Orthogonalabgeschlossene Mengen und lineare Topologien.

Orthogonalabgeschlossene Mengen und lineare Topologien

HEINRICH MATZINGER und BRUNO PETER ZWAHLEN

Die Verallgemeinerung eines einfachen Satzes über lineare Funktionale führt zu einem Verbandsisomorphismus zwischen den linearen Teilräumen eines Vektorraumes E und den orthogonalabgeschlossenen Teilräumen des Dualraumes E^*. Es wird nun gezeigt, wie dieser Isomorphismus mit Hilfe des Filterbegriffes auf alle linearen Teilräume von E^* erweitert werden kann. Dazu wird jedem Teilraum von E ein „linearer" Filter zugeordnet. Dann besteht ein Isomorphismus zwischen dem Verband dieser Filter und dem Verband der linearen Teilräume von E^*.

Da dieselben Filter als Nullumgebungssysteme der schwachen linearen Topologien von E auftreten, wird dadurch auch ein Zusammenhang zwischen den linearen Teilräumen von E^* und den schwachen linearen Topologien von E hergestellt. Die linearen Topologien werden in Klassen mit gleicher schwacher Topologie eingeteilt.

Es sei also E ein Vektorraum über dem Körper K und E^* sein Dualraum.

Für lineare Funktionale $u, u_1, \dots, u_n \in E^*$ mit den Kernen Ker u, Ker $u_1, \dots,$ Ker u_n gilt dann:

u ist genau dann eine Linearkombination von $u_1, \dots, u_n$, wenn

$$\operatorname{Ker} u \supset \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} u_i .$$

Dieser Satz verallgemeinert sich sofort auf beliebige Familien linearer Funktionale.

u ist genau dann eine Linearkombination von $\{u_\gamma\}(\gamma \in \Gamma)$, wenn es endlich viele $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ gibt, so dass

$$\operatorname{Ker} u \supset \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} u_{\gamma_i} . \qquad (*)$$

Sei nun $\mathfrak{F}(u_\gamma)$ derjenige Filter auf E, welcher von den Teilräumen Ker u_γ erzeugt wird [2]. Dann lautet die Bedingung (*)

$$\operatorname{Ker} u \in \mathfrak{F}(u_\gamma) .$$

Es seien $V(E)$ und $V(E^*)$ die Verbände der linearen Teilräume von E bzw. E^* (Verbandsoperationen: Durchschnitt und lineare Hülle) und $V'(E)$ der Teilverband von $V(E)$ der linearen Teilräume endlicher Codimension. Ferner bezeichne $M^\perp$ (bzw. ${}^\perp M^*$) das orthogonale Komplement einer Menge (aus E bzw. E^*). M (bzw. M^*) heisst orthogonalabgeschlossen, wenn $M = {}^\perp M^\perp$ (bzw. $M^* = {}^\perp M^{*\perp}$) gilt.

In E sind genau alle linearen Teilräume orthogonalabgeschlossen, in E^* sind es genau diejenigen linearen Teilräume, die orthogonales Komplement eines Teilraumes von E sind.

Die orthogonalabgeschlossenen Teilräume von E^* bilden einen Verband, $\bar{V}(E^*)$, wenn als Verbandsoperationen der Durchschnitt und die orthogonalabgeschlossene Hülle, $\vee$, ist definiert, als

$$\bigvee_{\alpha} M_{\alpha}^* = {}^{\perp}\Big(\sum_{\alpha} M_{\alpha}^*\Big)^{\perp}, \qquad M_{\alpha}^* \in \bar{V}(E^*), \qquad \alpha \in A.$$

Ueber endlichen Familien A ist die lineare Hülle bereits orthogonalabgeschlossen. Die Zuordnung

$$\begin{array}{ccc} M & \to & M^{\perp} \\ \rotatebox{-90}{$\in$} & & \rotatebox{-90}{$\in$} \\ V(E) & & V(E^*) \end{array}$$

ist 1-1-deutig und kehrt die Ordnung um. Sie stiftet also einen dualen Isomorphismus zwischen den beiden Verbänden $V(E)$ und $\bar{V}(E^*)$ [1].

Im folgenden wird nun gezeigt, wie dieser Isomorphismus auf $V(E^*)$ und eine neu zu definierende, $V(E)$ umfassende Menge fortgesetzt werden kann.

Die Menge aller Filter auf $V(E)$, Φ, bildet mit den üblichen Operationen für Filter einen Verband (Ordnungsrelation $\gg$). Entsprechend wird der Verband aller Filter auf $V'(E)$ mit Φ' bezeichnet.

Der Verband $V(E)$ wird nun in Φ' eingebettet. Dazu wird die Tatsache benützt, dass jeder lineare Teilraum $L \subset E$ vollständig bestimmt wird durch die Menge $\{H_{\alpha}\}$ der ihn enthaltenden Hyperebenen ($H_{\alpha} \supset L$).

$$L = \bigcap_{\alpha} H_{\alpha}$$

$$L \to \dot{L} = \mathfrak{F}_{(L)} = \{F/F \supset L, F \in V'(E)\}$$

$\dot{L}$ heisst der durch L erzeugte Hauptfilter. $\{H_{\alpha}\}$ ist eine Subbasis von L.

Bei dieser Einbettung wird die Ordnung umgekehrt.

Damit kann eine Zuordnung definiert werden zwischen Φ' und $V(E^*)$.

Die Zuordnung

$$\perp \; : \; \Phi' \to V(E^*)$$

$$\perp(\mathfrak{F}) = \sum_{\alpha} M_{\alpha}^*, \qquad M_{\alpha}^* = F_{\alpha}^{\perp}, F_{\alpha} \in \mathfrak{F}$$

$$M^* \in V(E^*) : \perp^{-1}(M^*) = \{F/F^{\perp} \subset M^*, \qquad F \in V'(E)\}$$

ist ein dualer Verbandsisomorphismus, zwischen Φ' und $V(E^*)$. Die Abbildungen $\perp$, $\perp^{-1}$ sind offensichtlich ordnungstreu.

$$\mathfrak{F} \gg \mathfrak{G} \Leftrightarrow \perp(\mathfrak{F}) \supset \perp(\mathfrak{G})$$

$$\perp^{-1}(M^*) \gg \perp^{-1}(N^*) \Leftrightarrow M^* \supset N^*$$

Dem Durchschnitt in $V(E^*)$ entspricht das Infinum der entsprechenden Filter in Φ'.

$$\perp^{-1}(M^* \cap N^*) = \perp^{-1}(M^*) \cap \perp^{-1}(N^*),$$
$$\perp(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}) = \perp(\mathfrak{F}) \cap \perp(\mathfrak{G})$$

Ebenso entspricht dem Supremum (=lineare Hülle) in $V(E^*)$ das Supremum der Filter in Φ'.

$$\perp^{-1}(M^* + N^*) = \perp^{-1}(M^*) \cup \perp^{-1}(N^*)$$
$$\perp(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{G}) = \perp(\mathfrak{F}) + \perp(\mathfrak{G})$$

Der Abbildung $M^* \to {}^{\perp}M^{*\perp}$ (orthogonalabgeschlossene Hülle) in $V(E^*)$ wird durch $\perp^{-1}$ eine Selbstabbildung von Φ' zugeordnet. Diese bildet jeden Filter $\mathfrak{F}$ auf den Hauptfilter ab, der vom Durchschnitt aller Elemente von $\mathfrak{F}$, $\bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F$, erzeugt wird.

Beispiele

1) Zum einleitend erwähnten Satz über lineare Funktionale lässt sich nun noch folgendes bemerken:
   Die Familie $u_\alpha (\alpha \in A)$ ist linear unabhängig, wenn die zugehörigen Hyperebenen H_α, $H_\alpha = \operatorname{Ker} u_\alpha$, eine minimale Subbasis des von ihnen erzeugten Filters bilden. (Eine Subbasis eines Filters ist minimal, wenn jede echte Teilmenge einen echt gröberen Filter erzeugt.)
2) Den orthogonalabgeschlossenen Mengen von $V(E^*)$ entsprechen genau die Hauptfilter in Φ'. (Auf diesen beiden Teilmengen wird der ursprüngliche Isomorphismus induziert.)
3) Den Filtern mit „leerem“ Durchschnitt $(\mathfrak{F}: \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F = \{0\})$ sind diejenigen Teilräume von E^* zugeordnet, die zu E dual sind.
4) Es sei $\mathfrak{F} \in \Phi'(E)$, $K = \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F$.
   Dann entspricht jedem linearen Komplementärraum L von K, $K \oplus L = E$, $K \cap L = \{0\}$ eine Darstellung von $\mathfrak{F}$ als

   $$\mathfrak{F} = \dot{K} \wedge (\mathfrak{F} - K),$$

   wobei

   $$\mathfrak{F} - K = \{F' / F' = P_L(F), P_L \text{ Projektion auf } L, F \in \mathfrak{F}\}.$$

In E^* bedeutet dies:
Jeder lineare Teilraum L^* von E^* ist Durchschnitt eines orthogonalabgeschlossenen Teilraumes (seine orthogonalabgeschlossene Hülle) und eines (nur bis auf Isomorphien bestimmten) Teilraumes, der zu E dual ist (d.h. der im Sinne von DIEUDONNÉ und MACKAY mit E ein Dualsystem bildet [1]).

Jeder Filter $\mathfrak{F}$ von $\Phi(E)$ ist Umgebungsbasis der 0 einer *schwachen linearen Topologie* [1] auf E[1]). Sein Bild $\perp(\mathfrak{F})$ ist die Menge aller stetigen linearen Funktionale (bezüglich dieser Topologie).

$\Phi'(E)$ werde in den Verband $\Phi(E)$ aller Filter auf $V(E)$ eingebettet. Dann kann $\perp$ durch die Definition

$$\perp(\mathfrak{F}) = \sum_{F \in \mathfrak{F}} F^{\perp}$$

zu einer (allerdings nicht mehr 1-1-deutigen) Abbildung

$$\perp : \Phi(E) \to V(E^*)$$

fortgesetzt werden.

Dadurch wird $\Phi(E)$ in Äquivalenzklassen eingeteilt.

$$\mathfrak{F} \text{ äq. } \mathfrak{G} :\Leftrightarrow \perp(\mathfrak{F}) = \perp(\mathfrak{G}) \Leftrightarrow \mathfrak{F}/\Phi' = \mathfrak{G}/\Phi',$$

wobei $/\Phi'$ die Restriktion auf den Teilverband $\Phi'_{(E)} \subset \Phi_{(E)}$ bedeutet.

Jeder Umgebungsfilter der 0 einer *linearen Topologie* auf E ist Element von $\Phi(E)$ und umgekehrt. Zwei Filter auf $\Phi(E)$ sind genau dann äquivalent, wenn ihre schwachen Topologien identisch sind, d.h. wenn sie die gleichen stetigen linearen Funktionale aufweisen. Der Filter $\perp^{-1}(M^*)$ ist der gröbste der zu M^* gehörigen Äquivalenzklasse, der Filter $\{F/F^{\perp} \subset M^*, F \in V(E)\}$ der feinste.

Die orthogonalen Komplemente der Elemente aus $\mathfrak{F}$, $F^{\perp}$, sind Teilmengen von $\perp(\mathfrak{F})$. Die Angabe dieser Teilmengen definiert $\mathfrak{F}$. Für lineartopologische Räume bedeutet dies, dass $\mathfrak{F}$ bestimmt ist durch die Angabe der *stetigen linearen Funktionale* und der *stetigen linearen Abbildungen*

$$E \to \underset{\alpha \in A}{\times} K_\alpha \qquad |A| = \dim E.$$

In $\times K_\alpha$ ist die diskrete Topologie zu wählen.

In einer zweiten Arbeit soll gezeigt werden, dass mit ähnlichen Überlegungen eine Uebersicht über die lokalkonvexen Topologien auf einem Vektorraum E gewonnen werden kann.

LITERATUR

[1] G. Köthe, Topologische lineare Räume I, Kap. II, §§ 9–13. Grundlehren. Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, 1960.

[2] N. Bourbaki, Topologie générale, 3ème édition, chap. I, Actualités Sci. Indust. 1142, Paris 1961.

(Eingegangen, 17. Mai 1966)

Zürich (zurzeit University of Washington, Seattle) und Genf, Institut Battelle.

1) Es wird von einer linearen Topologie nicht verlangt, dass sie Hausdorffsch sei.