Verallgemeinerte Normen in topologischen Gruppen und in topologischen Vektorräumen.

Autor(en): **Matzinger, Heinrich**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **41 (1966-1967)**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-31387

Verallgemeinerte Normen in topologischen Gruppen und in topologischen Vektorräumen

von HEINRICH MATZINGER, Seattle USA.

Die „uniformen Räume“ [1] sind eine Verallgemeinerung des Begriffs der metrischen Räume, bzw. der Räume, deren Topologie durch einen Abstand [2] definiert ist. Eine andere Verallgemeinerung besteht darin, dass zwei Punkten ein Element einer halbgeordneten Menge zugeordnet wird, wobei gewisse, den Axiomen der Abstände entsprechende Bedingungen, erfüllt sein sollen. [6] Diese „Pseudometriken“ sind äquivalent dem Begriff der uniformen Struktur, in dem Sinne, dass ein topologischer Raum genau dann uniformisierbar ist, wenn er pseudometrisierbar ist. [6]

Topologische Gruppen und topologische Vektorräume sind immer uniformisierbar, also immer pseudometrisierbar. In (abelschen) topologischen Gruppen kann man sogar eine invariante Pseudometrik angeben, welche die uniforme Struktur der Gruppe erzeugt.

In topologischen Vektorräumen kann auf der Menge der Distanzen zusätzlich eine skalare Multiplikation definiert werden. Falls für die Funktion $\|x\| = \varrho(0, x)$ das Dreiecksaxiom und die Bedingung $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ gilt, so heisst $\|x\|$ eine Pseudonorm. Ein topologischer Vektorraum ist genau dann pseudonormierbar, wenn er lokalkonvex ist.

In Analogie zu den sogenannten p-Normen [5], können „Pseudo-p-normen“ definiert werden. Wenn man einen Raum mit p-konvexer Umgebungsbasis der Null als „lokal p-konvex“ bezeichnet, dann folgt, dass ein topologischer Vektorraum genau dann „pseudo-p-normierbar“ ist, wenn er „lokal-p konvex“ ist.

In allgemeinen topologischer Vektorräumen kann nur eine Art verallgemeinerter „Pseudonorm“ eingeführt werden, die lediglich ein verallgemeinertes Dreiecksaxiom erfüllt.

Es wurden verschiedene Definitionen für Differenzierbarkeit von Funktionen in lokalkonvexen Vektorräumen gegeben. [4] Die formale Ähnlichkeit der „Pseudonormen“ mit (Halb)-Normen legt es nahe, die übliche Definition der Differenzierbarkeit in Banachräumen [3] auf pseudonormierte (lokalkonvexe) Räume zu übertragen. An einem Spezialfall wird gezeigt, dass dabei eine der bekannten Definitionen als naheliegende Verallgemeinerung erscheint.

Die „Pseudonormen“ würden es, bei richtiger Wahl der Bezeichungen, gestatten, grosse Teile der Theorie der lokalkonvexen Räume wörtlich identisch mit den (halb)-normierten Räumen zu formulieren. Inhaltlich Neues kann dabei natürlich nicht erwartet werden.

1. Pseudometriken und uniforme Räume

Es sei E eine Menge. Eine Abbildung ϱ von $E \times E$ in eine halbgeordnete Menge H, mit kleinstem Element 0, heisst Pseudometrik, wenn

1) $\varrho(x, x) = 0$
2) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$
3) zu $\alpha \in H$ existiert $\beta \in H$, sodass aus $\varrho(x, y)$, $\varrho(y, z) \not\geq \beta$ folgt $\varrho(x, z) \not\geq \alpha$. (Verallgemeinertes Dreiecksaxiom)

ϱ induziert auf E eine uniforme Struktur u. Eine Basis der Nachbarschaften von u bilden die Mengen:

$$W_{\alpha_1, \ldots \alpha_n} = \{(x, y) \mid \varrho(x, y) \not\geq \alpha_i (i = 1, \ldots n), \alpha_i \neq 0\} \quad ^1)$$

Zu jedem uniformen Raum kann anderseits eine Pseudometrik gefunden werden, die u induziert:

$$\varrho(x, y) = \{W \mid (x, y) \notin W, \ W \text{ Nachbarschaft}\}.$$

Jede Funktion $\varrho'(x, y) = \{W \mid (x, y) \notin W, W \in \text{Basis der Nachb.}\}$, ist eine zu ϱ uniform äquivalente Pseudometrik.

2. Pseudometriken in topologischen Gruppen

Der Einfachheit halber sollen nur abelsche Gruppen betrachtet werden. Der allgemeine Fall kann analog behandelt werden. (Es wird dann eine links- und eine rechts-Pseudometrik induziert.) Die Nachbarschaften einer abelschen topologischen Gruppe G haben die Basis

$$\{W_U\} \text{ mit } W_U = \{(x, y) \mid x - y \in U\},$$

wobei U z.B. alle symmetrischen Umgebungen des Neutralelementes durchlaufe. Als „Distanzen" können demnach Teilmengen der Menge aller symmetrischen Umgebungen der 0 genommen werden:

$$\varrho(x, y) = \{V \mid x - y \notin V\} \qquad (V \text{ sym. Umgebung der } 0)$$

ϱ ist offensichtlich translationsinvariant:

$$\varrho(x + z, y + z) = \varrho(x, y).$$

---

[1]) n beliebig endlich. Genauer: man wähle eine beliebige endliche Teilmenge z.B. $\{\alpha_1, \ldots \alpha_n\}$. Man bilde $W_{\alpha_1}, \ldots {}_{\alpha_n}$. Man wiederhole das Verfahren für jede endliche Teilmenge von H.

Die Funktion $\|x\| = \varrho(0, x)$ erfüllt, wie man sofort sieht, die Bedingungen:

1) $\|0\| = \emptyset$
2) $\|x\| = \|-x\|$
3) zu α existiert β, sodass aus $\|x\|, \|x-y\| \not\geq \beta$ folgt $\|y\| \not\geq \alpha$.

Umgekehrt definiert auf einer abelschen topologischen Gruppe jede solche Funktion eine invariante Pseudometrik vermöge $\varrho(x, y) = \|x-y\|$, und damit eine mit der Gruppenstruktur verträgliche uniforme Struktur und Topologie.

3. Pseudometriken in topologischen Vektorräumen

In topologischen Vektorräumen könnte man die analoge Distanzfunktion definieren wie in topologischen Gruppen. Durch die skalare Multiplikation würde auf der Menge der Distanzen ebenfalls eine skalare Multiplikation definiert: $a \cdot \alpha = \{a \cdot V \mid V \in \alpha\}$. Die Funktion $\|x\| = \varrho(x, 0)$ hätte dann die Eigenschaft $\|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|$. Diese scheinbare Analogie zum Begriff der Norm kann nicht ausgenutzt werden, da die Menge dieser „Normen" nicht einmal die Bedingung $2\alpha = \alpha + \alpha$ erfüllt. Sei nämlich z.B. $\alpha = \{V \mid V \subset U\}$, so ist für nicht konvexes U: $U + U \neq 2U$ und damit $\alpha + \alpha \neq 2\alpha$.

Dagegen gestattet die skalare Multiplikation, die Menge der „Pseudodistanzen" weiter zu verringern. Vorerst genügt es offenbar, alle kreisförmigen, abgeschlossenen (und absorbierenden) Umgebungen der 0 zu betrachten. Sodann kann wegen der Homothetieinvarianz des Filters der Umgebungen der 0 aus jeder Schar $\{aV\}$ von Umgebungen eine beliebige Umgebung ausgelesen werden. Das System der ausgelesenen Umgebungen heisse $\mathfrak{M}$. Dann ist $\varrho(x, y)$ ein Element von $\mathbf{R}_+^{\mathfrak{M}}$, nämlich $\varrho(x, y)[U] = \inf\{\lambda \mid x - y \in \lambda U\}$. Die skalare Multiplikation auf der Menge der „Distanzen" ist verträglich mit der Addition vermöge $a\alpha[V] = a \cdot ([V])$.

Wegen der Translationsinvarianz kann wiederum $\|x\| = \varrho(0, x)$ eingeführt werden. Offenbar gilt $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$: dagegen ist die Dreiecksungleichung nur in ihrer verallgemeinerten Form gültig. Sei nämlich z.B. $V \in \mathfrak{M}$ nicht konvex, und zwar seien x, $y \in V$ und $x/2 + y/2 \notin V$. Dann ist $\|x\|[V] < 1$, $\|y\|[V] < 1$, aber $\|x + y\|[V] > 2$.

4. Pseudonormen in lokalkonvexen Vektorräumen

In lokalkonvexen Vektorräumen kann $\mathfrak{M}$ aus dem System der konvexen (abgeschlossenen, kreisförmigen, absorbierenden) Nullumgebungen ausgelesen werden. Unter Verwendung der gleichen Bezeichnungen wie oben gilt dann: $\|x\| + \|y\| \geqslant \|x + y\|$. Zum Beweis bemerke man, dass für jedes $V \in \mathfrak{M}$ gilt

$$\|x\|[V] + \|y\|[V] \geqslant \|x + y\|[V].$$

Zu jedem lokalkonvexen Vektorraum existiert also eine Funktion $\|x\|$, mit den Eigenschaften:

$$*)\quad \begin{array}{|l} \|a\,x\| = |a|\;\|x\| \\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \end{array}$$

Diese Funktion definiert wie oben die Topologie des gegebenen Vektorraumes.

Sei anderseits $H = \mathbf{R}_+^{\mathfrak{M}}$, wobei $\mathfrak{M}$ eine beliebige Menge ist, und sei $\| \ \|$ eine Abbildung eines Vektorraumes V in H, welche die Bedingungen *) erfüllt, so heisse $\| \ \|$ eine Pseudonorm auf V.[1])

Eine Pseudonorm definiert auf V eine mit der Vektorraumstruktur verträgliche Topologie, wenn man definiert, dass die Mengen

$$U_{\alpha_1,\dots\alpha_n} = \{x \mid \|x\| \not\geqslant \alpha_i (i = 1, \dots n),\ \alpha_i \in H,\ \alpha_i \neq 0\}$$

eine Basis des Filters der Nullumgebungen bilden sollen. Zum Beweis ist zu zeigen, dass das definierte Mengensystem die folgenden Eigenschaften hat: a) Alle Mengen sind kreisförmig und absorbierend b) Das System ist invariant gegenüber Homothetie c) Zu jeder Menge U des Systems existiert eine Menge V des Systems mit $V + V \subset U$.

a) Wegen $\|ax\| = |a|\,\|x\|$ gilt $\lambda\, U_{\alpha_1,\dots\alpha_n} \subset U_{\alpha_1,\dots\alpha_n} (|a| < 1)$

Jede Menge des Systems ist also kreisförmig.

Seien ferner x und $U_{\alpha_1,\dots\alpha_n}$ gegeben. Zu jedem i ($i = 1, \dots n$) sei ein m_i gewählt mit mit $\alpha_i(m_i) \neq 0$. Sei $x_i = \|x\|\,[m_i]$. Sei $a = \sup\{x_i/\alpha_i\}$. Dann gilt $x \in a\, U_{\alpha_1,\dots\alpha_n}$. Jede der gegebenen Mengen ist also absorbierend.

b) Die Homothetieinvarianz folgt aus $a\, U_{\alpha_1,\dots\alpha_n} = U_{a\alpha_1,\dots a\alpha_n}$.

c) Zu $U_{\alpha_1,\dots\alpha_n}$ ex. $V = U_{\alpha_1/2,\dots\alpha_n/2}$, sodass $V + V \subset U_{\alpha_1,\dots\alpha_n}$. Sei nämlich $x, y \in V$, d.h. $\|x\| \not\geqslant \alpha_i/2$ ($i = 1, \dots n$) und $\|y\| \not\geqslant \alpha_i/2$ ($i = 1, \dots n$), so ist $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \not\geqslant \alpha_i$ ($i = 1, \dots n$)

Der Raum (V, $\| \ \|$) ist lokalkonvex. Es genügt, zu zeigen, dass eine konvexe Subbasis der Nullumgebungen existiert. Man kann sich auf solche $\alpha \in H$ beschränken, welche die Form haben: $\alpha(m) = 0$ für alle $m \in \mathfrak{M}$ bis auf ein Einziges. Ein solches α sei gewählt. Seien $x, y \in U_\alpha(0)$, d.h. $\|x\| \not\geqslant \alpha$, $\|y\| \not\geqslant \alpha$. Dann folgt sofort $\|ax + by\| \leqslant a\|x\| + b\|y\| \not\geqslant \alpha$. Damit ist der Satz bewiesen:

SATZ *Ein topologischer Vektorraum ist genau dann lokalkonvex, wenn er pseudonormierbar ist.*

Die Sätze über lokalkonvexe Räume könnten jetzt in die Sprache der Pseudonormen übertragen werden. Dabei entstehen in vielen Fällen Formulierungen, die fast identisch mit den entsprechenden Aussagen über normierte Räume sind.

Dasselbe Ergebnis kann natürlich auch direkt aus der Tatsache abgeleitet werden, dass die Topologie eines lokalkonvexen Raumes durch eine Familie von Halbnormen definiert werden kann.

---

[1]) Man könnte H weiter verallgemeinern zu einem geordneten kommutativen Monoid mit skalarer Multiplikation. Neues wird dabei nicht gewonnen.

5. Pseudo-p-normen in lokal p-konvexen Vektorräumen

Im Folgenden sei immer $p \leqslant 1$. Ein topologischer Vektorraum heisse lokal p-konvex, wenn sein Nullumgebungsfilter eine Basis aus p-konvexen Mengen besitzt. Seine Topologie kann dann durch eine Familie von p-Normen erzeugt werden.

Sei E lokal p-konvex. Dann existiert ein System von Nullumgebungen, $\mathfrak{M}$, die p-konvex, abgeschlossen, kreisförmig und absorbierend sind, und so, dass $\{\lambda\mathfrak{M}\}$ eine Basis des Nullumgebungsfilters ist. Jedem $V \in \mathfrak{M}$ entspricht eine p-Norm p_V.

Die Abbildung $\| \ \|: E \to \mathbf{R}_+^{\mathfrak{M}}$ definiert durch: $\|x\| [V] = p_V(x)$, erfüllt dann die Bedingungen:

$$\|a x\| = |a|^p \|x\|$$
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Falls umgekehrt E ein Vektorraum und $\mathfrak{M}$ eine beliebige Menge ist, so heisst eine Abbildung $E \to \mathbf{R}_+^{\mathfrak{M}}$, welche die obigen Bedingungen erfüllt, eine Pseudo-p-Norm.

Um zu zeigen, dass eine Pseudo-p-norm eine mit der Vektorraumstruktur verträgliche Topologie definiert, wird wie früher gezeigt, dass die Mengen

$$U_{\alpha_1, \dots \alpha_n} = \{x \mid \|x\| \not\geq \alpha_i (i = 1, \dots n),\ \alpha_i \in \mathbf{R}_+^{\mathfrak{M}},\ \alpha_i \neq 0\}$$

(welche trivialerweise eine Filterbasis bilden), kreisförmig und absorbierend sind, und dass das System aller solchen Mengen homothetieinvariant ist. Der Beweis ist analog dem Beweis für lokalkonvexe Räume. Man beachte lediglich, dass jetzt gilt:

$$a\, U_{\alpha_1, \dots \alpha_n} = U_{a^p \alpha_1, \dots a^p \alpha_n} \qquad (a > 0).$$

Der erzeugte Filter erfüllt wieder die Bedingung $\mathfrak{U} + \mathfrak{U} = \mathfrak{U}$ und die lokale p-Konvexität folgt wie unter 4. die lokale Konvexität.

Es gilt also:

SATZ: *Ein topologischer Vektorraum ist genau dann lokal p-konvex, wenn er pseudo-p-normierbar ist.*

BEMERKUNG 1) *Eine andere Pseudometrik in uniformen Räumen*

In uniformen Räumen kann neben der oben angegebenen Pseudometrik, deren Distanzen Systeme von Nachbarschaften sind, eine weitere, naheliegende, Konstruktion angegeben werden. Man nehme eine Familie von Abständen, $\{d_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, die die gegebene uniforme Struktur induziert. Sei $\varrho(x, y) \in \mathbf{R}_+^{\{d_\gamma\}}$ mit $\varrho(x, y)\, [d_\gamma] = d_\gamma(x, y)$. ϱ ist dann, mit der durch die rellen Zahlen induzierten Ordnung, ebenfalls eine Pseudometrik, die die gegebene uniforme Struktur induziert.

Diese zweite Pseudometrik kann auch in topologischen Gruppen und topologischen Vektorräumen definiert werden. Im Falle lokalkonvexer Räume definieren die Abstände, (bei zweckmässiger Auswahl) je eine Halbnorm, d.h. diese beiden Pseudometriken fallen auf lokalkonvexen Räumen bis auf die Auswahl der zugrundeliegenden konvexen Nullumgebungen zusammen.

BEMERKUNG 2) *Differenzierbarkeit in lokalkonvexen Vektorräumen*

In lokalkonvexen Räumen wurden verschiedene Definitionen der Differenzierbarkeit gegeben. [4] Der wesentliche Punkt ist die Definition der „Restglieder". Man kann die in Banachräumen übliche Definition der Restglieder [3] formell auf pseudonormierte Räume verallgemeinern und mit den bekannten Definitionen vergleichen.

Für den Spezialfall einer Abbildung eines lokalkonvexen Raumes in sich, heisse demnach $r(x)$ Restglied, wenn zu $\varepsilon \in H$ ein $\delta(\varepsilon) \in H$ existiert, sodass aus $\|x\| \not> \delta(\varepsilon)$ folgt: $\|r(x)\| \not> \varepsilon \|x\|$. **) Diese Definition ist äquivalent mit der Definition (F) in der Arbeit von H. H. Keller. Aus (F) folgt **) leicht. Zum Beweise von **)$\to(F)$ nehme man ein $\varepsilon \in H$ mit $\varepsilon[m]=0$ für alle $m \in M$ mit Ausnahme eines Einzigen.

Man kann vermuten, dass die Definition (F) von den angegebenen Definitionen die „natürlichste" ist. Allerdings wird mit diesen Betrachtungen nichts ausgesagt, über die Frage, ob lokalkonvexe Vektorräume der richtige Ausgangspunkt für eine Differentialrechnung sind.

LITERATUR

[1] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, Ch. 2, Actualités Sci. Indust. 1142, Paris

[2] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, Ch. 9, Actualités Sci. Indust. 1045, Paris

[3] J. DIEUDONNÉ, *Foundations of modern analysis*, Ch. 7, New York 1960

[4] H. H. KELLER, *Differenzierbarkeit in topologischen Vektorräumen*, Comment. Math. Helv., *38*, (1964).

[5] G. KOETHE, *Topologische lineare Räume I*, Springer, 1960

[6] H. MATZINGER, *Über den Begriff der uniformen Struktur und die Konvergenz in Booleschen Algebren.* Comment. Math. Helv. *38*, (1963).

Eingegangen, 10. Juni 1966