

# Vollständige konforme Metriken und isolierte Singularitäten subharmonischer Funktionen.

Autor(en): **Huber, Alfred**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **41 (1966-1967)**

PDF erstellt am: **12.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-31374>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Vollständige konforme Metriken und isolierte Singularitäten subharmonischer Funktionen

VON ALFRED HUBER, Zürich

## 1. Einleitung

Im Rahmen von Untersuchungen zum Cohn-Vossenschen Problemkreis wurde R. FINN [2, 3] dazu geführt, die Gültigkeit eines gewissen Darstellungssatzes für vollständige konforme Metriken (Satz 1 der vorliegenden Arbeit) zu vermuten. Es gelang ihm, die in Frage stehende Darstellung nach Einführung einer zusätzlichen Voraussetzung (siehe Bemerkung 3 zu Satz 1) zu beweisen und damit den Zugang zu bedeutenden geometrischen Resultaten zu finden.

Das wichtigste Ziel dieses Artikels ist ein Beweis der *vollen* Finnschen Vermutung. Als Konsequenzen ergeben sich daraus neue Kriterien für die Hebbarkeit isolierter Singularitäten subharmonischer und  $\delta$ -subharmonischer Funktionen.

Auf geometrische Folgerungen gehen wir in der vorliegenden Arbeit nicht ein. Wir begnügen uns mit dem Hinweis, dass mit Satz 1 die von Finn auf Grund der Darstellung (1) hergeleiteten geometrischen Sätze wegen des Wegfallens der zusätzlichen Annahme einen wesentlich erweiterten Gültigkeitsbereich erhalten.

DEFINITION. Unter einem *in den Punkt  $z_0$  führenden Weg* in der komplexen Ebene verstehen wir eine stetige – im Falle  $z_0 = \infty$  auf der Riemannschen Kugel stetige – Kurve  $\gamma$  mit folgenden Eigenschaften:

- (1)  $\gamma$  verbindet  $z_0$  mit einem Punkt  $z_1 \neq z_0$ ;
- (2) jeder  $z_0$  nicht enthaltende abgeschlossene Teilbogen von  $\gamma$  ist rektifizierbar.

SATZ 1. Sei  $u(z)$  eine reellwertige Funktion, definiert und zweimal stetig differenzierbar im Gebiet  $\Omega = \{z \mid R < |z| < \infty\}$ ,  $R > 0$ , mit folgenden Eigenschaften:

- (a) 
$$\iint_{\Omega} |\Delta u| \, dx \, dy < \infty ;$$
- (b) 
$$\int_{\gamma} e^{u(z)} |dz| = \infty$$

für jeden ins Unendliche führenden Weg  $\gamma$ . Dann gilt

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| \Delta u(\zeta) \, d\xi \, d\eta + c \log |z| + h(z) \quad (\zeta = \xi + i\eta), \quad (1)$$



wobei  $c$  eine Konstante und  $h$  eine in  $\Omega$  und im Unendlichen harmonische Funktion bezeichnen.

#### BEMERKUNGEN

1. Die Eigenschaft (b) der Metrik  $e^{u(z)}|dz|$  könnte man „Vollständigkeit im Unendlichen“ nennen. Die Enden einer genügend regulären, vollständigen<sup>1)</sup>, orientierbaren offenen Fläche mit summierbarer Gausscher Krümmung können durch konforme Metriken dargestellt werden, welche die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllen.

2. Es ist sofort klar, dass sich die Funktion  $u$  vom ersten Summanden auf der rechten Seite von (1) um eine harmonische Funktion unterscheidet; dies ist sogar richtig, wenn die Voraussetzung (b) gestrichen wird. Die wesentliche Aussage des Satzes besteht darin, dass bei Gültigkeit von (b) diese Differenzfunktion im Unendlichen entweder logarithmisch singulär oder harmonisch sein muss.

3. R. FINN [3] hat die Darstellung (1) bewiesen unter der zusätzlichen Annahme, dass die Menge  $\{z \mid \Delta u(z) < 0\}$  beschränkt sei. Es gelang ihm dies mit Hilfe einer kurzen indirekten Schlussweise, die sich jedoch einer Erweiterung auf den allgemeinen Fall zu entziehen scheint. Unsere Methode besteht in einer direkten Konstruktion der gesuchten Darstellung.

**KOROLLAR.** Sei  $u(z)$  eine reellwertige Funktion, definiert und zweimal stetig differenzierbar in der endlichen Ebene. Ist  $\Delta u$  summierbar und erfüllt  $u$  die Bedingung (b) von Satz 1, so gilt die Darstellung

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\zeta\text{-Ebene}} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| \Delta u(\zeta) d\xi d\eta + c, \quad (2)$$

wobei  $c$  eine Konstante bezeichnet.

**BEMERKUNG.** Die Voraussetzungen dieses Korollars erfüllen diejenigen konformen Metriken  $e^{u(z)}|dz|$ , welche vollständige Flächen mit summierbarer Gausscher Krümmung vom topologischen Typ der Ebene darstellen.

**BEWEIS DES KOROLLARS.** Wir wählen ein  $R > 0$  und machen Gebrauch von der Darstellung (1) der Funktion  $u$  im Gebiet  $\Omega = \{z \mid R < |z| < \infty\}$ . Die Funktion

$$\begin{aligned} H(z) &= u(z) - \frac{1}{2\pi} \iint_{\zeta\text{-Ebene}} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| \Delta u(\zeta) d\xi d\eta = \\ &= c \log |z| + h(z) - \frac{1}{2\pi} \iint_{|\zeta| \leq R} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| \Delta u(\zeta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> im Sinne von H. HOPF und W. RINOW [6].

ist harmonisch in der endlichen  $z$ -Ebene. Im Unendlichen ist sie entweder logarithmisch singular oder harmonisch. Also ist sie eine Konstante. *Q.E.D.*

Wir werden mit Satz 2 eine Aussage beweisen, die etwas allgemeiner ist als Satz 1. An Stelle der Existenz und Stetigkeit aller Ableitungen von  $u$  bis und mit der zweiten Ordnung fordern wir nur, dass  $u$   $\delta$ -subharmonisch sei. Man versteht darunter, dass die Funktion  $u$  in der Umgebung eines jeden Punktes ihres Definitionsbereiches als Differenz subharmonischer Funktionen darstellbar sein soll. Der Laplaceoperator ist dann im Sinne der Theorie der Distributionen zu verstehen:  $\Delta u$  ist ein Radonsches Mass, von welchem – in Verallgemeinerung von Bedingung (a) in Satz 1 – vorausgesetzt wird, dass seine totale Variation endlich sei.

Diese Allgemeinheit hat zunächst den Vorteil, dass durch die zugelassenen Metriken eine grosse Klasse von Flächen erfassbar wird, nämlich – nach einem Resultat von I. G. RESCHETNJAK [10] – die Klasse der Mannigfaltigkeiten von beschränkter Krümmung im Sinne von A. D. Alexandrow. Vor allem aber wird durch sie der potentialtheoretische Aspekt der bewiesenen Darstellung erst richtig beleuchtet. Dies zeigen die folgenden Sätze, deren Beweis – mit wesentlicher Anwendung von Satz 2 – im letzten Abschnitt erfolgt:

**SATZ 3.** Sei  $u(z)$   $\delta$ -subharmonisch im Gebiete  $G = \{z \mid 0 < |z| < R\}$ ,  $R > 0$ . Dafür, dass  $u$  auch in der Umgebung von 0  $\delta$ -subharmonisch ist, sind folgende Bedingungen notwendig und hinreichend:

- (a) die totale Variation des Masses  $\Delta u$  ist endlich in der Umgebung von 0;
- (b) es existiert eine reelle Zahl  $\alpha$  mit der Eigenschaft, dass

$$\int_{\gamma} |z|^{\alpha} e^{u(z)} |dz| = \infty$$

für jeden in den Punkt 0 führenden Weg  $\gamma$ .

#### BEMERKUNGEN

1. Die eine Hälfte von Satz 3, nämlich die Hinlänglichkeit der Bedingungen (a) und (b), ist im wesentlichen die Aussage von Satz 2, transformiert durch Inversion von einer Umgebung von  $\infty$  auf eine Umgebung von 0.

2) Dass  $u$  sich in einer Umgebung von 0 als Differenz subharmonischer Funktionen,  $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$ , darstellen lässt, bedeutet nicht, dass der Wert  $u(0)$  definiert ist. Es kann vorkommen, dass für jede solche Darstellung von  $u$  der Ursprung zur Menge  $\{z \mid u_1(z) = u_2(z) = -\infty\}$  gehört. Auf dieser bleibt  $u$  undefiniert.

**SATZ 4.** Sei  $u(z)$  superharmonisch im Gebiet  $G = \{z \mid 0 < |z| < R\}$ ,  $R > 0$ . Dafür, dass  $u$  als superharmonische Funktion in den Punkt 0 hinein fortgesetzt werden kann, sind folgende Bedingungen notwendig und hinreichend:

- (a) die totale Variation des Masses  $\Delta u$  ist endlich in der Umgebung von 0;  
 (b) es ist

$$\int_{\gamma} \frac{e^{u(z)}}{|z|} |dz| = \infty$$

für jeden in den Punkt 0 führenden Weg  $\gamma$ .

Die Resultate dieser Arbeit sind in einer in den Comptes Rendus publizierten Note [9] angekündigt worden.

## 2. Einige Hilfssätze

In diesem Abschnitt betrachten wir eine Funktion  $v$  der Form

$$v(z) = k \log |z| + q(z). \quad (3)$$

Dabei bezeichnet  $k$  eine natürliche Zahl. Die Funktion  $q$  besitze folgende Eigenschaften: (a)  $q$  sei definiert und superharmonisch in  $\mathbf{C}$  (= endliche komplexe Ebene); (b)  $q$  sei harmonisch in einer Umgebung von 0; (c) die totale Variation  $\alpha$  der  $q$  zugeordneten Massenbelegung  $\mu$  sei kleiner als  $\frac{1}{2}$ . Ferner setzen wir die Vollständigkeit der durch das Linienelement  $e^{v(z)} |dz|$  erzeugten Metrik voraus, d.h. es soll gelten

$$\int_{\gamma} e^{v(z)} |dz| = \infty$$

für jeden ins Unendliche führenden Weg  $\gamma$ .

Für irgend zwei Punkte  $z_1$  und  $z_2$  in  $\mathbf{C}$  definieren wir

$$\varrho(z_1, z_2) = \inf_{\gamma \in A(z_1, z_2)} \int_{\gamma} e^{v(z)} |dz|, \quad (4)$$

wobei  $A(z_1, z_2)$  die Menge aller rektifizierbaren Verbindungskurven von  $z_1$  und  $z_2$  bezeichnet. Für zwei beliebige Mengen  $A$  und  $B$  in  $\mathbf{C}$  bedeute

$$\varrho(A, B) = \inf_{\substack{z_1 \in A \\ z_2 \in B}} \varrho(z_1, z_2). \quad (5)$$

Die Funktion  $q$  ist in bekannter Weise darstellbar als Limes regularisierter Funktionen  $q_n = \alpha_n * q$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ), wobei etwa

$$\alpha_n(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } |z| \geq \frac{1}{n}, \\ k n^2 \exp \left\{ \frac{1}{n^2 |z|^2 - 1} \right\} & \text{für } |z| < \frac{1}{n}, \end{cases} \quad (6)$$

mit

$$k = \left( 2\pi \int_0^1 t \exp \left\{ \frac{1}{t^2 - 1} \right\} dt \right)^{-1}.$$

Die Funktionen  $q_n$  sind definiert, unendlich oft differenzierbar und superharmonisch in  $\mathbb{C}$ , und  $q_n \uparrow q$  für  $n \rightarrow \infty$ . Es ist

$$\mu_n = \alpha_n * \mu \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \tag{7}$$

wobei  $\mu_n$  die  $q_n$  zugeordnete Massenbelegung (mit der Dichtefunktion  $-\Delta q_n/2\pi$ ) bezeichnet (siehe [11], Bd. II, p. 16). Die totale Variation von  $\mu_n$  stimmt überein mit der totalen Variation  $\alpha$  von  $\mu$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ).

Wir definieren  $v_n(z) = k \log |z| + q_n(z)$  und bezeichnen mit  $\varrho_n(z_1, z_2)$  (für  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ) und  $\varrho_n(A, B)$  (für  $A, B \subset \mathbb{C}$ ) die – entsprechend (4) und (5) – durch das Linienelement  $e^{v_n(z)} |dz|$  erzeugten Abstandsfunktionen.

LEMMA 1. Sei  $\{\Omega_n\}$  eine monotone,  $\mathbb{C}$  ausschöpfende Gebietsfolge. Dann gilt

$$\varrho_n(0, \Gamma_n) \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \tag{8}$$

wobei  $\Gamma_n$  den Rand von  $\Omega_n$  bezeichnet ( $n=1, 2, 3, \dots$ ).

BEWEIS. Wir definieren

$$\lambda_n = \liminf_{m \rightarrow \infty} \varrho_n(0, \Gamma_m) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{9}$$

und beweisen vorerst: Entweder gilt  $\lambda_n \uparrow \infty$  für  $n \uparrow \infty$  oder es ist  $\lambda_n = \infty$  für alle genügend grossen Indizes  $n$ <sup>2)</sup>. Da – zufolge der Monotonie der Funktionenfolge  $\{v_n\}$  – die Zahlenfolge  $\{\lambda_n\}$  nicht abnimmt, genügt es, folgende Annahme ad absurdum zu führen:

$$\lambda_n \uparrow \lambda \quad \text{für } n \uparrow \infty, \quad \text{wobei } \lambda < \infty. \tag{10}$$

Nach Voraussetzung ist die Metrik  $\varrho$  vollständig. Also existieren zwei Kreise  $C_j = \{z \mid |z| = r_j\}$  ( $j=1, 2$ ),  $0 < r_1 < r_2 < \infty$ , mit der Eigenschaft, dass

$$\varrho(C_1, C_2) = A > \lambda. \tag{11}$$

Wegen (10) gibt es zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  eine Folge  $\{\gamma_n\}$  von  $C_1$  mit  $C_2$  verbindenden, rektifizierbaren Kurvenbogen mit der Eigenschaft, dass

$$\int_{\gamma_n} e^{v_n(z)} |dz| < \lambda + \varepsilon, \tag{12}$$

<sup>2)</sup> Aus dem zu beweisenden Satz 2 kann *a posteriori* geschlossen werden, dass alle Metriken  $\varrho_n$  vollständig (also alle  $\lambda_n = \infty$ ) sind.

( $n=1, 2, 3, \dots$ ). Zur Darstellung dieser Kurven

$$\gamma_n : [0, 1], t \rightarrow \mathbf{C}, f_n(t)$$

benützen wir als Parameter  $t=s/L_n$ , wobei  $s$  die (euklidische) Bogenlänge auf  $\gamma_n$  – vom auf  $C_1$  liegenden Anfangspunkt aus gemessen – und  $L_n$  die (euklidische) Länge von  $\gamma_n$  bezeichnet. Da die Funktionen  $v_n$  nach unten gleichmässig beschränkt sind, folgt aus (12) die Beschränktheit der Folge  $\{L_n\}$ . Daraus schliesst man unter Benützung der durch die Definition des Parameters  $t$  implizierten und für alle  $t_1, t_2 \in [0,1]$  gültigen Ungleichung  $|f_n(t_1) - f_n(t_2)| \leq L_n |t_1 - t_2|$  auf die gleichgradige Stetigkeit der Funktionenfolge  $\{f_n\}$  auf  $[0,1]$ . Da diese Folge ausserdem gleichmässig beschränkt ist, enthält sie nach dem Satz von Arzelà eine gleichmässig konvergente Teilfolge  $\{f_{n_k}\}$ . Es bezeichne  $f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(t)$  für alle  $t \in [0,1]$ . Die Kurve

$$\gamma : [0, 1], t \rightarrow \mathbf{C}, f(t)$$

ist rektifizierbar und verbindet  $C_1$  mit  $C_2$ . Man beweist – mit Benützung der gleichmässigen Stetigkeit von  $v_m$  auf  $\{z \mid r_1 \leq |z| \leq r_2\}$  – leicht, dass

$$\int_{\gamma} e^{v_m(z)} |dz| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{n_k}} e^{v_m(z)} |dz| \quad (13)$$

für  $m=1, 2, 3, \dots$ . Aus der Monotonie der Folge  $\{v_n\}$  und Ungleichung (12) schliessen wir, dass für  $n_k \geq m$

$$\int_{\gamma_{n_k}} e^{v_m(z)} |dz| \leq \int_{\gamma_{n_k}} e^{v_{n_k}(z)} |dz| < \lambda + \varepsilon. \quad (14)$$

Aus (13) und (14) folgt

$$\int_{\gamma} e^{v_m(z)} |dz| \leq \lambda + \varepsilon \quad \text{für } m = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

Lassen wir  $m \rightarrow \infty$  streben, so erhalten wir aus (15) unter Anwendung des Fatouschen Lemmas

$$\int_{\gamma} e^{v(z)} |dz| \leq \lambda + \varepsilon. \quad (16)$$

Wählt man  $\varepsilon$  kleiner als  $\lambda - \lambda$ , so steht (16) im Widerspruch zu (11). Also kann (10) nicht gelten.

Nun nehmen wir an, es gebe eine Zahl  $C$  so, dass

$$\varrho_n(0, \Gamma_n) \leq C \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (17)$$

und zeigen, dass dies zu einem Widerspruch führt.

Nach dem eben bewiesenen Resultat gibt es eine natürliche Zahl  $N$  mit der Eigenschaft, dass

$$\lambda_N = \lim_{m \rightarrow \infty} \varrho_N(0, \Gamma_m) > C.$$

Daraus folgt  $\varrho_N(0, \Gamma_M) > C$  für einen genügend grossen Index  $M$ . Für alle  $n \geq \max(M, N)$  gilt

$$\varrho_n(0, \Gamma_n) \geq \varrho_N(0, \Gamma_M) > C. \tag{18}$$

Dies steht im Widerspruch zu (17).

Die Folge  $\{\varrho_n(0, \Gamma_n)\}$  ist also unbeschränkt. Da sie monoton wächst, erfüllt sie (8). Q.E.D.

**LEMMA 2.** *Es gibt eine Folge  $\{\Gamma_n\}$  von stückweise analytischen Jordankurven und eine Zahl  $A$  mit folgenden Eigenschaften:*

(a) 
$$\int_{\Gamma_n} e^{v_n(z)} |dz| < A \varrho_n(0, \Gamma_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

(b) *die Innengebiete  $G_n$  der Kurven  $\Gamma_n$  enthalten den Ursprung und streben mit  $n \rightarrow \infty$  gegen  $C$ .*

**BEWEIS.** Um die Resultate von F. FIALA [1] über Parallelkurven auf analytischen Flächen positiver Krümmung anwenden zu können, approximieren wir die unendlich oft differenzierbaren Metriken  $e^{v_n(z)} |dz|$  durch solche, die in den Variablen  $x$  und  $y$  analytisch sind.

Sei  $\{R_n\}$ ,  $R_0 > 1$ , eine gegen  $\infty$  strebende Folge von Radien,  $C_n = \{z \mid |z| = R_n\}$  und  $B_n = \{z \mid 1 \leq |z| \leq R_n\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Sei zunächst  $n$  eine feste natürliche Zahl. Die Funktion

$$w_n(x, y) = v_n(x, y) - \frac{1 + x^2 + y^2}{2(1 + R_n^2)}$$

kann durch ein Polynom  $p_n(x, y)$  derart approximiert werden, dass sich auf  $B_n$  die Werte der Funktionen  $w_n(x, y)$  und  $p_n(x, y)$  sowie die Werte aller entsprechenden partiellen Ableitungen bis und mit der zweiten Ordnung voneinander um weniger als  $1/2(1 + R_n^2)$  unterscheiden. Es gelten dann auf  $B_n$  die Ungleichungen

$$v_n - \log 3 < p_n < v_n, \tag{19}$$

$$\left| \frac{\partial v_n}{\partial x} - \frac{\partial p_n}{\partial x} \right| < 1, \quad \left| \frac{\partial v_n}{\partial y} - \frac{\partial p_n}{\partial y} \right| < 1, \tag{20}$$

$$\Delta p_n < 0. \tag{21}$$

Das Linienelement  $e^{p_n(z)}|dz|$  erzeugt eine Metrik in  $\mathbf{C}$ , deren Abstandsfunktion wir mit  $\varrho_n^*$  bezeichnen. Es ist (in der Terminologie von FIALA [1, p. 295]) eine analytische Riemannsche Ebene definiert, deren Gaussische Krümmung

$$K(z) = -\Delta p_n(z)/e^{2p_n(z)}$$

wegen (21) auf  $B_n$  positiv ist. Diese Fläche besitzt nicht alle der in [1] geforderten Eigenschaften; zum Beweis der hier benützten Aussagen macht jedoch Fiala von den noch fehlenden Voraussetzungen ( $K > 0$  auch ausserhalb  $B_n$  und Vollständigkeit) keinen Gebrauch.

Die Menge

$$\Gamma'_n = \{z \mid \varrho_n^*(C_0, z) = \varrho_n^*(C_0, C_n), |z| > R_0\}$$

ist Vereinigung von endlich vielen analytischen Kurvenbogen (vrai parallèle [1, p. 325]). Sie enthält als Teilmenge eine stückweise analytische Jordankurve, nämlich den Rand  $\Gamma_n$  der mit  $\infty$  zusammenhängenden Gebietskomponente des Komplementes von  $\Gamma_n$  (composante extérieure [1, p. 326]). Es soll nun gezeigt werden, dass die Kurvenfolge  $\{\Gamma_n\}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) die Bedingungen (a) – für genügend grosses  $A$  – und (b) erfüllt.

Aus (20) und der Konstruktion von  $v_n$  schliessen wir, dass

$$\int_{C_0} \frac{\partial p_n}{\partial v} |dz| \leq 4\pi R_0 + \int_{C_0} \frac{\partial v_n}{\partial v} |dz| \leq 2\pi(2R_0 + k), \quad (22)$$

wobei  $\partial/\partial v$  die Ableitung in Richtung der äusseren Normalen bezeichnet. Der linke Term in Ungleichung (22) ist das um  $2\pi$  verminderte Integral über die geodätische Krümmung der Metrik  $e^{p_n(z)}|dz|$  längs  $C_0$ . Beachten wir noch, dass die Gaussische Krümmung im Zwischengebiet von  $C_0$  und  $\Gamma_n$  überall positiv ist, so erhalten wir durch Anwendung der Fialaschen Sätze 3 und 4 [1, p. 330]

$$\int_{\Gamma_n} e^{p_n(z)} |dz| \leq \int_{\Gamma'_n} e^{p_n(z)} |dz| \leq 2\pi(2R_0 + k + 1) \varrho_n^*(C_0, \Gamma'_n). \quad (23)$$

Aus (19) und (23) folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_n} e^{v_n(z)} |dz| &\leq 3 \int_{\Gamma_n} e^{p_n(z)} |dz| \leq A \varrho_n^*(C_0, \Gamma'_n) = A \varrho_n^*(C_0, \Gamma_n) \leq \\ &\leq A \varrho_n(0, \Gamma_n), \quad \text{wobei} \quad A = 6\pi(2R_0 + k + 1). \end{aligned}$$

Die Folge  $\{\Gamma_n\}$  besitzt also die Eigenschaft (a).

Für  $n \rightarrow \infty$  gilt nach Annahme  $R_n \rightarrow \infty$ , also nach Lemma 1  $\varrho_n(0, C_n) \rightarrow \infty$ . Daraus folgt  $\varrho_n(C_0, C_n) \rightarrow \infty$ . Da für alle  $n$  die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \varrho(0, \Gamma_n) &\geq \varrho_n(0, \Gamma_n) \geq \varrho_n^*(0, \Gamma_n) \geq \\ &\geq \varrho_n^*(C_0, \Gamma_n) = \varrho_n^*(C_0, C_n) \geq \frac{1}{3} \varrho_n(C_0, C_n) \end{aligned}$$

erfüllt sind, schliessen wir, dass  $\varrho(0, \Gamma_n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dies ist äquivalent mit der Gültigkeit von (b). Q.E.D.

BEMERKUNG. P. HARTMAN [5] hat kürzlich bewiesen, dass die wichtigsten Resultate von Fiala unter wesentlich abgeschwächten Voraussetzungen noch gültig sind. Durch Anwendung dieser tieferliegenden Sätze könnte der Beweis von Lemma 2 etwas kürzer gehalten werden.

LEMMA 3. *Es existieren eine die  $z$ -Ebene ausschöpfende Gebietsfolge  $\{\Omega_n\}$  und eine Folge zugeordneter Abbildungen  $\{\varphi_n\}$  mit folgenden Eigenschaften:*

(a)  $\varphi_n$  bildet  $\Omega_n$  konform ab auf eine Kreisscheibe  $D_n = \{w \mid |w| < R_n\}$ , wobei  $\varphi_n(0) = 0$  und  $\varphi_n(1) = 1$ ;

(b) Sei  $e^{\tilde{v}_n(w)} |dw|$  die durch Verpflanzung bei der Abbildung  $\varphi_n$  aus  $e^{v_n(z)} |dz|$  hervorgehende Metrik. Es gilt die Darstellung

$$\tilde{v}_n(w) = k \log |w| + \int_{D_n} g_n(w, \omega) d\tilde{\mu}_n(e_\omega) + c_n. \tag{24}$$

Dabei bezeichnen  $g_n$  die Greensche Funktion von  $D_n$ ,  $\tilde{\mu}_n$  das durch Verpflanzung bei der Abbildung  $\varphi_n$  aus  $\mu_n$  entstehende positive Mass, und  $c_n$  eine Konstante ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

BEWEIS. Der Beweis dieses Hilfssatzes besteht aus zwei Teilen. Zuerst legen wir eine Konstruktion dar, welche jedem Gebiet  $G_n$  der in Lemma 2 auftretenden Gebietsfolge ein Gebiet  $\Omega_n$  und eine Abbildung  $\varphi_n$  zuordnet derart, dass die Bedingungen (a) und (b) von Lemma 3 erfüllt sind. Dann beweisen wir unter Anwendung von Lemma 2, dass die so erhaltene Gebietsfolge  $\{\Omega_n\}$  die  $z$ -Ebene ausschöpft.

Sei  $n$  eine natürliche Zahl, und sei  $G$  ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet in der  $z$ -Ebene, welches den Ursprung enthält. Wir ordnen dem Paar  $(n, G)$  nach folgender Vorschrift eine positive Zahl  $\tau_n(G)$  zu. Es bezeichne  $h_n$  die Lösung des Dirichletschen Problems für das Gebiet  $G$  mit den Randwerten  $v_n$ , und es sei  $H_n(z) = h_n(z) - k g(z, 0)$ , wobei  $g$  die Greensche Funktion des Gebietes  $G$  bezeichnet. Wir definieren:  $\tau_n(G)$  sei der Abstand des Ursprungs vom Rande  $\Gamma$  des Gebietes  $G$ , gemessen in der Metrik  $e^{H_n(z)} |dz|$ .

Die Funktion  $v_n - H_n$  ist superharmonisch in  $G$  und nimmt auf  $\Gamma$  die Randwerte 0 an. Also ist sie nach dem Minimumprinzip nicht negativ in  $G$ . Daraus folgt

$$\tau_n(G) \leq \varrho_n(0, \Gamma). \tag{25}$$



Im nun folgenden ersten Teil des Beweises wird  $n$  festgehalten. Wir setzen zur Abkürzung  $\tau_n(G_n) = t_n$ , wobei unter  $G_n$  das in Lemma 2 so bezeichnete Gebiet zu verstehen ist. Sei  $S_n$  die Menge aller beschränkten, einfach zusammenhängenden, den Ursprung enthaltenden Gebiete  $G$  in der  $z$ -Ebene, für welche  $\tau_n(G) \geq t_n$  gilt. Diese Menge ist nicht leer, denn  $G_n \in S_n$ . Zunächst beweisen wir:

(I)  $S_n$  enthält ein „Minimalgebiet“, d.h. es existiert ein Gebiet  $\Omega_n \in S_n$  mit der Eigenschaft, dass  $\Omega_n \subseteq G$  für alle  $G \in S_n$ .

Sei  $M_n$  der Durchschnitt aller zu  $S_n$  gehörigen Gebiete, und sei  $I_n$  das Innere von  $M_n$ . Die Menge  $I_n$  ist nicht leer, denn aus (25) folgt

$$\{z \mid \varrho_n(0, z) < t_n\} \subseteq G \quad (26)$$

für alle  $G \in S_n$ . Wir bezeichnen mit  $\Omega_n$  diejenige – wegen (26) existierende – Gebietskomponente von  $I_n$ , welche 0 enthält. Das Gebiet  $\Omega_n$  ist einfach zusammenhängend; andernfalls müsste nämlich mindestens eines der zur Durchschnittsbildung herangezogenen Gebiete mehrfach zusammenhängend sein, was der Definition von  $S_n$  widerspräche.

Zum Beweise von (I) genügt es, nun noch zu zeigen, dass  $\Omega_n$  in  $S_n$  liegt, d.h. dass  $\tau_n(\Omega_n) \geq t_n$  ist.

Wäre  $\tau_n(\Omega_n) < t_n$ , so gäbe es einen Punkt  $z_0$  auf dem Rande  $\Delta_n$  von  $\Omega_n$ , einen 0 mit  $z_0$  verbindenden analytischen Kurvenbogen  $\gamma_n$  in  $\Omega_n$  und eine positive Zahl  $\eta$  derart, dass

$$\int_{\gamma_n} e^{H_n(z)} |dz| = t_n - \eta. \quad (27)$$

Darin bedeutet  $H_n(z) = h_n(z) - kg(z, 0)$ , wobei  $h_n$  die Lösung des Dirichletschen Problems für das Gebiet  $\Omega_n$  mit den Randwerten  $v_n$  und  $g$  die Greensche Funktion von  $\Omega_n$  bezeichnen. Wir definieren

$$\delta = \min \left( 1, \frac{\eta}{2m} \right), \quad \text{wobei} \quad m = \max_{|z - z_0| \leq 1} e^{v_n(z)}. \quad (28)$$

Da  $z_0$  Randpunkt von  $\Omega_n$  ist, existiert ein Gebiet  $G^* \in S_n$ , dessen Rand  $\Gamma^*$  die Kreisscheibe  $\{z \mid |z - z_0| < \delta\}$  schneidet. Sei  $H_n^*(z) = h_n^*(z) - kg^*(z, 0)$ , wobei  $h_n^*$  die Lösung des Dirichletschen Problems für das Gebiet  $G^*$  mit den Randwerten  $v_n$  und  $g^*$  die Greensche Funktion von  $G^*$  bezeichnet.

Die Funktion  $v_n - H_n^*$  ist superharmonisch in  $G^*$  und nimmt auf  $\Gamma^*$  die Randwerte 0 an. Nach dem Minimumprinzip gilt also

$$v_n(z) \geq H_n^*(z) \quad \text{für alle} \quad z \in G^*. \quad (29)$$

Die Funktion  $H_n - H_n^*$  ist harmonisch in  $\Omega_n$  und nimmt auf  $\Delta_n$  die Randwerte  $v_n - H_n^*$

an. Da diese nach (29) nicht negativ sind, folgt aus dem Minimumprinzip

$$H_n(z) \geq H_n^*(z) \quad \text{für alle } z \in \Omega_n. \quad (30)$$

Sei  $z_1$  zu  $z_0$  (in der euklidischen Metrik der  $z$ -Ebene) nächstgelegener Punkt von  $\Gamma^*$ , so dass also

$$|z_1 - z_0| = \min_{z \in \Gamma^*} |z - z_0| < \delta. \quad (31)$$

Wir bezeichnen die geradlinige Verbindungsstrecke von  $z_0$  und  $z_1$  mit  $\gamma'$ , und den zusammengesetzten Weg  $\gamma_n \cup \gamma'$  mit  $\gamma'_n$ . Aus (27) bis (31) erhält man

$$\int_{\gamma'_n} e^{H_n^*(z)} |dz| \leq \int_{\gamma_n} e^{H_n(z)} |dz| + \int_{\gamma'} e^{v_n(z)} |dz| \leq t_n - \eta + m\delta < t_n.$$

Daraus folgt  $\tau_n(G^*) < t_n$ . Damit sind wir bei einem Widerspruch angelangt, denn  $G^* \in S_n$  impliziert per definitionem  $\tau_n(G^*) \geq t_n$ . Also gilt (I).

(II) *Es existiert eine Abbildung  $\varphi_n$  des Minimalgebietes  $\Omega_n$  in die  $w$ -Ebene mit der Eigenschaft, dass  $\Omega_n$  und  $\varphi_n$  miteinander die Bedingungen (a) und (b) in Lemma 3 erfüllen.*

Sei  $g$  die Greensche Funktion von  $\Omega_n$ ,  $h_n$  die Lösung des Dirichletschen Problems für das Gebiet  $\Omega_n$  mit den Randwerten  $v_n$ ,  $H_n(z) = h_n(z) - kg(z, 0)$ ,  $\tilde{H}_n$  eine zu  $H_n$  konjugiert harmonische Funktion.  $\tilde{H}_n$  ist definiert und  $\exp\{i\tilde{H}_n\}$  ist eindeutig in  $\Omega_n - \{0\}$ . Durch die Funktion

$$\psi_n : z \rightarrow w = \int_0^z \exp\{H_n(z) + i\tilde{H}_n(z)\} dz$$

wird  $\Omega_n$  konform abgebildet auf eine über der  $w$ -Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche  $F_n$ . Diese besitzt einen über  $w=0$  liegenden  $k$ -fachen Verzweigungspunkt und ist im übrigen unverzweigt.

Sei  $\sigma$  eine (auf irgendeinem Blatt von  $F_n$  liegende) geradlinige Strecke, die den Verzweigungspunkt mit einem Randpunkt von  $F_n$  verbindet. Dann ist  $\psi_n^{-1}(\sigma)$  ein 0 mit einem Randpunkt von  $\Omega_n$  verbindender analytischer Kurvenbogen, und infolgedessen

$$\int_{\sigma} |dw| = \int_{\psi_n^{-1}(\sigma)} |\psi'_n(z)| |dz| = \int_{\psi_n^{-1}(\sigma)} e^{H_n(z)} |dz| \geq \tau_n(\Omega_n) \geq t_n. \quad (32)$$

Es bezeichne  $K_n$  diejenige der  $w$ -Ebene überlagerte Riemannsche Fläche, die man erhält, wenn man  $k+1$  Exemplare der Kreisscheibe  $\{w \mid |w| < t_n\}$  längs der positiven reellen Achse aufschneidet und so miteinander verheftet, dass über  $w=0$  ein  $k$ -facher Verzweigungspunkt entsteht. Aus (32) folgt, dass  $K_n$  in  $F_n$  enthalten ist. Nun beweisen wir, dass  $K_n = F_n$  ist.

Nehmen wir an,  $K_n$  sei ein echter Teil von  $F_n$ . Dann ist  $G^* = \psi_n^{-1}(K_n)$  – ein einfach zusammenhängendes, den Ursprung enthaltendes Gebiet – eine echte Teilmenge von  $\Omega_n$ . Sei  $g^*$  die Greensche Funktion von  $G^*$ ,  $h_n^*$  die Lösung des Dirichletschen Problems für das Gebiet  $G^*$  mit den Randwerten  $v_n$ ,  $H_n^*(z) = h_n(z) - k g^*(z, 0)$ . Die Funktion  $H_n^* - H_n$  ist harmonisch im Gebiete  $G^*$  und nimmt auf dessen Rand  $\Gamma^*$  die nicht negativen Werte  $v_n - H_n$  an. Daraus folgt

$$H_n^*(z) \geq H_n(z) \quad \text{für alle } z \in G^*. \quad (33)$$

Sei  $\gamma$  irgend eine 0 mit einem Punkt von  $\Gamma^*$  verbindende Kurve in  $G^*$ . Dann verbindet die Bildkurve  $\psi_n(\gamma)$  den Windungspunkt über  $w=0$  mit einem Randpunkt von  $K_n$ . Unter Anwendung von (33) erhalten wir

$$\int_{\gamma} e^{H_n^*(z)} |dz| \geq \int_{\gamma} e^{H_n(z)} |dz| = \int_{\psi_n(\gamma)} |dw| \geq t_n.$$

Daraus schliessen wir, dass  $\tau_n(G^*) \geq t_n$ , also  $G^* \in S_n$ . Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass  $\Omega_n$  Minimalgebiet in  $S_n$  ist, dass also kein echtes Teilgebiet von  $\Omega_n$  zu  $S_n$  gehören kann. Unsere Annahme war falsch: es gilt  $F_n = K_n$ .

Wir definieren

$$\varphi_n : z \rightarrow w = \left( \frac{\psi_n(z)}{\psi_n(1)} \right)^{\frac{1}{k+1}} \quad (z \in \Omega_n),$$

wobei die Bestimmung der Wurzel so festgelegt werde, dass  $\varphi_n(1) = 1$  und  $\varphi_n$  in  $\Omega_n$  analytisch ist. Durch  $\varphi_n$  wird  $\Omega_n$  konform abgebildet auf eine Kreisscheibe  $D_n = \{w \mid |w| < R_n\}$ , und es ist  $\varphi_n(0) = 0$ .

Nach Definition von  $\tilde{v}_n(w)$  muss gelten  $e^{v_n(z)} |dz| = e^{\tilde{v}_n(w)} |dw|$ , falls das Element  $(z, z+dz)$  durch die Abbildung  $\varphi_n$  übergeführt wird in  $(w, w+dw)$ . Also ist

$$\tilde{v}_n(\varphi_n(z)) = v_n(z) - \log |\varphi_n'(z)| \quad (z \in \Omega_n). \quad (34)$$

Da die Abbildung  $\varphi_n$  konform und die Funktion  $\log |\varphi_n'|$  harmonisch ist, entnehmen wir aus (34), dass die  $v_n$  und  $\tilde{v}_n$  zugeordneten Masse  $\Delta v_n$  und  $\Delta \tilde{v}_n$  durch Verpflanzung auseinander hervorgehen. Es gilt somit die Darstellung

$$\tilde{v}_n(w) = \tilde{h}_n(w) - k g_n(w, 0) + \int_{D_n} g_n(w, \omega) d\tilde{\mu}_n(e_\omega) \quad (w \in D_n). \quad (35)$$

Dabei bezeichnen  $g_n$  die Greensche Funktion des Gebietes  $D_n$ ,  $\tilde{\mu}_n$  die Verpflanzung des Masses  $\mu_n$  (charakterisiert durch  $\tilde{\mu}_n(\varphi_n(e)) = \mu_n(e)$  für alle Borelmengen  $e \subset \Omega_n$ ) und  $\tilde{h}_n$  eine in  $D_n$  harmonische Funktion. Die letztere ist nach (34) die Verpflanzung von  $h_n - \log |\varphi_n'|$ , d.h.

$$\tilde{h}_n(\varphi_n(z)) = h_n(z) - \log |\varphi_n'(z)| \quad (z \in \Omega_n). \quad (36)$$

Unter Zurückgehen auf die Definition der Abbildung  $\varphi_n$  verifiziert man leicht, dass die Funktion  $h_n - \log |\varphi_n'|$  auf  $\Delta_n$  konstante Randwerte annimmt; da sie in  $\Omega_n$  harmonisch ist, ist sie somit eine Konstante. Wir schliessen aus (36), dass  $\tilde{h}_n$  eine Konstante ist. Ferner gilt  $g_n(w, 0) = \log R_n - \log |w|$ . Also folgt (24) aus (35). Damit ist (II) bewiesen.

Nun zeigen wir, dass

$$\tau_n(G_n) \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty, \tag{37}$$

wobei  $\{G_n\}$  die in Lemma 2 auftretende Gebietsfolge bezeichnet.

Damit führen wir den zweiten Teil des Beweises von Lemma 3 durch. Aus (25) und den einschlägigen Definitionen folgt nämlich die Ungleichung

$$\tau_n(G_n) = t_n \leq \tau_n(\Omega_n) \leq \varrho_n(0, \Delta_n) \leq \varrho(0, \Delta_n).$$

Also impliziert (37), dass  $\varrho(0, \Delta_n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dies ist aber äquivalent zur Aussage, dass die Gebietsfolge  $\{\Omega_n\}$  die  $z$ -Ebene ausschöpft.

Wir halten zunächst  $n$  fest. Es bezeichne  $g_n$  die Greensche Funktion des Gebietes  $G_n$ ,  $h_n$  die Lösung des Dirichletschen Problems für  $G_n$  mit den Randwerten  $v_n$ ,  $H_n(z) = h_n(z) - k g_n(z, 0)$ , und  $\tilde{H}_n$  eine zu  $H_n$  konjugiert harmonische Funktion ( $\tilde{H}_n$  definiert und  $\exp \{i\tilde{H}_n\}$  eindeutig in  $G_n - \{0\}$ ). Durch

$$\psi_n : z \rightarrow w = \int_0^z \exp \{H_n(z) + i\tilde{H}_n(z)\} dz$$

wird das Gebiet  $G_n$  konform abgebildet auf eine über der  $w$ -Ebene ausgebreitete, einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche  $F_n$ , welche über  $w=0$  einen  $k$ -fachen Windungspunkt besitzt und im übrigen unverzweigt ist. Die Projektion (Durchdrückung)  $F_n$  von  $F_n$  in die  $w$ -Ebene ist enthalten in der Kreisscheibe

$$\{w \mid |w| < \frac{1}{2} A \varrho_n(0, \Gamma_n)\},$$

denn eine Anwendung von Lemma 2 ergibt<sup>3)</sup>

$$\int_{\psi_n(\Gamma_n)} |dw| = \int_{\Gamma_n} e^{H_n(z)} |dz| = \int_{\Gamma_n} e^{v_n(z)} |dz| < A \varrho_n(0, \Gamma_n).$$

Daraus folgt – etwa durch Anwendung des Schwarzschen Lemmas – für die Greensche Funktion  $\tilde{g}_n$  von  $F_n$  die Abschätzung

$$\tilde{g}_n(p, q) \leq B + \log r_n - \log |w - \omega|. \tag{38}$$

---

<sup>3)</sup> Die Abbildung  $\psi_n$  ist auf dem Rande von  $G_n$  stetig und führt diesen in eine rektifizierbare Kurve über.

Dabei bezeichnen  $w$  und  $\omega$  die Projektionen (Durchdrückungen) der Punkte  $p$  und  $q$  in die  $w$ -Ebene und  $B$  eine von  $n$  unabhängige Konstante. Zur Abkürzung setzen wir  $\varrho_n(0, \Gamma_n) = r_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ).

Die Funktion  $v_n(z)$  besitzt die Darstellung

$$v_n(z) = H_n(z) + \int_{G_n} g_n(z, \zeta) d\mu_n(e_\zeta). \quad (39)$$

Sei  $e^{\tilde{v}_n(w)} |dw|$  die durch Verpflanzung bei der Abbildung  $\psi_n$  aus  $e^{v_n(z)} |dz|$  hervorgehende Metrik. Da  $e^{H_n(z)} |dz| = |\psi'_n(z)| |dz| = |dw|$ , geht (39) über in

$$\tilde{v}_n(w) = \int_{F_n} \tilde{g}_n(p, q) d\tilde{\mu}_n(e_q). \quad (40)$$

Dabei bezeichnet  $\tilde{g}_n$  die Greensche Funktion von  $F_n$  und  $\tilde{\mu}_n$  die Verpflanzung des Masses  $\mu_n$  auf  $F_n$  bei der Abbildung  $\psi_n$  (charakterisiert durch  $\tilde{\mu}_n(\psi_n(e)) = \mu_n(e)$  für alle Borelmengen  $e \subset G_n$ ). Für  $p$  darf in (40) jeder über  $w$  liegende Punkt von  $F_n$  eingesetzt werden:  $\tilde{v}_n(w)$  ist eine mehrdeutige Funktion auf  $F_n$ .

Aus (38) und (40) folgt

$$\tilde{v}_n(w) \leq \alpha_n (B + \log r_n) - \int_{F_n} \log |w - \omega| d\tilde{\mu}_n(e_\omega). \quad (41)$$

Darin bezeichnet  $\tilde{\mu}_n$  die Durchdrückung des Masses  $\tilde{\mu}_n$  in die  $w$ -Ebene, und

$$\alpha_n = \tilde{\mu}_n(F_n) = \tilde{\mu}_n(F_n) = \mu_n(G_n) \leq \alpha < \frac{1}{2}. \quad (42)$$

Die rechte Seite von (41) ist eine in der  $w$ -Ebene eindeutig definierte Funktion, welche alle Bestimmungen von  $\tilde{v}_n(w)$  simultan majorisiert.

Die früher definierte Zahl  $t_n = \tau_n(G_n)$  ist gleich dem Abstand (gemessen in der Metrik  $|dw|$ ) des Randes von  $F_n$  von dem über  $w=0$  gelegenen Verzweigungspunkt. Sei  $\gamma$  eine diesen Abstand realisierende Kürzeste auf  $F_n$ . Diese führt vom Verzweigungspunkt (Durchdrückung 0) geradlinig zum nächsten Randpunkt  $q_n$  (Durchdrückung  $t_n e^{i\vartheta_n}$ ) von  $F_n$ . Mit Anwendung von (41) erhält man

$$\begin{aligned} r_n &\leq \int_0^{t_n} \exp \{ \tilde{v}_n(t e^{i\vartheta_n}) \} dt \leq \\ &\quad \text{(längs } \gamma) \\ &\leq r_n^{\alpha_n} e^{\alpha_n B} \int_0^{t_n} \exp \left\{ \int_{F_n} \log \frac{1}{|t e^{i\vartheta_n} - \omega|} d\tilde{\mu}_n(e_\omega) \right\} dt. \end{aligned} \quad (43)$$

Es gilt die Ungleichung

$$\int_0^{t_n} \exp \left\{ \int_{F_n} \log \frac{1}{|t e^{i\vartheta_n} - \omega|} d\bar{\mu}_n(e_\omega) \right\} dt \leq \frac{2^{\alpha_n} t_n^{1-\alpha_n}}{1-\alpha_n}. \quad (44)$$

Um diese zu beweisen, nehmen wir zunächst an, das Mass  $\bar{\mu}_n$  bestehe aus einer einzigen Punktmasse  $\alpha_n$ , angebracht in einem Punkte  $\omega_0$ . In diesem Falle besagt die Behauptung (44)

$$\int_0^{t_n} |t e^{i\vartheta_n} - \omega_0|^{-\alpha_n} dt \leq \frac{2^{\alpha_n} t_n^{1-\alpha_n}}{1-\alpha_n}. \quad (45)$$

Zur Verifikation von (45) beachte man, dass für feste  $t_n, \vartheta_n, \alpha_n$  das Integral auf der linken Seite offenbar dann seinen grössten Wert annimmt, wenn  $\omega_0 = t_n e^{i\vartheta_n}/2$  ist. Dann ist aber – wie eine leichte Rechnung zeigt – dieses Integral gleich der rechten Seite von (45).

Wir gehen nun dazu über, die Punktmasse  $\bar{\mu}_n$  zu verschmieren. Betrachten wir zunächst den Fall, da  $\bar{\mu}_n$  aus endlich vielen Einzelmassen besteht:

$$p_1 \alpha_n \text{ in } \omega_1, \quad p_2 \alpha_n \text{ in } \omega_2, \dots, p_m \alpha_n \text{ in } \omega_m$$

$$\sum_{j=1}^m p_j = 1, \quad p_j > 0$$

( $j=1, 2, \dots, m$ ). Aus der Hölderschen Ungleichung (siehe z.B. [4], p. 140) und (45) schliessen wir

$$\begin{aligned} \int_0^{t_n} \exp \left\{ \sum_{j=1}^m p_j \alpha_n \log \frac{1}{|t e^{i\vartheta_n} - \omega_j|} \right\} dt &= \int_0^{t_n} \prod_{j=1}^m \left( |t e^{i\vartheta_n} - \omega_j|^{-\alpha_n} \right)^{p_j} dt \leq \\ &\leq \prod_{j=1}^m \left( \int_0^{t_n} |t e^{i\vartheta_n} - \omega_j|^{-\alpha_n} dt \right)^{p_j} \leq \frac{2^{\alpha_n} t_n^{1-\alpha_n}}{1-\alpha_n}. \end{aligned}$$

Damit ist (44) auch für diesen Fall bewiesen. Ein naheliegender Grenzübergang liefert schliesslich die Gültigkeit dieser Ungleichung für beliebige positive Masse  $\bar{\mu}_n$  mit Träger  $F_n$  und totaler Variation  $\alpha_n$ .

Aus (42), (43) und (44) folgt zunächst

$$r_n \leq 4 e^B r_n^{\alpha_n} t_n^{1-\alpha_n},$$

und daraus, mit nochmaliger Anwendung von (42),

$$t_n \geq \frac{1}{16} e^{-2B} r_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (46)$$

Nach Lemma 1 gilt  $r_n = \varrho_n(0, \Gamma_n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Also wird (37) durch (46) impliziert. Damit ist Lemma 3 bewiesen.

LEMMA 4. Die in Lemma 3 auftretende Radienfolge  $\{R_n\}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) strebt mit  $n$  gegen unendlich.

BEWEIS. Aus (24) folgt

$$\check{v}_n(w) \geq c_n + k \log |w| \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Da  $e^{\check{v}_n(w)} |dw|$  das Linienelement der bei der Abbildung  $\varphi_n$  auf  $D_n$  verpflanzten Metrik  $\varrho_n$  darstellt und da ferner das reelle Intervall  $[0, 1]$  die kürzeste Verbindung der Punkte 0 und 1 in der Metrik  $\exp \{c_n + k \log |w|\} |dw|$  bildet, gilt

$$\varrho(0, 1) \geq \varrho_n(0, 1) \geq e^{c_n} \int_0^1 t^k dt = \frac{e^{c_n}}{1+k}. \quad (47)$$

Andrerseits gilt

$$\begin{aligned} \varrho_n(0, \Delta_n) &\leq \int_0^{R_n} e^{\check{v}_n(t)} dt = e^{c_n} \int_0^{R_n} t^k \exp \left\{ \int_{D_n} g_n(t, \omega) d\tilde{\mu}_n(e_\omega) \right\} dt \leq \\ &\leq e^{c_n} R_n^k \int_0^{R_n} \exp \left\{ \int_{D_n} \log \frac{2R_n}{|t-\omega|} d\tilde{\mu}_n(e_\omega) \right\} dt. \end{aligned} \quad (48)$$

Dabei wurde benützt, dass die Greensche Funktion  $g_n$  von  $D_n$  die Ungleichung

$$g_n(w, \omega) \leq \log \frac{2R_n}{|w-\omega|}$$

erfüllt. Es gilt die Abschätzung

$$\int_0^{R_n} \exp \left\{ \int_{D_n} \log \frac{2R_n}{|t-\omega|} d\tilde{\mu}_n(e_\omega) \right\} dt \leq \frac{2^{2\alpha_n}}{1-\alpha_n} R_n < 4R_n, \quad (49)$$

wobei  $\alpha_n = \tilde{\mu}_n(D_n) = \mu_n(\Omega_n) \leq \alpha < \frac{1}{2}$ . Die Verifikation von (49) überlassen wir dem Leser; sie verläuft ganz analog wie der Beweis von (44). Aus (47) bis (49) folgt

$$\varrho_n(0, \Delta_n) \leq 4(1+k)\varrho(0, 1)R_n^{1+k} \quad (50)$$

( $n=1, 2, 3, \dots$ ). Da nach Lemma 1 die linke Seite von (50) mit  $n$  gegen unendlich strebt, muss dies auch die rechte Seite – und damit  $R_n$  – tun. *Q.E.D.*

LEMMA 5. Die in Lemma 3 vorkommende Abbildungsfolge  $\{\varphi_n\}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) ist in der endlichen  $z$ -Ebene lokal gleichmässig beschränkt.

BEWEIS. Für irgend zwei Punkte  $w_1$  und  $w_2$  in  $D_n$  definieren wir

$$\tilde{q}_n(w_1, w_2) = \inf_{\gamma \in A_n(w_1, w_2)} \int_{\gamma} e^{\tilde{\nu}_n(w)} |dw|, \quad (51)$$

wobei  $A_n(w_1, w_2)$  die Menge aller in  $D_n$  enthaltenen rektifizierbaren Verbindungskurven von  $w_1$  und  $w_2$  bezeichnet. Für irgend zwei Teilmengen  $A$  und  $B$  von  $D_n$  bedeute

$$\tilde{q}_n(A, B) = \inf_{\substack{w_1 \in A \\ w_2 \in B}} \tilde{q}_n(w_1, w_2). \quad (52)$$

Offenbar ist

$$\tilde{q}_n(\varphi_n(z_1), \varphi_n(z_2)) \geq \varrho_n(z_1, z_2) \quad (53)$$

für alle  $z_1, z_2 \in \Omega_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ). Zu jedem Punktepaar  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gibt es einen Index  $N(z_1, z_2)$  derart, dass für alle  $n > N$  in (53) die Gleichheit eintritt. (Z.B. besitzt jede natürliche Zahl  $N$ , für welche  $\varrho_N(z_1, \Delta_N) > \varrho(z_1, z_2)$  ist, diese Eigenschaft). Entsprechende Aussagen gelten für die Mengenabstände. Wir leiten zunächst eine diese Metrik betreffende Ungleichung her.

Sei  $B > 1$  eine vorgegebene positive Zahl. Im Folgenden lassen wir nur solche Indizes  $n$  zu, für welche  $R_n > 2B$  ist; nach Lemma 4 gibt es höchstens endlich viele Indizes, welche diese Bedingung *nicht* erfüllen. Wir definieren

$$\beta_n = \tilde{\mu}_n(\{\omega \mid |\omega| \leq 2B\})$$

und

$$\gamma_n(r) = \tilde{\mu}_n(\{\omega \mid 2B < |\omega| < r\})$$

für  $2B < r < R_n$ . Mit Anwendung von (24) erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{q}_n(0, 1) &\leq \int_0^1 e^{\tilde{\nu}_n(t)} dt \leq e^{c_n} \int_0^1 t^k \exp \left\{ \int_{D_n} g_n(t, \omega) d\tilde{\mu}_n(e_\omega) \right\} dt \leq \\ &\leq \exp \left\{ c_n + \int_{r=2B}^{R_n} \log \left| \frac{R_n - r/R_n}{r-1} \right| d\gamma_n(r) \right\} \cdot \\ &\cdot \int_0^1 \exp \left\{ \int_{|\omega| \leq 2B} \log \frac{2R_n}{|t-\omega|} d\tilde{\mu}_n(e_\omega) \right\} dt. \end{aligned} \quad (54)$$

Dabei wurde im letzten Schritt der Faktor  $t^k$  ( $\leq 1$ ) durch die Konstante 1 ersetzt. Ausserdem wurde von folgenden Abschätzungen für die Greensche Funktion  $g_n$  von



$D_n$  Gebrauch gemacht:

$$g_n(t, \omega) \leq \log \frac{2R_n}{|t - \omega|} \quad \text{für } |\omega| \leq 2B,$$

$$g_n(t, \omega) \leq g_n(t, |\omega|) \leq g_n(1, |\omega|) = \log \left| \frac{R_n - \frac{|\omega|}{R_n}}{|\omega| - 1} \right| \quad \text{für } 2B < |\omega| < R_n.$$

Auf analoge Weise wie Ungleichung (44) beweist man, dass

$$\int_0^1 \exp \left\{ \int_{|\omega| \leq 2B} \log \frac{2R_n}{|t - \omega|} d\tilde{\mu}_n(e_\omega) \right\} dt \leq \frac{2^{2\beta_n}}{1 - \beta_n} R_n^{\beta_n} < 4R_n^{\beta_n}. \quad (55)$$

Dabei wurde zuletzt benützt, dass  $\beta_n \leq \alpha < \frac{1}{2}$ . Aus (54) und (55) folgt

$$\tilde{q}_n(0, 1) \leq 4e^{c_n} R_n^{\beta_n} \exp \left\{ \int_{r=2B}^{R_n} \log \left| \frac{R_n - r/R_n}{r - 1} \right| d\gamma_n(r) \right\}. \quad (56)$$

Nun soll  $\tilde{q}_n(0, C_B)$  nach unten abgeschätzt werden<sup>4)</sup>. Für  $|w| \leq B$  ist

$$\tilde{v}_n(w) \geq c_n + k \log |w| + \beta_n \log \frac{R_n}{3B} + \int_{r=2B}^{R_n} \log \frac{R_n + \frac{rB}{R_n}}{r + B} d\gamma_n(r). \quad (57)$$

Diese Ungleichung folgt aus (24) unter Beachtung folgender Abschätzungen für die Greensche Funktion  $g_n$  von  $D_n$ :

$$g_n(w, \omega) \geq g_n(|w|, -|\omega|) \geq g_n(B, -2B) = \log \frac{R_n + \frac{2B^2}{R_n}}{3B} > \log \frac{R_n}{3B}$$

für  $|w| \leq B$  und  $|\omega| \leq 2B$ ,

$$g_n(w, \omega) \geq g_n(|w|, -|\omega|) \geq g_n(B, -|\omega|) = \log \frac{R_n + \frac{|\omega|B}{R_n}}{|\omega| + B} \quad \text{für } |w| \leq B$$

und  $2B < |\omega| < R_n$ .

Die Metrik  $e^{\tilde{v}_n^*(w)} |dw|$ , wobei  $\tilde{v}_n^*(w)$  die rechte Seite von (57) bezeichnet, ist rotations-symmetrisch bezüglich 0. Infolgedessen realisieren die von 0 ausgehenden (euklidisch geradlinigen) Strahlen die kürzeste Verbindung von 0 mit  $C_B$  in dieser Metrik. Aus

<sup>4)</sup> Wir führen die Bezeichnung  $C_r = \{w \mid |w| = r\}$  ein.

dieser Tatsache folgt mit (57)

$$\begin{aligned} \tilde{q}_n(0, C_B) &\geq \int_0^B e^{\tilde{v}_n(t)} dt = \\ &= e^{c_n} \left(\frac{R_n}{3B}\right)^{\beta_n} \cdot \exp \left\{ \int_{r=2B}^{R_n} \log \frac{R_n + \frac{rB}{R_n}}{r+B} d\gamma_n(r) \right\} \cdot \frac{B^{k+1}}{k+1}. \end{aligned} \quad (58)$$

Berücksichtigt man, dass die Ungleichungen  $B > 1$ ,  $k \geq 1$  und  $0 \leq \beta_n \leq \alpha < \frac{1}{2}$  die Abschätzung

$$\frac{B^{k+1-\beta_n}}{3^{\beta_n}} \geq \frac{B}{3}$$

implizieren, so erhält man aus (56) und (58)

$$\frac{\tilde{q}_n(0, C_B)}{\tilde{q}_n(0, 1)} \geq \frac{B}{12(k+1)} \cdot \exp \left\{ \int_{r=2B}^{R_n} \log \left| \frac{R_n + \frac{rB}{R_n} \cdot \frac{r-1}{r}}{R_n - \frac{r}{R_n}} \cdot \frac{r+B}{r+B} \right| d\gamma_n(r) \right\}. \quad (59)$$

Der Betrag des ersten Faktors des zwischen den Absolutstrichen stehenden Produktes ist offensichtlich grösser als 1; der zweite Faktor wird – wie eine elementare Betrachtung zeigt – nie kleiner als  $\frac{1}{3}$ . Der Integrand wird also minorisiert durch die Konstante

$$\log \frac{1}{3}, \quad \text{und da} \quad \int_{r=2B}^{R_n} d\gamma_n(r) \leq \alpha < \frac{1}{2}$$

ist, folgt aus (59)

$$\frac{\tilde{q}_n(0, C_B)}{\tilde{q}_n(0, 1)} \geq \frac{B}{12(k+1)3^\alpha} > \frac{B}{24(k+1)}. \quad (60)$$

Sei  $A > 0$  beliebig vorgegeben. Wir werden nun zeigen, dass es zwei positive Zahlen  $B$  und  $N$  gibt mit folgender Eigenschaft: Aus  $|z| \leq A$  folgt  $|\varphi_n(z)| \leq B$  für alle  $n > N$ . Damit wird Lemma 5 bewiesen sein.

Es gibt eine natürliche Zahl  $N_0$  mit der Eigenschaft, dass

$$\varrho(0, C_{N_0}) \geq \max_{|z| \leq A} \varrho(0, z). \quad (61)$$

Wir definieren

$$B = \max \left( 2, 24(k+1) \frac{\varrho(0, C_{N_0})}{\varrho_{N_0}(0, 1)} \right). \quad (62)$$

Nach Lemma 4 existiert ein Index  $N_1$  so, dass

$$R_n > 2B \quad \text{für alle } n > N_1. \quad (63)$$

Schliesslich gibt es einen Index  $N_2$  mit der Eigenschaft, dass

$$\tilde{q}_n(0, 1) = q_n(0, 1) \quad \text{für alle } n > N_2. \quad (64)$$

Wir definieren  $N = \max(N_0, N_1, N_2)$ .

Für beliebige  $z, |z| \leq A$ , und alle  $n > N$  folgt aus (61), (62), (63) und (60)

$$\frac{q_n(0, z)}{q_n(0, 1)} \leq \frac{q(0, C_{N_0})}{q_n(0, 1)} \leq \frac{q(0, C_{N_0})}{q_{N_0}(0, 1)} \leq \frac{B}{24(k+1)} \leq \frac{\tilde{q}_n(0, C_B)}{\tilde{q}_n(0, 1)}. \quad (65)$$

Aus (64) und (65) schliessen wir, dass

$$q_n(0, z) \leq \tilde{q}_n(0, C_B) = q_n(0, \varphi_n^{-1}(C_B)).$$

Es liegt also  $z$  im Innengebiet der Kurve  $\varphi_n^{-1}(C_B)$ , und dies impliziert  $|\varphi_n(z)| \leq B$ .

*Q.E.D.*

### 3. Der Darstellungssatz

**SATZ 2.** Die Funktion  $u(z)$  sei  $\delta$ -subharmonisch im Gebiete  $\Omega = \{z \mid R < |z| < \infty\}$ ,  $R > 0$ , und erfülle folgende Bedingungen:

- (a) die totale Variation des zugeordneten Masses  $\nu = \Delta u / 2\pi$  sei endlich<sup>5)</sup>
- (b) für jeden ins Unendliche führenden Weg  $\gamma$  gilt<sup>6)</sup>

$$\int_{\gamma} e^{u(z)} |dz| = \infty.$$

Dann besitzt  $u$  die Darstellung

$$u(z) = \int_{\Omega} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\nu(e_{\zeta}) + c \log |z| + h(z), \quad (66)$$

wobei  $c$  eine Konstante und  $h$  eine in  $\Omega$  und im Unendlichen harmonische Funktion bezeichnet.

<sup>5)</sup> Der Laplaceoperator ist hier und im Folgenden im Sinne der Theorie der Distributionen [11] zu verstehen.

<sup>6)</sup> Auf jeder lokal rektifizierbaren Kurve  $\gamma$  ist  $e^u$  aus folgenden Gründen eine messbare Funktion der Bogenlänge: (1)  $u$  ist eine Differenz halbstetiger Funktionen; (2) die Menge  $A$ , auf welcher  $u$  undefiniert ist, schneidet  $\gamma$  in einer Menge vom Längenmass 0 auf  $\gamma$ . Da  $A$  die logarithmische Kapazität 0 besitzt, ergibt sich der Beweis von (2) durch Anwendung eines Resultates von M. TSUJI (Satz 7 in [12]). Hierauf hat mich Herr Pfluger hingewiesen.

BEWEIS. Es sei  $v = v^+ - v^-$  die Jordansche Zerlegung des Masses  $v = \Delta u / 2\pi$ , und es bezeichne  $g_0$  die Greensche Funktion des Gebietes  $\Omega + \{\infty\}$ . Die Funktion

$$u_1(z) = u(z) + \int_{\Omega} g_0(z, \zeta) dv^+(e_{\zeta}) \quad (67)$$

ist superharmonisch in  $\Omega$ , und es gilt  $u_1 \geq u$  und  $\Delta u_1 = -2\pi v^-$ . Da

$$g_0(z, \zeta) = \log \left| \frac{R - \frac{z\bar{\zeta}}{R}}{z - \zeta} \right|,$$

folgt aus (67)

$$\begin{aligned} u(z) &= u_1(z) + \int_{\Omega} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| dv^+(e_{\zeta}) \\ &\quad - v^+(\Omega) \log |z| - \int_{\Omega} \log \left| \frac{R^2 - z\bar{\zeta}}{Rz\zeta} \right| dv^+(e_{\zeta}). \end{aligned} \quad (68)$$

Wir wählen einen Radius  $R_1 > R$ . Es existiert eine in ganz  $\mathbf{C}$  definierte,  $\delta$ -subharmonische Funktion  $u_2$  mit der Eigenschaft, dass  $u_2 \equiv u_1$  in  $\Omega_1 = \{z \mid R_1 < |z| < \infty\}$ . (Man definiere etwa

$$u_2(z) = F(z) - \int_{\Omega} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| dv^-(e_{\zeta}),$$

wobei  $F$  eine in ganz  $\mathbf{C}$  definierte, reellwertige, zweimal stetig differenzierbare Funktion bezeichnet, welche auf  $\Omega_1$  mit der in  $\Omega$  harmonischen Funktion

$$u_1(z) + \int_{\Omega} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| dv^-(e_{\zeta})$$

übereinstimmt).

Nun wählen wir einen Radius  $R_2 > R_1$  derart, dass  $v^-(\{\zeta \mid |\zeta| > R_2\}) < \frac{1}{2}$ , und definieren

$$v(z) = u_2(z) + k \log |z| - \int_{|\zeta| \leq R_2} \log |z - \zeta| d\sigma(e_{\zeta}), \quad (69)$$

wobei  $\sigma = \Delta u_2 / 2\pi$  und  $k$  eine natürliche Zahl bezeichnet, welche die Ungleichung

$$k > \sigma(\{\zeta \mid |\zeta| \leq R_2\}) \quad (70)$$

erfülle. Dann gilt:

*Die Funktion  $v$  ist darstellbar in der Form (3) und befriedigt die zu Beginn des Abschnitts 2 aufgezählten Voraussetzungen.*

Diese Eigenschaften von  $v$  ergeben sich direkt aus obiger Konstruktion. Insbesondere ist die Vollständigkeit der Metrik  $e^{v(z)}|dz|$  eine Konsequenz von Eigenschaft (b) der Funktion  $u$  und von der – zufolge (70) und (67) – in einer Umgebung von  $\infty$  gültigen Ungleichung  $v(z) > u_2(z) = u_1(z) \geq u(z)$ .

Im Folgenden soll verifiziert werden, dass

$$v(z) = - \int_{\zeta\text{-Ebene}} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\mu(e_\zeta) + k \log |z| + d \quad (71)$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$ , wobei  $\mu$  das in Abschnitt 2 so bezeichnete Mass und  $d$  eine Konstante bedeutet.

Damit wird Satz 2 bewiesen sein: Denn aus (68), (69) und (71) folgt zunächst, dass  $u$  im Gebiete  $\Omega_2 = \{z \mid R_2 < |z| < \infty\}$  die in Satz 2 behauptete Darstellung zulässt. Vermöge dieser Beziehungen kann nämlich  $u$  als Summe geschrieben werden, deren Glieder sämtliche die erwähnte Darstellung besitzen. (Man beachte, dass der letzte Term auf der rechten Seite von (68) in  $\Omega + \{\infty\}$  harmonisch ist). Es ist also die in  $\Omega_2$  harmonische Funktion

$$H_2(z) = u(z) - \int_{\Omega_2} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| dv(e_\zeta)$$

im Unendlichen entweder harmonisch oder logarithmisch singulär. Daraus folgt dieselbe Eigenschaft für die in  $\Omega$  harmonische Funktion

$$H_2(z) - \int_{\Omega - \Omega_2} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| dv(e_\zeta) = u(z) - \int_{\Omega} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| dv(e_\zeta).$$

Dies ist aber die Aussage von Satz 2.

Zum Beweise von (71) machen wir Gebrauch von Lemma 3. Die Darstellung (24) kann auch in der Form

$$\tilde{v}_n(w) = k \log |w| + \int_{D_n} [g_n(w, \omega) - g_n(w, 0)] d\tilde{\mu}_n(e_\omega) + d_n \quad (72)$$

geschrieben werden. Es ist

$$g_n(w, \omega) - g_n(w, 0) = \log \left| 1 - \frac{w\bar{\omega}}{R_n^2} \right| - \log \left| 1 - \frac{w}{\omega} \right| \quad (73)$$

für alle  $w, \omega \in D_n$ . Aus (34), (72) und (73) folgt, dass für alle  $z \in \Omega_n$

$$v_n(z) = k \log |\varphi_n(z)| + \log |\varphi_n'(z)| + d_n + \int_{D_n} \log \left| 1 - \frac{\varphi_n(z)\bar{\omega}}{R_n^2} \right| d\tilde{\mu}_n(e_\omega) - \int_{D_n} \log \left| 1 - \frac{\varphi_n(z)}{\omega} \right| d\tilde{\mu}_n(e_\omega) \quad (74)$$

( $n=1, 2, 3, \dots$ ). Wir dürfen annehmen, dass die Abbildungsfolge  $\{\varphi_n\}$  in der endlichen  $z$ -Ebene lokal gleichmässig konvergiert. Durch Übergang auf eine geeignete Teilfolge unter Anwendung eines Diagonalverfahrens kann man dies jedenfalls erreichen, denn nach Lemma 5 ist die Folge  $\{\varphi_n\}$  lokal gleichmässig beschränkt. Da  $\varphi_n(0)=0$  und  $\varphi_n(1)=1$  für alle  $n$ , kann die Grenzfunktion  $\varphi$  der Folge  $\{\varphi_n\}$  keine Konstante sein. Aus dieser Tatsache und daraus, dass  $\varphi$  Limes der schlichten Funktionen  $\varphi_n: \Omega_n \rightarrow D_n$  ist, schliessen wir, dass die endliche  $z$ -Ebene durch  $\varphi$  schlicht und konform auf die endliche  $w$ -Ebene abgebildet wird. Da ausserdem  $\varphi(0)=0$  und  $\varphi(1)=1$  ist, folgt  $\varphi(z)=z$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Also gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z) = z \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'_n(z) = 1, \tag{75}$$

wobei die Konvergenz in  $\mathbb{C}$  lokal gleichmässig erfolgt. Für alle auf  $\mathbb{C}$  definierten, stetigen Funktionen  $f$  mit kompakten Träger ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(\omega) d\tilde{\mu}_n(e_\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(\varphi_n(\zeta)) d\mu(e_\zeta) = \int f(\zeta) d\mu(e_\zeta),$$

d.h. mit  $n \rightarrow \infty$  konvergiert  $\tilde{\mu}_n$  schwach gegen  $\mu$ .

Aus (75) folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [k \log |\varphi_n(z)| + \log |\varphi'_n(z)|] = k \log |z| \tag{76}$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Die Abschätzungen

$$\tilde{\mu}_n(D_n) \leq \alpha < \frac{1}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

und Lemma 4 implizieren

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} \log \left| 1 - \frac{\varphi_n(z) \bar{\omega}}{R_n^2} \right| d\tilde{\mu}_n(e_\omega) = 0 \tag{77}$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Wir verifizieren nun, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} \log \left| 1 - \frac{\varphi_n(z)}{\omega} \right| d\tilde{\mu}_n(e_\omega) = \int_{\zeta\text{-Ebene}} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\mu(e_\zeta) \tag{78}$$

für alle  $z$  aus der Menge  $E = \{z \neq 0 \mid v(z) < \infty\}$ .

Damit wird (71) (und also auch Satz 2) bewiesen sein. Denn, da  $v_n \uparrow v$  für  $n \uparrow \infty$ , schliesst man aus (74), (76), (77) und (78) – wobei man einen festen Punkt  $z \in E$  betrachtet – auf die Konvergenz der Zahlfolge  $\{d_n\}$ . Sei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d. \tag{79}$$

Aus (74) und (76) bis (79) ersehen wir, dass (71) für alle  $z \in E$  erfüllt ist. Da beide

Seiten von (71) in  $\mathbf{C} - \{0\}$  superharmonische Funktionen sind, kann daraus auf die Gültigkeit dieser Darstellung in ganz  $\mathbf{C} - \{0\}$  geschlossen werden. Für  $z=0$  ist schliesslich (71) trivialerweise richtig.

Seien  $z \in E$  und  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Sei  $N_0$  eine natürliche Zahl so, dass  $z \in \Omega_n$  für  $n > N_0$ . Es existiert eine positive Zahl  $R (> |z|)$  mit folgenden Eigenschaften:

$$\mu(\{\zeta \mid |\zeta| = R\}) = 0; \quad (a)$$

$$\left| \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{und} \quad \left| \log \left| 1 - \frac{\varphi_n(z)}{\zeta} \right| \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (b)$$

für  $n = N_0 + 1, N_0 + 2, \dots$  und alle  $\zeta$  aus der Menge  $G = \{\zeta \mid |\zeta| > R\}$ . Da  $\mu(G) < \frac{1}{2}$  und  $\tilde{\mu}_n(G \cap D_n) < \frac{1}{2}$  für alle  $n$ , folgt

$$\left| \int_G \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\mu(e_\zeta) \right| < \frac{\varepsilon}{8} \quad (80)$$

und

$$\left| \int_{G \cap D_n} \log \left| 1 - \frac{\varphi_n(z)}{\omega} \right| d\tilde{\mu}_n(e_\omega) \right| < \frac{\varepsilon}{8} \quad (n = N_0 + 1, N_0 + 2, \dots). \quad (81)$$

Wir führen die Bezeichnung  $D(z; r) = \{\zeta \mid |z - \zeta| < r\}$  ein. Es gibt ein  $\delta, 0 < \delta < R - |z|$ , mit der Eigenschaft, dass (a)  $\mu(\{\zeta \mid |z - \zeta| = \delta\}) = 0$  und (b) die Ungleichungen

$$\left| \int_{D(z; \delta)} \log |z - \zeta| d\mu(e_\zeta) \right| < \frac{\varepsilon}{8}, \quad \left| \int_{D(z; \delta)} \log |\zeta| d\mu(e_\zeta) \right| < \frac{\varepsilon}{8} \quad (82)$$

und

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \int_{D(z; \delta) \cap D_n} \log |\varphi_n(z) - \omega| d\tilde{\mu}_n(e_\omega) \right| < \frac{\varepsilon}{8}, \\ \left| \int_{D(z; \delta) \cap D_n} \log |\omega| d\tilde{\mu}_n(e_\omega) \right| < \frac{\varepsilon}{8} \end{array} \right. \quad (n = N_0 + 1, N_0 + 2, \dots) \quad (83)$$

erfüllt sind.

Zur Verifikation dieser Aussage bemerken wir zunächst, dass die Voraussetzung  $v(z) < \infty$  äquivalent ist mit der Existenz des Integrals

$$\int_B \log |z - \zeta| d\mu(e_\zeta)$$

für beschränkte Borelmengen  $B$ . Es kann daher  $\delta_1 > 0$  so klein gewählt werden, dass die erste der Abschätzungen (82) für  $0 < \delta < \delta_1$  erfüllt ist. Durch die Bedingung  $v(z) < \infty$  wird auch  $\mu(\{z\}) = 0$  impliziert. Daraus schliessen wir, dass für genügend kleine  $\delta$  ( $0 < \delta < \delta_2$ ) die zweite der Ungleichungen (82) ebenfalls befriedigt ist.

Da die Massenbelegungen  $\tilde{\mu}_n$  unendlich oft differenzierbare Dichtefunktionen besitzen, gibt es zu jeder endlichen Menge  $I$  von natürlichen Zahlen ( $> N_0$ ) ein  $\delta_3 > 0$  derart, dass (83) für  $n \in I$  und  $0 < \delta < \delta_3$  gültig ist. Es genügt daher, noch zu beweisen, dass ein Index  $N$  und ein  $\delta_4 > 0$  existieren so, dass (83) für  $n > N$  und  $0 < \delta < \delta_4$  erfüllt ist.

Es gibt ein  $\eta, 0 < \eta < \frac{1}{3}$ , mit den Eigenschaften

$$\left| \int_{D(z; 2\eta)} \log |z - \zeta| d\mu(e_\zeta) \right| < \frac{\varepsilon}{16} \tag{a}$$

und

$$\mu(D(z; 2\eta)) < \frac{\varepsilon}{32}. \tag{b}$$

Es bezeichne  $\mu_\eta$  die Einschränkung des Masses  $\mu$  auf die Kreisscheibe  $D(z; 2\eta)$  (definiert durch  $\mu_\eta(e) = \mu(e \cap D(z; 2\eta))$  für alle Borelmengen  $e$ ). Für alle  $n > N_1 = [1/\eta]$  gilt ( $da_\tau =$  Flächenelement in der  $\tau$ -Ebene)

$$\begin{aligned} \int_{D(z; \eta)} \log |z - \zeta| d\mu_n(e_\zeta) &= \\ &= \left| \int_{\tau\text{-Ebene}} da_\tau \log |z - \tau| \int \alpha_n(\tau - \zeta) d\mu_\eta(e_\zeta) \right| = \\ &= \int_{\tau\text{-Ebene}} da_\tau \alpha_n(z - \tau) \left| \int \log |\tau - \zeta| d\mu_\eta(e_\zeta) \right| \leq \\ &\leq \left| \int \log |z - \zeta| d\mu_\eta(e_\zeta) \right| < \frac{\varepsilon}{16}, \end{aligned} \tag{84}$$

wobei  $\alpha_n$  hier die durch (6) definierte Funktion bezeichnet. Dabei wurden benützt die Eigenschaft (a) der Zahl  $\eta$ , die Kommutativität des Faltungsproduktes sowie die Tatsache, dass die Funktion

$$\left| \int \log |\tau - \zeta| d\mu_\eta(e_\zeta) \right| \quad \text{in} \quad D(z; \eta)$$

superharmonisch ist. Eigenschaft (b) von  $\eta$  impliziert

$$\mu_n(D(z; \eta)) < \frac{\varepsilon}{32}. \tag{85}$$

Aus (75) folgt die Existenz einer Zahl  $N_2$  so, dass

$$|\varphi'_n(\zeta)| \geq \frac{1}{2} \tag{86}$$



für  $n > N_2$  und  $\zeta \in D(z; \eta)$ . Schliesslich existieren ein Index  $N_3$  und eine Zahl  $\delta_4$ ,  $0 < \delta_4 < 1$ , mit der Eigenschaft, dass  $\varphi_n^{-1}(D(z; \delta_4)) \subset D(z; \eta)$  für alle  $n > N_3$ . Aus (84) bis (86) schliessen wir, dass für  $n > N = \max(N_0, N_1, N_2, N_3)$  und  $0 < \delta < \delta_4$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} \left| \int_{D(z; \delta)} \log |\varphi_n(z) - \omega| d\tilde{\mu}_n(e_\omega) \right| &\leq \left| \int_{\varphi_n^{-1}(D(z; \delta))} \log |\varphi_n(z) - \varphi_n(\zeta)| d\mu_n(e_\zeta) \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{\varphi_n^{-1}(D(z; \delta))} \log \frac{|z - \zeta|}{2} d\mu_n(e_\zeta) \right| \leq \left| \int_{D(z; \eta)} \log \frac{|z - \zeta|}{2} d\mu_n(e_\zeta) \right| \leq \\ &\leq (\log 2) \mu_n(D(z; \eta)) + \left| \int_{D(z; \eta)} \log |z - \zeta| d\mu_n(e_\zeta) \right| < \frac{\varepsilon}{8} \end{aligned}$$

erfüllt ist. Dieselbe Methode liefert auch die zweite der Abschätzungen (83). In diesem Falle seien jedoch die Details dem Leser überlassen.

Es gibt einen Index  $M_1 \geq N_0$  derart, dass

$$|\log |z - \zeta| - \log |\varphi_n(z) - \zeta|| < \frac{\varepsilon}{4}$$

für  $n > M_1$  und alle  $\zeta$  aus der Menge  $H = \mathbb{C} - (G \cup D(z; \delta))$ . Da  $\tilde{\mu}_n(H \cap D_n) < \frac{1}{2}$ , gilt für  $n > M_1$

$$\left| \int_{H \cap D_n} \log \left| 1 - \frac{z}{\omega} \right| d\tilde{\mu}_n(e_\omega) - \int_{H \cap D_n} \log \left| 1 - \frac{\varphi_n(z)}{\omega} \right| d\tilde{\mu}_n(e_\omega) \right| < \frac{\varepsilon}{8}. \quad (87)$$

Da die Folge  $\{\tilde{\mu}_n\}$  schwach gegen  $\mu$  konvergiert, folgt mit Berücksichtigung der Eigenschaften (a) von  $R$  und  $\delta$  die Existenz einer Zahl  $M_2 \geq N_0$  derart, dass

$$\left| \int_H \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\mu(e_\zeta) - \int_{H \cap D_n} \log \left| 1 - \frac{z}{\omega} \right| d\tilde{\mu}_n(e_\omega) \right| < \frac{\varepsilon}{8} \quad (88)$$

für alle  $n > M_2$ . (Der Singularität des Integranden im Ursprung braucht hier keine Beachtung geschenkt zu werden, da die Träger der Massenbelegungen  $\mu$  und  $\tilde{\mu}_n$  – letztere für genügend grosse  $n$  – zu einer festen Umgebung des Ursprungs disjunkt sind). Aus (80) bis (83), (86) und (87) schliessen wir unter Anwendung der Dreiecksungleichung, dass

$$\left| \int_{D_n} \log \left| 1 - \frac{\varphi_n(z)}{\omega} \right| d\tilde{\mu}_n(e_\omega) - \int_{\zeta\text{-Ebene}} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\mu(e_\zeta) \right| < \varepsilon$$

für alle  $n > \max(M_1, M_2)$ . Damit ist (78) bewiesen.

*Q.E.D.*

**4. Beweis der übrigen Sätze**

**BEWEIS VON SATZ 3**

1. *Behauptung: Die Bedingungen (a) und (b) sind hinreichend.*

*Beweis: Die Funktion*

$$v(z) = u\left(\frac{1}{z}\right) - (\alpha + 2) \log |z|$$

ist  $\delta$ -subharmonisch im Gebiet

$$\Omega = \{z \mid R_0 < |z| < \infty\}, \quad R_0 > 1/R,$$

und erfüllt die Voraussetzungen von Satz 2. Das Mass  $\Delta v$  entsteht nämlich aus dem Mass  $\Delta u$  durch Verpflanzung bei der Abbildung

$$\varphi : z \rightarrow \frac{1}{z},$$

besitzt also eine endliche totale Variation. Ist ferner  $\gamma$  irgend ein ins Unendliche führender Weg, so führt der Weg  $\gamma' = \varphi(\gamma)$  in den Ursprung, und es ist

$$\int_{\gamma} e^{v(z)} |dz| = \int_{\gamma'} e^{u(z)} |z|^\alpha |dz| = \infty.$$

Also gilt nach Satz 2 die Darstellung

$$v(z) = \int_{\Omega} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| dv(e_{\zeta}) + c \log |z| + h(z), \tag{89}$$

wobei  $v = \Delta v / 2\pi$ ,  $c$  eine Konstante und  $h$  eine in  $\Omega$  und im Unendlichen harmonische Funktion ist. Bezeichnet  $g_0$  die Greensche Funktion des Gebietes  $\Omega + \{\infty\}$ , so ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| dv(e_{\zeta}) &= - \int_{\Omega} g_0(z, \zeta) dv(e_{\zeta}) \\ &+ v(\Omega) \log |z| + \int_{\Omega} \log \left| \frac{R^2 - z \bar{\zeta}}{R z \zeta} \right| dv(e_{\zeta}). \end{aligned} \tag{90}$$

Da der letzte Summand auf der rechten Seite von (90) in  $\Omega$  und im Unendlichen harmonisch ist, folgt aus (89) und (90) die Darstellung

$$v(z) = - \int_{\Omega} g_0(z, \zeta) dv(e_{\zeta}) + c_1 \log |z| + h_1(z),$$

wobei  $c_1$  eine Konstante und  $h_1$  eine in  $\Omega$  und im Unendlichen harmonische Funktion

bezeichnen. Daraus folgt, dass die Funktion  $u$  im Gebiete  $G_1 = \{z \mid 0 < |z| < 1/R_0\}$  die Darstellung

$$u(z) = - \int_{G_1} g(z, \zeta) d\mu(e_\zeta) - (\alpha + c_1 + 2) \log |z| + h_1\left(\frac{1}{z}\right) \quad (91)$$

zulässt, wobei  $\mu = \Delta u / 2\pi$  und  $g$  die Greensche Funktion des Gebietes  $G_1 + \{0\}$  bezeichnet. Die Funktion  $h_1(1/z)$  ist in  $G_1$  harmonisch. Man kann deshalb der Darstellung (91) entnehmen, dass  $u$  in  $G_1$   $\delta$ -subharmonisch ist. Q.E.D.

**2. Behauptung:** Die Bedingungen (a) und (b) sind notwendig.

**Beweis:** Die Notwendigkeit von (a) ist klar. Zur Verifikation der Notwendigkeit von (b) stützen wir uns auf den folgenden Hilfssatz:

**LEMMA 6.** Sei  $\nu$  ein Radonsches Mass endlicher totaler Variation mit dem Träger  $\Omega = \{z \mid R_0 < |z| < \infty\}$ ,  $R_0 > 0$ . Es bezeichne

$$w(z) = \int_{\Omega} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\nu(e_\zeta). \quad (92)$$

Dann existieren eine reelle Zahl  $k$  und eine Menge positiver Zahlen  $E$  von endlichem linearem Lebesgueschem Mass derart, dass

$$\inf_{|z|=r} w(z) > k \log r \quad (93)$$

für alle nicht zu  $E$  gehörenden positiven Zahlen  $r$ .

**ANMERKUNG.** Sei  $\nu = \nu_1 - \nu_2$  die Jordansche Zerlegung von  $\nu$ . Es ist (nach Definition)  $w(z) = w_1(z) - w_2(z)$ , wobei

$$w_j(z) = \int_{\Omega} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\nu_j(e_\zeta) \quad (j = 1, 2). \quad (94)$$

Die Funktion  $w$  bleibt also undefiniert auf der Menge  $A = \{z \mid w_1(z) = w_2(z) = -\infty\}$ . Diese ist aber von der Kapazität 0 und für uns nicht von Belang. Bei der Bildung des Infimums in (93) sind in  $A$  liegende Punkte auszunehmen.

**BEWEIS VON LEMMA 6.** Wir definieren

$$M_j(r) = \max_{|z|=r} w_j(z) \quad \text{und} \quad m_j(r) = \inf_{|z|=r} w_j(z) \quad (95)$$

( $j=1, 2$ ;  $r > 0$ ). Es gilt (Satz 5, p. 100 in [7])

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M_j(r)}{\log r} = \nu_j(\Omega) \quad (j = 1, 2). \quad (96)$$

Ferner wurde bewiesen (Satz 6, p. 100 in [7]): Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Menge positiver Zahlen  $L(\varepsilon)$  von endlichem linearem Mass mit der Eigenschaft, dass

$$m_1(r) \geq (1 - \varepsilon)M_1(r) \tag{97}$$

für alle im Komplement von  $L(\varepsilon)$  liegenden  $r$ .

Nach (96) gibt es einen Radius  $R_1$  so, dass

$$\left| \frac{M_j(r)}{\log r} - v_j(\Omega) \right| < 1 \tag{98}$$

für  $r > R_1$  und  $j=1, 2$ . Definieren wir nun

$$E = L\left(\frac{1}{2}\right) \cup \{r \mid r \leq R_1\},$$

so gilt wegen (95), (97) und (98) für alle  $r \notin E$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} \inf_{|z|=r} w(z) &\geq m_1(r) - M_2(r) \geq \frac{1}{2}M_1(r) - M_2(r) \geq \\ &\geq \left( \frac{v_1(\Omega)}{2} - v_2(\Omega) - \frac{3}{2} \right) \log r. \end{aligned}$$

Wählen wir etwa  $k = -v_2(\Omega) - 2$ , so ist (93) für  $r \notin E$  erfüllt. Q.E.D.

Zum Beweis der Notwendigkeit von (b) betrachten wir die Funktion  $v(z) = u(1/z)$  in einem Gebiete  $\Omega = \{z \mid R_1 < |z| < \infty\}$ ,  $R_1 > 1/R$ . Sie besitzt dort die Darstellung (vgl. (90))

$$\begin{aligned} v(z) &= - \int_{\Omega} g_0(z, \zeta) dv(e_{\zeta}) + c_1 \log |z| + h_1(z) = \\ &= \int_{\Omega} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| dv(e_{\zeta}) + c \log |z| + h(z). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen  $c_1$  und  $c$  Konstante,  $h_1$  und  $h$  in  $\Omega + \{\infty\}$  harmonische Funktionen,  $g_0$  die Greensche Funktion des Gebietes  $\Omega + \{\infty\}$ , und  $v = \Delta u / 2\pi$ . Unter Anwendung von Lemma 6 schliessen wir: Es existieren zwei reelle Zahlen  $\sigma$  und  $\tau$  sowie eine Menge positiver Zahlen  $E$  von endlichem linearem Mass derart, dass

$$\inf_{|z|=r} v(z) \geq \sigma \log r + \tau \tag{99}$$

für alle im Komplement von  $E$  liegenden positiven Zahlen  $r$ .

Sei nun  $\gamma$  irgend ein in den Punkt 0 führender Weg,  $\gamma'$  sein ins Unendliche führendes Bild bei der Transformation  $z \rightarrow 1/z$ . Wählen wir  $\alpha \leq \sigma - 1$ , so erhalten wir aus (99) – man beachte auch Fussnote<sup>6)</sup> –

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} |z|^{\alpha} e^{u(z)} |dz| &= \int_{\gamma'} |z|^{\alpha-2} e^{v(z)} |dz| \geq \\ &\geq \int_{r_0}^{\infty} \exp \left\{ \inf_{|z|=r} v(z) - (\alpha+2) \log r \right\} dr \geq \int_{(r_0, \infty) \cap CE} \frac{dr}{r} = \infty. \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

## BEWEIS VON SATZ 4

1. *Behauptung: Die Bedingungen (a) und (b) sind hinreichend.*

*Beweis:* Nach Satz 3 folgt aus der Gültigkeit von (a) und (b), dass  $u$   $\delta$ -subharmonisch ist im Gebiete  $G + \{0\}$ . Es bleibt zu verifizieren, dass das Mass  $\mu = -\Delta u / 2\pi$  in  $G + \{0\}$  nicht negativ ist. In  $G$  erfüllt  $\mu$  diese Bedingung jedenfalls, denn nach Voraussetzung ist  $u$  in  $G$  superharmonisch. Daher ist nur noch zu beweisen, dass  $\mu(\{0\}) \geq 0$  ist.

Nehmen wir an, es sei  $\mu(\{0\}) = -\alpha < 0$ . Es gibt einen Radius  $R_1$ ,  $0 < R_1 < R$ , mit der Eigenschaft, dass

$$\mu(G_1) = \beta \leq \min \left( \frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

wobei  $G_1 = \{z | 0 < |z| < R_1\}$ . Für alle  $z \in G_1$  gilt

$$u(z) = \int_{G_1} g(z, \zeta) d\mu(e_{\zeta}) + \alpha \log |z| + h(z), \quad (100)$$

wobei  $g$  die Greensche Funktion von  $G_1 + \{0\}$  und  $h$  eine in  $G_1 + \{0\}$  harmonische Funktion bezeichnen. Da

$$g(z, \zeta) \leq \log \frac{2R_1}{||z| - |\zeta||},$$

schliessen wir aus (100) auf die Existenz einer Zahl  $c$  mit der Eigenschaft, dass

$$u(z) \leq c + \alpha \log |z| + \int_{G_1} \log \frac{1}{||z| - |\zeta||} d\mu(e_{\zeta}) \quad (101)$$

für alle  $z$  aus  $G_0 = \left( z | 0 < |z| < R_0 = \frac{R_1}{2} \right)$ . Diese Abschätzung wird uns auf die Aussage

$$\int_0^{R_0} \frac{e^{u(r)}}{r} dr < \infty \quad (102)$$

führen. Da diese im Widerspruch zur Bedingung (b) steht, wird damit die Behauptung bewiesen sein. Das Integral in (102) soll von nun an zur Abkürzung mit  $I$  bezeichnet werden.

Betrachten wir zunächst den Spezialfall, wo die Masse  $\mu(G_1) = \beta$  ganz in einem Punkte  $\zeta_0$  konzentriert ist. Dann gilt

$$I \leq e^c \int_0^{R_0} t^{\alpha-1} |t - |\zeta_0||^{-\beta} dt \leq M, \quad (103)$$

wobei  $M$  eine von  $\zeta_0$  unabhängige endliche Zahl bedeutet. Zum Beweise von (103) unterscheiden wir zwei Fälle:

(I)  $\alpha \geq 1$ . Dann ist

$$I \leq e^c R_0^{\alpha-1} \int_0^{R_0} |t - |\zeta_0||^{-\beta} dt \leq 2 e^c R_0^{\alpha-1} \int_0^{R_0/2} \left| t - \frac{R_0}{2} \right|^{-\frac{\beta}{2}} dt. \quad (104)$$

(II)  $0 < \alpha < 1$ . Eine Anwendung der Hölderschen Ungleichung

$$\left( p = \frac{\alpha - 2}{2\alpha - 2}, \quad q = \frac{2 - \alpha}{\alpha} \right)$$

ergibt

$$\begin{aligned} I &\leq e^c \left( \int_0^{R_0} t^{p(\alpha-1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^{R_0} |t - |\zeta_0||^{-\beta q} dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq e^c \left( \int_0^{R_0} t^{\frac{\alpha}{2}-1} dt \right)^{\frac{2\alpha-2}{\alpha-2}} \left( 2 \int_0^{R_0/2} \left| t - \frac{R_0}{2} \right|^{\frac{\alpha}{2}-1} dt \right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}. \end{aligned} \quad (105)$$

Da die rechten Seiten von (104) und (105) von  $\zeta_0$  unabhängige Zahlen sind, ist damit (103) bewiesen.

Betrachten wir nun den Fall, da die Einschränkung von  $\mu$  auf  $G_1$  aus endlich vielen Einzelmassen besteht:

$$p_1 \beta \text{ in } \zeta_1, \quad p_2 \beta \text{ in } \zeta_2, \dots, \quad p_m \beta \text{ in } \zeta_m, \\ \sum_{j=1}^m p_j = 1, \quad p_j > 0 (j = 1, 2, \dots, m).$$

Aus der Hölderschen Ungleichung [4, p. 140] und (103) schliessen wir

$$\begin{aligned} I &\leq e^c \int_0^{R_0} \exp \left\{ (\alpha - 1) \log t + \sum_{j=1}^m p_j \beta \log \frac{1}{|t - |\zeta_j||} \right\} dt = \\ &= e^c \int_0^{R_0} \prod_{j=1}^m (t^{\alpha-1} |t - |\zeta_j||^{-\beta})^{p_j} dt \leq e^c \prod_{j=1}^m \left( \int_0^{R_0} t^{\alpha-1} |t - |\zeta_j||^{-\beta} dt \right)^{p_j} \leq M. \end{aligned}$$

Ein naheliegender Grenzübergang liefert schliesslich  $I \leq M$  für beliebiges  $\mu$ , und damit (102). Q.E.D.

2. *Behauptung: Die Bedingungen (a) und (b) sind notwendig.*

*Beweis:* Die Notwendigkeit von (a) ist klar. Da superharmonische Funktionen lokal nach unten beschränkt sind, ergibt sich die Notwendigkeit von (b) leicht durch direkte Abschätzung des in Frage stehenden Integrals. Q.E.D.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] F. FIALA: *Le problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive*, Comment. Math. Helv. 13 (1940–41), 293–346.
- [2] R. FINN: *On normal metrics, and a theorem of Cohn-Vossen*, Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 772–773.
- [3] R. FINN: *On a class of conformal metrics, with application to differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv. 40 (1965), 1–30.
- [4] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. PÓLYA: *Inequalities*. Cambridge University Press, second edition, 1952.
- [5] P. HARTMAN: *Geodesic parallel coordinates in the large*, American J. of Math. 86 (1964), 705–727.
- [6] H. HOPF und W. RINOW: *Ueber den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche*, Comment. Math. Helv. 3 (1931), 209–225.
- [7] A. HUBER: *Ueber Wachstumseigenschaften gewisser Klassen von subharmonischen Funktionen*, Comment. Math. Helv. 26 (1952), 81–116.
- [8] A. HUBER: *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv. 32 (1957), 13–72.
- [9] A. HUBER: *Métriques conformes complètes et singularités isolées de fonctions sousharmoniques*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 260 (1965), 6267–6268.
- [10] I. G. RESCHETNJAK: *Isotherme Koordinaten auf Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung* (Russisch) Sibirskii Mat. J. 1 (1960), 88–116 und 248–276.
- [11] L. SCHWARTZ: *Théorie des distributions*, Tomes I/II, Act. sci. et ind. 1091/1122, Paris 1950/51.
- [12] M. TSUJII: *Beurling's theorem on exceptional sets*, Tohoku Math. J., ser. 2, 2 (1950), 113–125.

Eingegangen den 20. November 1965