fX) = f L_Y^* X &= f L_Y^* X + (L_Y^* f) X. \end{aligned}$$

Avec les formules (2.8) et (2.4) on a alors

$$(L_Y^* \omega)(X) = -\omega(L_Y^* X), \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}(L_Y^* T)(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) &= \\ = &- \sum_{h=1}^{r} T(\omega^1, \dots, L_Y^* \omega^h, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) - \\ &- \sum_{k=1}^{s} T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, L_Y^* X_k, \dots, X_s).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Les formules (3.2), (4.3) et (4.6) nous donnent immédiatement:

THÉORÈME. *Dans un espace à connexion linéaire, la dérivée de* LIE *d'un champ de tenseurs quelconque s'exprime par la formule*

$$L_Y T = \nabla_Y T + L_Y^* T. \tag{4.7}$$

D'ailleurs cette formule résulte aussi directement, car $\nabla_Y + L_Y^*$ est un p.c.v. de la première espèce satisfaisant à (4.1).

Envisageons maintenant la dérivée de Lie de la connexion elle-même. Nous allons la définir de la manière suivante.

Définition. On appelle dérivée de Lie de la fonction de connexion $\Gamma(\omega, X_1, X_2)$, par rapport au champ de vecteurs Y, la fonction

$$\begin{aligned}(L_Y \Gamma)(\omega, X_1, X_2) = Y(\Gamma(\omega, X_1, X_2)) - \Gamma(L_Y \omega, X_1, X_2) - \\ - \Gamma(\omega, L_Y X_1, X_2) - \Gamma(\omega, X_1, L_Y X_2),\end{aligned} \tag{4.8}$$

où $L_Y \omega$ et $L_Y X_i$ sont les p.c.v. définis plus haut.

Un calcul direct montre que cette fonction est $\mathfrak{F}$-linéaire par rapport à ω, X_1, X_2, donc elle est un champ de tenseurs du type (1.2).

En appliquant la formule (4.8) à un voisinage de coordonnées, muni de repères naturels, on trouve une des expressions connues pour la dérivée de Lie d'une connexion linéaire [12], ce qui montre que notre définition est équivalente à la définition classique.

Maintenant, en explicitant les quantités du second membre de la formule (4.8), on arrive finalement aux résultats suivants.

THÉORÈME. *La dérivée de* LIE *d'une connexion linéaire est donnée par chacune des formules*:

$$\begin{aligned}(L_Y \Gamma)(\omega, X_1, X_2) = R(\omega, Y, X_1, X_2) - T(\omega, Y, \nabla_{X_1} X_2) + \\ + \omega(\nabla_{X_1} \nabla_{X_2} Y - \nabla_{\nabla_{X_1} X_2} Y + \nabla_{X_1} T(Y, X_2)),\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$(L_Y \Gamma)(\omega, X_1, X_2) = R(\omega, Y, X_1, X_2) - \omega(L_Y^* \nabla_{X_1} X_2 - \nabla_{X_1} L_Y X_2). \tag{4.10}$$

Terminons ce paragraphe avec deux autres observations à l'égard du p.c.v. L_Y^*, qui s'est montré important dans les formules antérieures.

La première remarque concerne les vecteurs de Killing d'un espace de Riemann [12]. Si $g(X, Y)$ est le tenseur métrique de celui-ci et ∇ la connexion riemannienne correspondante [2], les champs de vecteurs de Killing seront les champs ξ, caractérisés, en vertu de (4.7), par

$$(L_\xi^* g)(X, Y) = 0 \quad \text{(pour tout } X \text{ et } Y). \tag{4.11}$$

En d'autres mots, si nous remarquons que l'application

$$K: \mathfrak{D}^1(M) \to \mathfrak{D}_2(M),$$

définie par

$$K(\xi) = L_\xi^* g\,,$$

est un homomorphisme de groupes abéliens, alors les champs de vecteurs de Killing constituent le noyau de cet homomorphisme.

Il est simple de voir, compte tenu de (4.7) et de la symétrie du tenseur g, que la relation (4.11) équivaut à

$$g(X, L_\xi^* X) = 0\,, \qquad \text{pour tout} \qquad X \in \mathfrak{D}^1\,. \tag{4.12}$$

Nous avons ainsi:

THÉORÈME. *Le champ de vecteurs ξ est un champ de vecteurs de Killing dans un espace de Riemann si et seulement si l'opérateur L_ξ^* attribue à chaque vecteur un vecteur qui lui est orthogonal.*

La seconde remarque que nous voulons faire concerne les espaces à connexion projective. En analysant les définitions qui introduisent ces espaces à l'aide d'une connexion linéaire à une dimension supplémentaire (voir par exemple [10]), on arrive à la définition globale suivante. Soit M une variété différentiable. Appelons *variété associée* de M la variété $M \times R$ (où R est la droite réelle), munie du groupe de transformations à un paramètre induit par les translations de R. Puis, notons par ξ le champ de vecteurs induit sur $M \times R$ par ce groupe [2]. Alors on a:

Définition. Une *connexion projective* sur M est une connexion linéaire ∇ sur la variété associée $M \times R$, qui satisfait aux conditions

$$L_\xi \Gamma(\omega, X_1, X_2) = 0\,, \qquad L_\xi^* X = X\,, \tag{4.13}$$

pour tous ω et X de $\mathfrak{D}(M \times R)$.

5. Courbure mixte de deux connexions linéaires

Considérons maintenant une variéte différentiable M, munie de deux connexions linéaires $\overset{1}{\nabla}$ et $\overset{2}{\nabla}$ à fonctions de connexion $\overset{1}{\Gamma}$ et $\overset{2}{\Gamma}$. Dans la littérature géométrique, on trouve beaucoup de choses traitant de paires particulières de connexions (voir par exemple [6]), mais peu de choses pour le cas général. Nous voulons nous intéresser à ce cas général. Dans ce paragraphe, nous allons définir une courbure mixte de deux connexions linéaires quelconques.

Définition. On appelle *opérateur de la courbure mixte* de $\overset{1}{\nabla}$ et $\overset{2}{\nabla}$ l'opérateur

$$\varrho(X, Y) = \tfrac{1}{2}\{[\overset{1}{\nabla}_X, \overset{2}{\nabla}_Y] + [\overset{2}{\nabla}_X, \overset{1}{\nabla}_Y] - \overset{1}{\nabla}_{[X,Y]} - \overset{2}{\nabla}_{[X,Y]}\}\,. \tag{5.1}$$

On voit donc, qu'on peut considérer $\varrho(X, Y)$ comme un p.c.v. de la première espèce, tel que Res $\varrho(X, Y) = 0$.

Par des calculs directs on démontre que la fonction

$$\varrho(\omega, X, Y, Z) = \omega(\varrho(X, Y)Z) \tag{5.2}$$

est $\mathfrak{F}$-linéaire dans tous ses arguments; elle est donc un champ de tenseurs du type (1.3), évidemment antisymétrique en X et Y. Celui-ci sera appelé *le tenseur de la courbure mixte des deux connexions.*

En considérant un voisinage de coordonnées U, muni des repères naturels dans les espaces $\mathfrak{D}^1(U)$ et $\mathfrak{D}_1(U)$, on trouve la formule

$$\begin{aligned}\varrho(\omega^h, X_i, X_j, X_k) = \varrho^h_{ijk} = \tfrac{1}{2}\{\overset{2}{\Gamma}{}^h_{jk,i} - \overset{2}{\Gamma}{}^h_{ik,j} + \overset{1}{\Gamma}{}^h_{jk,i} - \overset{1}{\Gamma}{}^h_{ik,j} + \\ + \overset{2}{\Gamma}{}^s_{jk}\overset{1}{\Gamma}{}^h_{is} - \overset{2}{\Gamma}{}^s_{ik}\overset{1}{\Gamma}{}^h_{js} + \overset{1}{\Gamma}{}^s_{jk}\overset{2}{\Gamma}{}^h_{is} - \overset{1}{\Gamma}{}^s_{ik}\overset{2}{\Gamma}{}^h_{js}\},\end{aligned} \tag{5.3}$$

qui donne les composantes du tenseur de la courbure mixte (les notations sont analogues à ceux qu'on fait en [2] pour le tenseur de courbure).

Nous voulons aussi signaler *les formules de commutation* de la forme suivante

$$(v_{i/j})_{;k} - (v_{i/k})_{;j} + (v_{i;j})_{/k} - (v_{i;k})_{/j} = 2\varrho^h_{kij}v_h + \overset{1}{T}{}^s_{jk}v_{i;s} + \overset{2}{T}{}^s_{jk}v_{i/s}, \tag{5.4}$$

où «/» et «;» notent les dérivées covariantes par rapport à $\overset{1}{\nabla}$, respectivement $\overset{2}{\nabla}$, formules qui peuvent être généralisées pour des tenseurs quelconques.

On peut donner une interprétation géométrique locale de la courbure mixte à l'aide des cycles infinitésimaux de E. CARTAN [1]. A ce but considérons d'abord *les formes de connexion*

$$\overset{1}{\omega}{}^j_i = \overset{1}{\Gamma}{}^j_{ki}dx^k, \quad \overset{2}{\omega}{}^j_i = \overset{2}{\Gamma}{}^j_{ki}dx^k$$

et écrivons *les équations de connexion* de Cartan

$$\begin{cases} dp = dx^i X_i, \\ dX_i = \overset{1}{\omega}{}^j_i X_j, \end{cases} \quad \begin{cases} dp = dx^i X_i, \\ dX_i = \overset{2}{\omega}{}^j_i X_j. \end{cases}$$

Puis, considérons dans le point $p\in M$ deux déplacements d et ∂ et déterminons le développement du repère X_i sur l'espace tangent en p, d'abord le long de d par rapport à $\overset{1}{\nabla}$ et le long de ∂ par rapport à $\overset{2}{\nabla}$, puis en changeant le rôle de d et ∂. La différence des résultats obtenus donne un certain déplacement. En changeant maintenant le rôle de $\overset{1}{\nabla}$ et $\overset{2}{\nabla}$ et en additionnant le nouveau déplacement obtenu au précédent, on trouve que le déplacement total est donné par les valeurs pour d et ∂ des *formes exterieures quadratiques de la courbure mixte*

$$-2\prod{}^k_i = d\overset{2}{\omega}{}^k_i + d\overset{1}{\omega}{}^k_i - \overset{1}{\omega}{}^j_i \wedge \overset{2}{\omega}{}^k_j - \overset{2}{\omega}{}^j_i \wedge \overset{1}{\omega}{}^k_j, \tag{5.5}$$

où d est la différentielle extérieure. Les équations (5.5) peuvent être appelées *équations de structure pour la paire de connexions.* De ces équations, on trouve immédiatement

$$\prod_i^k = \tfrac{1}{2} \varrho_{hli}^k dx^h \wedge dx^l, \tag{5.6}$$

ce qui donne l'interprétation annoncée.

Pour obtenir un autre résultat sur la courbure mixte, envisageons *la connexion moyenne* $\overset{m}{\nabla}$ de $\overset{1}{\nabla}$ et $\overset{2}{\nabla}$, définie par la fonction

$$\overset{m}{\Gamma}(\omega, X, Y) = \tfrac{1}{2}\{\overset{1}{\Gamma}(\omega, X, Y) + \overset{2}{\Gamma}(\omega, X, Y)\}, \tag{5.7}$$

qui est évidemment une fonction de connexion.

A l'aide de cette connexion on démontre par des calculs directs le résultat suivant:

THÉORÈME. *Entre les courbures des connexions* $\overset{1}{\nabla}$, $\overset{2}{\nabla}$, $\overset{m}{\nabla}$ *et la courbure mixte de la paire* $(\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla})$ *il y a la relation*

$$\varrho(X, Y) = 2\overset{m}{R}(X, Y) - \tfrac{1}{2}\{\overset{1}{R}(X, Y) + \overset{2}{R}(X, Y)\}. \tag{5.8}$$

Il en suit que si les connexions $\overset{1}{\nabla}$ et $\overset{2}{\nabla}$ coïncident, alors $\varrho(X, Y)$ se réduit à $R(X, Y)$. Il en suit aussi la possibilité d'obtenir, pour la courbure mixte, des *identités de Bianchi.*

6. L'algèbre de déformation de deux connexions linéaires

Considérons de nouveau les deux connexions linéaires $\overset{1}{\nabla}$ et $\overset{2}{\nabla}$ sur M. On sait que la différence de ces deux connexions est un tenseur, appelé *tenseur de déformation* [6]. En effet la fonction

$$S(\omega, X, Y) = \overset{2}{\Gamma}(\omega, X, Y) - \overset{1}{\Gamma}(\omega, X, Y) \tag{6.1}$$

est $\mathfrak{F}$-linéaire en tous ses arguments et nous donne le tenseur annoncé.

Si, au lieu de considérer les fonctions de connexion, on considère les dérivées covariantes, on arrive à un p.c.v. de la première espèce S_X défini par

$$S_X = \overset{2}{\nabla}_X - \overset{1}{\nabla}_X, \tag{6.2}$$

d'où évidemment Res $S_X = 0$. Celui-ci sera appelé *opérateur de déformation* de la paire $(\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla})$ et il est lié au tenseur de déformation par la relation

$$S(\omega, X, Y) = \omega(S_X Y). \tag{6.3}$$

Dans la suite, nous allons employer l'opérateur S_X pour définir $\mathfrak{D}^1(M)$ comme algèbre sur l'anneau $\mathfrak{F}$ et nous allons étudier cette algèbre. Rappelons qu'une ideé analogue a éte suivie par Gh. VRĂNCEANU dans l'étude des espaces à connexion constante [9].

En effet, si l'on définit le produit de deux champs de vecteurs par

$$X * Y = S_X Y, \tag{6.4}$$

les propriétés de distributivité de ce produit par rapport à la somme des champs de vecteurs sont immédiates et on obtient donc l'algèbre annoncée.

Définition. L'algèbre définie par (6.4) sera nommée *algèbre de déformation* de la paire de connexions $(\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla})$ et sera notée par $\mathfrak{A}(M, \overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla})$, ou simplement par $\mathfrak{A}$.

Pour obtenir des propriétés de l'algèbre $\mathfrak{A}$, définissons encore *la courbure de déformation* de la paire $(\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla})$, à l'aide de l'opérateur

$$K(X, Y) = \tfrac{1}{4}[S_X, S_Y], \tag{6.5}$$

opérateur qui est un p.c.v. de la première espèce, prolongement du champ de vecteurs nuls. On peut considérer aussi *le tenseur de la courbure de déformation*, donné par la formule

$$K(\omega, X, Y, Z) = \omega(K(X, Y)(Z)) \tag{6.6}$$

Maintenant nous allons énoncer les résultats suivants:

THÉORÈME. *Pour toute paire de connexions linéaires sur M on a les formules*:

$$2\varrho(X, Y) + 4K(X, Y) = \overset{1}{R}(X, Y) + \overset{2}{R}(X, Y), \tag{6.7}$$

$$\varrho(X, Y) + K(X, Y) = \overset{m}{R}(X, Y). \tag{6.8}$$

En effet, la formule (6.7) peut s'obtenir par des calculs directs et la formule (6.8) se déduit de (6.7) et de (5.8).

Maintenant on trouve sans difficulté les propriétés suivantes:

a) L'algèbre $\mathfrak{A}$ est commutative si et seulement si les connexions $\overset{1}{\nabla}$ et $\overset{2}{\nabla}$ ont la même torsion.

b) L'algèbre $\mathfrak{A}$ est anticommutative si et seulement si les connexions $\overset{1}{\nabla}$ et $\overset{2}{\nabla}$ ont la même partie symétrique.

c) Dans l'algèbre $\mathfrak{A}$ on a la loi

$$X * (Y * Z) = Y * (X * Z),$$

(où $K(X, Y) = 0$) si et seulement si la courbure mixte de la paire $(\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla})$ est la moyenne arithmétique des courbures de $\overset{1}{\nabla}$ et $\overset{2}{\nabla}$.

d) L'algèbre $\mathfrak{A}$ est simultanément commutative (anticommutative) et associative si les conditions de a) (respectivement b)) et de c) sont simultanément vérifiées.

e) L'algèbre $\mathfrak{A}$ est une algèbre de Lie si et seulement si

$-\overset{1}{\nabla}$ et $\overset{2}{\nabla}$ ont la même partie symétrique;

$$-\overset{m}{R}(X, Y)(Z) + \overset{m}{R}(Y, Z)(X) + \overset{m}{R}(Z, X)(Y) =$$
$$= \varrho(X, Y)(Z) + \varrho(Y, Z)(X) + \varrho(Z, X)(Y),$$

pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{D}^1$.

Une autre conséquence immédiate des formules (5.8), (6.7) et (6.8) est:

THÉORÈME. *Parmi les quatre propriétés suivantes, chaque paire implique l'autre paire*:

1°. $\overset{1}{R}(X, Y) + \overset{2}{R}(X, Y) = 0,$

2°. $\overset{m}{R}(X, Y) = 0,$

3°. $\varrho(X, Y) = 0,$

4°. $K(X, Y) = 0.$

Terminons ce paragraphe en énonçant un problème qui nous semble intéressant et difficile: trouver des courbes de M et des familles de directions le long de ces courbes, telles que les directions respectives soient simultanément parallèles dans les deux connexions de la paire $(\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla})$, le long des courbes en question.

7. Les groupes de cohomologie d'un espace à connexion linéaire plane

Dans ce dernier paragraphe, nous allons introduire un opérateur, agissant sur les champs de tenseurs covariants quelconques et qui, dans le cas d'un espace à connexion linéaire plane (c'est-à-dire sans courbure et sans torsion) généralise dans un certain sens la différentielle extérieure des tenseurs antisymétriques. Ceci nous permettra d'introduire les groupes de cohomologie d'une variété différentiable M, paracompacte et munie d'une connexion linéaire plane, à l'aide des tenseurs covariants quelconques.

Si $A(X_1, \ldots, X_r)$ est un champ de tenseurs covariants, totalement antisymétriques (c'est-à-dire que la fonction A est anti-symétrique dans ces arguments), alors la différentielle extérieure de celui-ci est le champ de tenseurs, encore antisymétriques, donné par [2.4]

$$\begin{aligned}(r+1)(dA)(X_1, \ldots, X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} X_i(A(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{r+1})) + \\ &+ \sum_{i<j=1}^{r+1} (-1)^{i+j} A([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{r+1}),\end{aligned} \tag{7.1}$$

où le signe « $\wedge$ » montre que l'argument respectif est supprimé.

Maintenant, pour un espace à connexion linéaire ∇, introduisons l'opérateur qui nous intéresse.

Définition. Soit $A(X_1, \ldots, X_r)$ un champ de tenseurs covariants quelconque. On appelle *cofrontière* de A le champ de tenseurs ∂A donné par

$$(r+1)(\partial A)(X_1, \ldots, X_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} (\nabla_{X_i} A)(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{r+1}). \tag{7.2}$$

Il est évident que l'application $\partial: \mathfrak{D}_r \to \mathfrak{D}_{r+1}$ ainsi obtenue est un homomorphisme de groupes abéliens.

Si, en particulier, A est antisymétrique, alors on vérifie par un calcul direct et compte tenu de la formule (3.2) la formule suivante

$$\begin{aligned}(dA)(X_1, \ldots, X_{r+1}) &= (\partial A)(X_1, \ldots, X_{r+1}) - \\ &- \frac{1}{r+1} \sum_{i<j=1}^{r+1} A(T(X_i, X_j), X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{r+1}),\end{aligned} \tag{7.3}$$

qui exprime la différentielle extérieure à l'aide de la connexion ∇. Il en suit que, pour une connexion ∇ sans torsion et pour un tenseur antisymétrique A, la cofrontière ∂A se réduit à la différentielle extérieure dA.

Remarquons maintenant une propriété importante de la cofrontière. On sait que, à tout tenseur $A(X_1, \ldots, X_r)$, on peut associer, par alternation, un tenseur antisymétrique $A'(X_1, \ldots, X_r)$, donné par

$$A'(X_1, \ldots, X_r) = \frac{1}{r!} \sum \operatorname{sign} \prod_{j<i} (h_i - h_j) A(X_{h_1}, \ldots, X_{h_r}), \tag{7.4}$$

où $(h_1, \ldots, h_r)$ est une permutation de $(1, \ldots, r)$, la somme prise sur toutes ces permutations. On trouve

$$(\partial A)'(X_1, \ldots, X_{r+1}) = (\partial A')(X_1, \ldots, X_{r+1}), \tag{7.5}$$

qui est la propriété annoncée.

Nous allons maintenant calculer $\partial^2 A$. Dans ce but on établit d'abord la formule

$$\begin{aligned}(r+1)(\nabla_Y(\partial A))(X_1, \ldots, X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} (\nabla_Y \nabla_{X_i} A)(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{r+1}) - \\ &- \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} (\nabla_{\nabla_Y X_i} A)(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{r+1})\end{aligned} \tag{7.6}$$

et à l'aide de celle-ci on obtient finalement

$$(r+2)(r+1)(\partial^2 A)(X_1, \ldots, X_{r+2}) =$$

$$= \sum_{j<i=1}^{r+2} (-1)^{i+j}(R(X_i, X_j)A)(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{r+1}) - \tag{7.7}$$

$$- \sum_{j<i=1}^{r+2} (-1)^{i+j}(\nabla_{T(X_i, X_j)} A)(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{r+1}).$$

Donc, si la connexion ∇ est sans courbure et sans torsion on a

$$\partial^2 A = 0, \tag{7.8}$$

pour un champ de tenseurs covariants quelconque A.

Il en suit que, dans ce cas, le système $(\mathfrak{D}_r, \partial)$ constitue un complexe de cochaînes, qui sera noté par K_∇. Nous sommes maintenant arrivés au résultat annoncé au début, qui est le suivant:

THÉORÈME. *Les groupes de cohomologie à coefficients réels, d'une variété M paracompacte et munie d'une connexion linéaire plane sont les groupes de cohomologie du complexe* K_∇.

En effet, soit K le complexe de cochaînes défini par les tenseurs antisymétriques et par la différentielle extérieure. Dans notre cas et compte tenu de la formule (7.3), K est un sous-complexe de K_∇. On a donc la suite exacte de cohomologie [8]:

$$\ldots \xrightarrow{j^*} H^{q-1}(K_\nabla/K) \xrightarrow{\delta} H^q(K) \xrightarrow{i^*} H^q(K_\nabla) \xrightarrow{j^*} H^q(K_\nabla/K) \xrightarrow{\delta} \ldots \tag{7.9}$$

où K_∇/K est le complexe facteur et H^q sont les groupes de cohomologie correspondants.

Puis, pour tout tenseur A on a une formule de la forme

$$A = A' + B \tag{7.10}$$

et, en vertu de la propriété (7.5) si $\partial A \in K$, alors $\partial A = \partial A'$ et on trouve $\partial B = 0$.

Il en suit que tous les groupes $H^q(K_\nabla/K)$ sont triviaux et la suite (7.9) montre que les groupes $H^q(K)$ et $H^q(K_\nabla)$ sont isomorphes. Donc, notre théorème est une conséquence du théorème bien connu de G. DE RHAM [8].

Séminaire Mathématique «A. Myller»
Université «Al. I. Cuza»
Jassy, Roumanie

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN E. - Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Gauthier-Villars, Paris, 1946.

[2] HELGASON S. - Differential Geometry and symmetric spaces. Academic Press, New York and London 1962 (Edition russe, Moscou 1964).

[3] NOMIZU K. - Lie groups and differential geometry. Publ. Math. Soc. of Japan, No. 2 1956. (Édition russe, Moscou 1960).

[4] PALAIS R. S. - A definition of the exterior derivative in terms of Lie derivatives. Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), p. 902–908.

[5] POSTNIKOV M. M. - La théorie variationnelle des géodésiques (en russe), Moscou 1965.

[6] SCHOUTEN J. A. - Ricci Calculus. Springer, Berlin 1954.

[7] SCHMID J. - Zum Begriff des linearen Zusammenhanges. Monatshefte für Math., *68* (1964), p. 326–367.

[8] TELEMAN C. - Elemente de topologie şi varietăţi diferenţiabile. Bucureşti 1964.

[9] VRĂNCEANU GH. - Leçons de géométrie différentielle, vol. II, Bucarest 1957.

[10] WHITEHEAD J. H. C. - The representation of projective spaces. Ann. of Math., *32* (1931), p. 327–360.

[11] WILLMORE T. J. - The Definition of Lie Derivative. Proc. Edinburgh Math. Soc. *12* (1960), p. 27–29.

[12] YANO K. - The Theory of Lie Derivatives and its Applications. North Holland Publ. Co. Groningen 1957.

Reçu le 12 novembre 1965.