Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 42 (1967)

Artikel: Sur une classe d'algèbres filtrées.
Autor: Knus, Max-Albert
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32134

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur une classe d'algèbres filtrées

MAX-ALBERT KNUS [1])

Introduction

Les algèbres considérées dans ce travail sont des algèbres associatives avec élément unité sur un anneau commutatif K avec 1.

Nous rappelons qu'une algèbre A est dite *positivement graduée* si elle est la somme directe d'une famille $\{A^i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ de sous-modules du module A telle que $A^i=0$ pour $i<0$ et $A^i\cdot A^j\subset A^{i+j}$. Une algèbre A est dite *filtrée* si elle est la réunion d'une famille de sous-modules $\{F_iA\}_{i\in\mathbf{Z}}$ telle que 1) $F_iA=0$ pour $i<0$, 2) $F_0A=K\cdot 1_A$, 3) $F_iA\subset F_jA$ pour $i\leq j$, et 4) $F_iA\cdot F_jA\subset F_{i+j}A$.

A toute algèbre filtrée A, on associe une algèbre positivement graduée $EA=\bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} E^iA$ où $E^iA=F_iA/F_{i-1}A$. La multiplication de EA est induite par la multiplication de A. Toute graduation positive telle que $A^0=K\cdot 1_A$ induit la filtration évidente $F_iA=\bigoplus_{k\leq i} A^k$; l'algèbre graduée associée est alors (isomorphe à) l'algèbre graduée donnée. Il existe des exemples intéressants de filtrations ne provenant pas trivialement d'une graduation. Par exemple, les *algèbres de Clifford* admettent une filtration naturelle; l'algèbre graduée associée à une algèbre de Clifford sur un module libre est l'algèbre *extérieure* de ce module. *L'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie L* est également filtrée de façon naturelle, sans être positivement graduée. Le théorème de POINCARÉ-BIRKHOFF-WITT caractérise, sous certaines hypothèses, l'algèbre graduée associée: si L est un *module libre* sur un anneau commutatif quelconque K ou si L est un module sur un *anneau principal* K, l'algèbre graduée associée à l'algèbre enveloppante de L est *l'algèbre symétrique* SL de L.

Ces deux exemples peuvent être traités simultanément, et dans un cadre plus général, en considérant des algèbres $\mathbf{Z}_2$-graduées (la $\mathbf{Z}_2$-graduation se superpose à la filtration et à la graduation positive). Dans la première partie du travail, nous rappelons les définitions des modules, des algèbres et des algèbres de Lie $\mathbf{Z}_2$-gradués. Ensuite, nous introduisons la classe d'algèbres qui joue un rôle central dans ce travail: les *algèbres f-enveloppantes $U_f(L)$ d'algèbres de Lie $\mathbf{Z}_2$-graduées L*; f est un 2-cocycle sur L à valeurs dans K et $U_f(L)$ est le quotient de l'algèbre tensorielle TL du module L par l'idéal engendré par les éléments de la forme $x\otimes y-(-1)^{mn}y\otimes x-[x,y]-f(x,y)\cdot 1$, $x\in L$, $y\in L$; m est le degré de x en $\mathbf{Z}_2$-graduation et n le degré de y. L'algèbre $U_f(L)$ résout un problème d'application universelle. Les algèbres de Clifford

---

[1]) L'auteur est au bénéfice d'une bourse de l'Institut Batelle, Genève.

et les algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie sont des cas particuliers d'algèbres $U_f(L)$, et il en est de même du produit tensoriel d'une algèbre de Clifford par une algèbre enveloppante. Remarquons qu'inversément, une telle décomposition n'est possible que pour des algèbres $U_f(L)$ très particulières; cette notion d'algèbre f-enveloppante est donc vraiment plus générale que celles d'algèbre de Clifford et d'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie.

La filtration de l'algèbre tensorielle TL induit de façon naturelle une filtration de l'algèbre $U_f(L)$. Nous démontrons le théorème suivant:

Soit K un anneau commutatif dans lequel 2 est inversible. Si le module L est libre sur K, ou si le module L est quelconque et K est principal, l'algèbre graduée associée à l'algèbre filtrée $U_f(L)$ est l'algèbre symétrique $\mathbf{Z}_2$-graduée SL de L. Rappelons que l'algèbre symétrique $\mathbf{Z}_2$-graduée d'un module $\mathbf{Z}_2$-gradué est le produit tensoriel d'une algèbre symétrique classique (c'est-à-dire non $\mathbf{Z}_2$-graduée) par une algèbre extérieure.

La démonstration de ce théorème reprend une méthode de WITT, ([13], voir aussi LAZARD [9]) développée pour les algèbres de Lie classiques. En utilisant un résultat de CARTIER [4], on peut voir que ce théorème est également valable si K est un *anneau de Dedekind* dans lequel 2 est inversible. Ce résultat s'applique en particulier aux algèbres de Clifford. Il s'ensuit par exemple que l'application canonique d'un module dans une algèbre de Clifford sur ce module est injective si l'anneau des scalaires est de Dedekind et si 2 est inversible.

Une autre généralisation est donnée, dans le cas où K est arbitraire, (2 est toujours supposé inversible): nous démontrons, à l'aide de l'algèbre f-enveloppante d'un produit d'algèbres de Lie $\mathbf{Z}_2$-graduées, que l'algèbre graduée associée à $U_f(L)$ est encore l'algèbre symétrique de L si le module L n'est pas libre mais *projectif*. Remarquons que le module $U_f(L)$ est alors lui-même projectif. Inversément, nous montrons que les algèbres $U_f(L)$ sur des modules projectifs L sont caractérisées par leurs algèbres graduées associées; nous avons en effet le théorème suivant:

Soit K un anneau commutatif dans lequel 2 possède un inverse. Si A est une algèbre $\mathbf{Z}_2$-graduée filtrée telle que l'algèbre graduée associée EA soit isomorphe à l'algèbre symétrique SM d'un module projectif $\mathbf{Z}_2$-gradué M, alors il existe une structure d'algèbre de Lie L sur M et un 2-cocycle f sur L tels que $A \cong U_f(L)$.

Ce théorème général s'applique aux algèbres de Clifford et aux algèbres f-enveloppantes classiques (introduites indépendamment par COHN [7] et SRIDHARAN [12]). Ces cas particuliers avaient déjà été traités auparavant, le premier par ROY [11] et le second par SRIDHARAN [12], dans le cas où M est un module libre.

Je remercie très vivement Monsieur le professeur B. ECKMANN qui me proposa le thème de ce travail et qui m'encouragea constamment.

1. Modules et algèbres

Soit K un anneau commutatif avec 1. Tous les produits tensoriels seront pris sur K.

Un *K-module* $\mathbf{Z}_2$*-gradué* M est un couple de K-modules (M_0, M_1). Les éléments de M_0 seront parfois appelés éléments de degré 0 et les éléments de M_1 éléments de degré 1.

M est également un K-module, la somme et la multiplication par un scalaire étant définies par composantes. M est donc isomorphe à la somme directe $M_0 \oplus M_1$. Inversément toute somme directe de deux K-modules définit un K-module $\mathbf{Z}_2$-gradué.

Si M et N sont deux K-modules $\mathbf{Z}_2$-gradués, un homomorphisme de K-modules $\mathbf{Z}_2$-gradués $f: M \to N$ est un couple d'homomorphismes de K-modules (f_0, f_1) tel que $f_0: M_0 \to N_0$ et $f_1: M_1 \to N_1$.

Si M et N sont deux K-modules $\mathbf{Z}_2$-gradués, $M \oplus N$ est le K-module $\mathbf{Z}_2$-gradué tel que

$$(M \oplus N)_i = M_i \oplus N_i \qquad i = 0, 1.$$

$M \otimes N$ est le K-module $\mathbf{Z}_2$-gradué tel que

$$(M \otimes N)_0 = M_0 \otimes N_0 \oplus M_1 \otimes N_1$$
$$(M \otimes N)_1 = M_0 \otimes N_1 \oplus M_1 \otimes N_0$$

$M \subset N$ signifie $M_0 \subset N_0$ et $M_1 \subset N_1$.

K peut être considéré comme un K-module $\mathbf{Z}_2$-gradué avec

$$K_0 = K \qquad \text{et} \qquad K_1 = 0.$$

On a alors $M \otimes K \cong K \otimes M \cong M$.

Une *K-algèbre* $\mathbf{Z}_2$*-graduée* A est un K-module $\mathbf{Z}_2$-gradué $A = (A_0, A_1)$ avec deux homomorphismes $\varphi: A \otimes A \to A$ et $\eta: K \to A$ tels que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\varphi \otimes A"] \arrow[d, "A \otimes \varphi"'] & A \otimes A \arrow[d, "\varphi"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\varphi"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \otimes A \arrow[d, "\eta \otimes A"'] & A \arrow[d, equal] & A \otimes K \arrow[d, "A \otimes \eta"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\varphi"'] & A & A \otimes A \arrow[l, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

soient commutatifs.

φ est la multiplication. On notera $\varphi(x \otimes y) = xy$. Le premier diagramme dit que la multiplication doit être associative, le second qu'elle doit posséder un élément unité $1_A = \eta(1_K)$.

Remarquons que si $a_i \in A_i$, $a_j \in A_j$, alors $a_i a_j \in A_{i+j}$ ($i+j$ est calculé mod. 2). L'unité 1_A est de degré 0, $1_A \in A_0$.

Par abus de langage, nous utiliserons désormais les termes de module et d'algèbre pour un module $\mathbf{Z}_2$-gradué et une algèbre $\mathbf{Z}_2$-graduée.

Soient $A=(A_0, A_1)$ et $B=(B_0, B_1)$ deux K-modules et soit $\tau: A\otimes B\to B\otimes A$ l'homomorphisme tel que

$$\tau(a\otimes b)=(-1)^{mn}\, b\otimes a \qquad a\in A_m,\ b\in B_n.$$

L'algèbre $A=(A_0, A_1)$ est *commutative* si le diagramme

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\varphi"'] & A\otimes A \arrow[dl, "\varphi"] \\ A & \end{tikzcd}$$

est commutatif, c'est-à-dire si

$$a_i a_j=(-1)^{ij} a_j a_i \qquad a_i\in A_i,\ a_j\in A_j.$$

Si $A=(A_0, A_1)$ et $B=(B_0, B_1)$ sont deux K-algèbres, $A\otimes B$ est la K-algèbre dont la multiplication est la composition

$$A\otimes B\otimes A\otimes B \xrightarrow{A\otimes\tau\otimes B} A\otimes A\otimes B\otimes B \xrightarrow{\varphi_A\otimes\varphi_B} A\otimes B$$

et l'unité $K\cong K\otimes K \xrightarrow{\eta_A\otimes\eta_B} A\otimes B$.

Le produit dans $A\otimes B$ est donc défini par

$$(a_i\otimes b_j)(a'_m\otimes b'_n)=(-1)^{jm}\, a_i a'_m\otimes b_j b'_n \qquad a_i\in A_i,\ a'_m\in A_m,\ b_j\in B_j \text{ et } b'_n\in B_n.$$

Nous dirons parfois que $A\otimes B$ est le produit tensoriel $\mathbf{Z}_2$-gradué de A et B.

Un homomorphisme de K-algèbres $f: A\to B$ est un homomorphisme de K-modules $f: A\to B$ tel que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "f\otimes f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B\otimes B \arrow[r, "\varphi_B"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, "f"] \\ K \arrow[r, "\eta_B"'] & B \end{tikzcd}$$

soient commutatifs.

Un idéal (bilatère) $J=(J_0, J_1)\subset A$ est un sous-module de A tel que $JA\subset A$ et $AJ\subset A$. $A/J=(A_0/J_0, A_1/J_1)$ est une K-algèbre dont le produit est déterminé par la condition que la projection $A\to A/J$ soit un homomorphisme de K-algèbres.

Exemples

Soit $M=(M_0, M_1)$ un K-module.

$TM=\bigoplus_k \bigotimes_k M$ est une K-algèbre, *l'algèbre tensorielle* de M.

$$\begin{aligned} (TM)_0 &= K\oplus M_0\oplus (M\otimes M)_0\oplus\cdots \\ (TM)_1 &= \qquad M_1\oplus (M\otimes M)_1\oplus\cdots \end{aligned}$$

La multiplication est donnée par le produit tensoriel et l'unité par l'injection $K\to TM$.

Remarquons que M peut être identifié à un sous-module de TM.

Soit J l'idéal de TM engendré par les éléments de la forme

$$x\otimes y-(-1)^{pq}\, y\otimes x \qquad x\in M_p,\ y\in M_q.$$

Le quotient TM/J est une K-algèbre, *l'algèbre symétrique SM de M*. On vérifie que SM est commutative.

DEFINITION. Une *graduation positive* sur une K-algèbre $A=(A_0, A_1)$ est une famille de sous-modules $\{A^i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ du K-module A telle que

1) $A^i = 0$ pour $i<0$
2) $\bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} A^i = A$
3) $A^i\cdot A^j \subset A^{i+j}$ pour tout $i\in\mathbf{Z}, j\in\mathbf{Z}$.

Une K-algèbre A munie d'une graduation positive est dite positivement graduée. Les éléments de A^i sont appelés éléments homogènes de degré positif i. 1_A est de degré positif 0. Si $A^0=K\cdot 1_A$, A est dite connexe.

Remarque. Si l'on tient compte explicitement de la $\mathbf{Z}_2$-graduation de A, la définition ci-dessus signifie que

$$A_0 = \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} (A^i)_0, \quad (A^i)_0 = 0 \quad i<0$$
$$A_1 = \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} (A^i)_1, \quad (A^i)_1 = 0 \quad i<0$$

et

$$(A^i)_m\cdot(A^j)_n \subset (A^{i+j})_{m+n}, \quad m+n \mod 2.$$

A est donc bigraduée.

Si $A=\bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} A^i$ et $B=\bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} B^i$ sont deux algèbres positivement graduées, un homomorphisme d'algèbres positivement graduées $f: A\to B$ est un homomorphisme d'algèbres $f: A\to B$ tel que $f(A^i)\subset B^i$. Comme $f=(f_0,f_1)$, cela veut dire que

$$f_0((A^i)_0) \subset (B^i)_0$$
$$f_1((A^i)_1) \subset (B^i)_1.$$

L'algèbre tensorielle TM d'un K-module M est positivement graduée

$$TM = \bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} T^i M$$

si l'on pose $T^iM=M\otimes M\otimes\cdots\otimes M$ (i facteurs) pour $i>0$, $T^0M=K$ et $T^iM=0$ pour $i<0$.

TM est connexe.

L'algèbre symétrique SM d'un K-module M est également positivement graduée, $SM=\bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} S^iM$. On le voit en remarquant que l'idéal J est engendré par des éléments homogènes. Soit π l'application canonique $TM\to TM/J=SM$. On a $S^iM=\pi(T^iM)$. π est donc un homomorphisme d'algèbres positivement graduées.

PROPOSITION 1. π est un isomorphisme sur $M=T^1M$. Identifiant M et $\pi(M)$, on peut plonger M dans SM.

Démonstration ([5]) $J \cap M = 0$, car les composantes homogènes des éléments de J différents de zéro sont de degré positif supérieur ou égal à deux, alors que les éléments de M sont de degré positif un.

Les algèbres TM et SM résolvent des problèmes d'applications universelles.

PROPOSITION 2. Soit M un K-module. Pour toute K-algèbre A et pour tout homomorphisme de K-modules $\varphi: M \to A$, il existe un unique homomorphisme de K-algèbres $\bar{\varphi}: TM \to A$ qui rende le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "i"'] & & A \\ & TM \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

commutatif. i est l'injection $M \to TM$.

Si A est commutative, $\bar{\varphi}$ se factorise en un homomorphisme (également noté $\bar{\varphi}$) de SM dans A.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"] \arrow[dd, bend right=60] & A \\ TM \arrow[d, "\pi"] & \\ SM \arrow[uu, bend right=60, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Démonstration ([5]) $\bar{\varphi}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \varphi(x_1) \cdot \cdots \cdot \varphi(x_n)$. Si A est commutative, $\bar{\varphi}$ est nul sur J et induit un homomorphisme $SM \to A$.

$M = (M_0, M_1)$. Si $M_1 = 0$, SM est l'algèbre symétrique classique SM_0 (non $\mathbf{Z}_2$-graduée) de M_0. Si $M_0 = 0$, SM est l'algèbre extérieure $\wedge M_1$ de M_1.

2. Algèbres de Lie

Une *K-algèbre de Lie* est un K-module $L = (L_0, L_1)$ muni d'un homomorphisme $\varphi: L \otimes L \to L$ (on notera $\varphi(x \otimes y) = [x, y]$) tel que:

1) $[x, y] = (-1)^{mn+1}[y, x]$

2) $(-1)^{mr}[x, [y, z]] + (-1)^{mn}[y, [z, x]] + (-1)^{nr}[z, [x, y]] = 0$

pour $x \in L_m$, $y \in L_n$ et $z \in L_r$.

3) $[x, x] = 0$ si $x \in L_0$

$[x, [x, x]] = 0$ si $x \in L_1$.

La condition 1) signifie que le produit ainsi défini est anticommutatif. L'identité 2) est appelée *identité de Jacobi.*

Remarquons que si $x \in L_m$ et $y \in L_n$, $[x, y] \in L_{m+n}$, $m+n$ mod 2.

Signalons que 1) entraîne $2[x, x] = 0$ pour $x \in L_0$ et que 2) entraîne $3[x, [x, x]] = 0$ pour $x \in L_1$. 3) découle donc de 1) et 2) si 2 et 3 sont inversibles dans K.

L n'est pas une algèbre de Lie au sens classique, car, par exemple, $[x, x]$ n'est pas identiquement nul. Si $L_1=0$, $L=L_0$ est une algèbre de Lie classique. Les algèbres de Lie graduées ont été introduites par CARTIER [3] (voir également HILTON [8]).

Les conditions 1) et 2) peuvent être remplacées par des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} L\otimes L \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau"'] & L \\ L\otimes L \arrow[ur, "-\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} L\otimes L\otimes L \arrow[r, shift left, "\tau\otimes L"] \arrow[r, shift right, "L\otimes\tau"'] \arrow[d, shift right, "L\otimes\varphi"'] & L\otimes L\otimes L \arrow[r, shift left, "L\otimes\tau"] \arrow[r, shift right, "\tau\otimes L"'] & L\otimes L\otimes L \arrow[d, shift right, "L\otimes\varphi"'] \arrow[d, shift left, "L\otimes\varphi"] \\ L\otimes L \arrow[d, shift right, "\varphi"'] & & L\otimes L \arrow[d, shift right, "\varphi"'] \arrow[d, shift left, "\varphi"] \\ L & \xleftarrow{\quad -\left(\overset{\leftarrow}{+}\right)\quad} & L \end{tikzcd}$$

τ est l'homomorphisme défini au paragraphe 1.

Un homomorphisme de K-algèbres de Lie $f: L\to L'$ est un homomorphisme de K-modules $f: L\to L'$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} L\otimes L \arrow[r, "\varphi_L"] \arrow[d, "f\otimes f"'] & L \arrow[d, "f"] \\ L'\otimes L' \arrow[r, "\varphi_{L'}"'] & L' \end{tikzcd}$$

soit commutatif, c'est-à-dire tel que $f([x, y])=[f(x), f(y)]$, $x\in L$, $y\in L$.

Exemples

1) Tout K-module M possède une structure d'algèbre de Lie. Il suffit de poser $[x, y]=0$ pour tout x et y de M.

2) Soit $A=(A_0, A_1)$ une K-algèbre. L'opération

$$(x, y)\mapsto xy-(-1)^{pq}yx \qquad x\in A_p,\ y\in A_q$$

définit sur le K-module A une structure de K-algèbre de Lie. On notera dorénavant cette opération $[\![x, y]\!]$.

Soit L une K-algèbre de Lie et soit f une forme K-bilinéaire sur le K-module $L=(L_0, L_1)$ donnée par un homomorphisme de K-modules $f: L\otimes L\to K$. f est nulle sur $L_i\otimes L_j$, $i\neq j$, car $f(L_i, L_j)\subset K_{i+j}$. f est donc la somme d'une forme bilinéaire sur L_0 et d'une forme bilinéaire sur L_1.

DÉFINITION. La forme bilinéaire f sur L est appelée *2-cocycle à valeurs dans K* si

1) $f(x, y) = (-1)^{mn+1} f(y, x)$

2) $(-1)^{mr} f(x, [y, z]) + (-1)^{mn} f(y, [z, x]) + (-1)^{nr} f(z, [x, y]) = 0$

pour $x \in L_m$, $y \in L_n$ et $z \in L_r$.

3) $f(x, x) = 0$ si $x \in L_0$.

Signalons que $f(x, [x, x])$ est égal à zéro si $x \in L_1$ car $[x, x] \in L_0$. Les conditions 1) et 2) peuvent également être traduites en diagrammes commutatifs.

Algèbre f-enveloppante d'une algèbre de Lie

Soient L une K-algèbre de Lie et f un 2-cocycle sur L à valeurs dans K. Soit TL l'algèbre tensorielle sur le K-module L et soit I l'idéal de TL engendré par des éléments de la forme

$$x \otimes y - (-1)^{mn} y \otimes x - [x, y] - f(x, y) \cdot 1 \qquad x \in L_m,\ y \in L_n.$$

Définition. $U_f(L) = TL/I$ est *l'algèbre f-enveloppante de L.*

Cette définition a un sens car I possède bien deux composantes I_0 et I_1, les éléments qui engendrent I étant homogènes (en $\mathbf{Z}_2$-graduation).

Cas particuliers

1) $f = 0$

$U_0(L) = U(L)$ est *l'algèbre enveloppante* de L. Si de plus $[,] = 0$, $U(L)$ est l'algèbre symétrique SL de L.

2) $f = 0$ et $L_1 = 0$

$U(L)$ est l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie «classique» L_0. Voir par exemple Bourbaki [2], § 2.

3) $L_1 = 0$

$U_f(L_0)$ est *l'algèbre f-enveloppante de* Sridharan [12]. Cohn [7] l'a aussi introduite sous le nom *d'algèbre de Birkhoff-Witt.*

4) $L_0 = 0$

$[,] = 0$ car $[L_1, L_1] \subset L_0$. f est une forme bilinéaire symétrique. Posons $Q(x) = \frac{1}{2} f(x, x)$ (supposons 2 inversible dans K). $U_f(L)$ est alors *l'algèbre de Clifford* $C_Q(L_1)$ de L_1 associée à la forme quadratique Q. Pour plus de détails sur ces algèbres de Clifford, on pourra consulter par exemple Bourbaki [1], § 9.

Remarquons que dans le cas 3) la $\mathbf{Z}_2$-graduation est triviale, mais pas dans le cas 4).

Soit η_f l'application canonique $TL \to TL/I$. η_f induit par restriction un homomorphisme de K-modules $i_f : L \to U_f(L)$ et

$$[\![i_f(x), i_f(y)]\!] = i_f([x, y]) + f(x, y) \cdot 1 \qquad x \in L,\ y \in L$$

$i_f(L)$ engendre $U_f(L)$ mais i_f n'est pas injectif en général. Chevalley [6], p. 230, ex. 12, donne un exemple où $L \to C_Q(L)$ n'est pas injectif et Cartier [4] (voir également Bourbaki [2], § 2, exercice 9) un exemple où $L \to U(L)$ dans le cas classique

$(L_1=0)$ n'est pas injectif. Nous donnerons plus tard des conditions suffisantes pour que i_f soit injectif.

$U_f(L)$ résout un problème d'application universelle. Soient A une K-algèbre, L une K-algèbre de Lie et f un 2-cocycle sur L à valeurs dans K.

DÉFINITION (Voir [12]). Un homomorphisme de K-modules $\mu: L \to A$ sera appelé un *f-homomorphisme* si

$$[\![\mu(x), \mu(y)]\!] = \mu([x, y]) + f(x, y) \cdot 1_A \qquad x \in L, y \in L.$$

Exemple. $A = U_f(L)$. i_f est un f-homomorphisme de L dans $U_f(L)$.

PROPOSITION 3. (caractérisation universelle des algèbres $U_f(L)$). Soient L une K-algèbre de Lie et f un 2-cocycle sur L à valeurs dans K. Pour toute algèbre A et pour tout f-homomorphisme $\mu: L \to A$ il existe un unique homomorphisme de K-algèbres $\bar{\mu}: U_f(L) \to A$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "i_f"'] & & A \\ & U_f(L) \arrow[ur, "\bar{\mu}"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Démonstration. μ induit un homomorphisme d'algèbres $TL \to A$ (Prop. 2) qui est nul sur I.

Cette proposition contient comme cas particuliers, la caractérisation universelle des algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie et des algèbres de Clifford.

ALGÈBRE f-ENVELOPPANTE D'UN PRODUIT D'ALGÈBRES DE LIE

Soient L' et L'' deux K-algèbres de Lie. Le K-module $L = L' \oplus L''$ est une K-algèbre de Lie si l'on pose

$$[(x, y), (x', y')] = ([x, x'], [y, y']) \qquad (x, y) \in L' \oplus L'', (x', y') \in L' \oplus L''.$$

DÉFINITION. L est le *produit* des K-algèbres de Lie L' et L'' et on écrit $L = L' \times L''$.

Soient L' et L'' deux K-algèbres de Lie et $L = L' \times L''$ leur produit. Si f' est un 2-cocycle sur L' à valeurs dans K et si f'' est un 2-cocycle sur L'' à valeurs dans K, la forme bilinéaire f sur L définie par

$$f((x, y), (x', y')) = f'(x, x') + f''(y, y') \qquad (x, y) \in L' \times L'', (x', y') \in L' \times L''$$

est un 2-cocycle sur L à valeurs dans K. On écrira parfois simplement $f = f' + f''$.

L'application canonique $x \mapsto (x, 0)$ de L' dans L induit un f'-homomorphisme de L' dans $U_f(L)$. D'après la proposition 3, il existe donc un homomorphisme de K-algèbres $\varphi: U_{f'}(L') \to U_f(L)$. Pour les mêmes raisons, il existe un homomorphisme $\psi: U_{f''}(L'') \to U_f(L)$. L'application bilinéaire $(u, v) \mapsto \varphi(u) \cdot \psi(v)$ de $U_{f'}(L') \times U_{f''}(L'')$ dans $U_f(L)$ induit alors un homomorphisme de K-modules

$$\theta: U_{f'}(L') \otimes U_{f''}(L'') \to U_f(L)$$

On a $\theta(u \otimes v) = \varphi(u) \cdot \psi(v)$. Utilisant le fait que les images de φ et de ψ commutent dans $U_f(L)$, on démontre aisément que θ est un homomorphisme de K-algèbres.

PROPOSITION 4. $\theta: U_{f'}(L') \otimes U_{f''}(L'') \to U_f(L)$ est un isomorphisme de K-algèbres.

$$U_{f'}(L') \otimes U_{f''}(L'') \cong U_{f'+f''}(L' \times L'')$$

Démonstration ([5] p. 36 pour les algèbres de Clifford, voir également [2] § 2). Construisons un homomorphisme en sens inverse

$$\lambda: U_f(L) \to U_{f'}(L') \otimes U_{f''}(L'').$$

L'application λ_0 définie par $(x, y) \mapsto i_{f'}(x) \otimes 1 + 1 \otimes i_{f''}(y)$, $x \in L'$, $y \in L''$ est un f-homomorphisme de L dans $U_{f'}(L') \otimes U_{f''}(L'')$. λ_0 induit alors l'homomorphisme cherché λ. On a $\lambda(i_f(x, y)) = \lambda_0(x, y)$. Comme $\theta(i_{f'}(x) \otimes 1) = \varphi(i_{f'}(x)) \cdot \psi(1) = i_f(x)$, ($x$ est identifié à son image dans L), on a

$$\lambda \circ \theta(i_{f'}(x) \otimes 1) = \lambda(i_f(x)) = \lambda_0(x) = i_{f'}(x) \otimes 1, \qquad x \in L'$$

De façon analogue $\lambda \circ \theta(1 \otimes i_{f''}(y)) = 1 \otimes i_{f''}(y)$, $y \in L''$.

Les éléments $i_{f'}(x) \otimes 1$, $x \in L'$ et $1 \otimes i_{f''}(y)$, $y \in L''$ engendrent $U_{f'}(L') \otimes U_{f''}(L'')$. $\lambda \circ \theta$ est donc l'identité sur $U_{f'}(L') \otimes U_{f''}(L'')$.

On voit de même que $\theta \circ \lambda$ est l'identité sur $U_f(L)$.

REMARQUE. $i_f(x, y)$ correspond à $i_{f'}(x) \otimes 1 + 1 \otimes i_{f''}(y)$ par l'isomorphisme θ. Si i_f est une application injective, $i_{f'}$ et $i_{f''}$ doivent donc être également injectives. Nous utiliserons cette propriété par la suite. L'inverse est faux en général.

Citons quelques cas particuliers de la *proposition 4*:

1) $U(L' \times L'') = U(L') \otimes U(L'')$
2) $S(L' \oplus L'') = SL' \otimes SL''$
3) $C_Q(L' \oplus L'') = C_{Q'}(L') \otimes C_{Q''}(L''), \quad Q = Q' + Q''$.

Dans les cas 2) et 3) les algèbres de Lie ont une multiplication triviale.

Notons que si $L_1' = L_1'' = 0$, le produit tensoriel $U_{f'}(L_0') \otimes U_{f''}(L_0'')$ se réduit à un produit tensoriel d'algèbres non-graduées. Mais si $L_0' = L_0'' = 0$, le produit $C_{Q'}(L_1') \otimes C_{Q''}(L_1'')$ reste un produit tensoriel d'algèbres $\mathbf{Z}_2$-graduées.

Le K-module $L = (L_0, L_1)$ est isomorphe à $L_0 \oplus L_1$. Sous quelles conditions $U_f(L)$ se décomposera-t-elle en un produit tensoriel $U_{f'}(L_0) \otimes C_Q(L_1)$?

Pour obtenir une structure d'algèbre de Clifford sur L_1, il faut que $[L_1, L_1] = 0$. L_0 et L_1 possèdent alors une structure d'algèbre de Lie. L est le produit de ces deux algèbres de Lie si ces deux algèbres commutent, $[L_0, L_1] = 0$. En résumé, il faut donc

que $[L, L_1]=0$. Soit maintenant f un 2-cocycle sur L. Nous savons que f est une somme $f'+f''$ où f' est la restriction de f à L_0 et f'' la restriction de f à L_1. f' est un 2-cocycle sur L_0. f'' est un 2-cocycle sur L_1, c'est-à-dire simplement une forme bilinéaire symétrique. Si 2 est inversible dans K, nous pouvons associer une forme quadratique à f''. Nous avons alors le corollaire suivant de la *proposition 4*:

COROLLAIRE. Supposons que 2 soit inversible dans K. Soient $L=(L_0, L_1)$ une K-algèbre de Lie et f un 2-cocycle sur L à valeurs dans K. Si $[L, L_1]=0$, alors $U_f(L)\cong U_{f'}(L_0)\otimes C_Q(L_1)$ où $f'=f|_{L_0}$ et Q est la forme quadratique associée à $f''=f|_{L_1}$.

Pour $f=0$ et $[L, L]=0$, on obtient en particulier $SL\cong SL_0\otimes \wedge L_1$ où SL_0 est l'algèbre symétrique classique de L_0 et $\wedge L_1$ l'algèbre extérieure de L_1.

3. Algèbres filtrées

DÉFINITION. Une *filtration* d'une K-algèbre $A=(A_0, A_1)$ est une famille de sous-modules $\{F_iA\}_{i\in\mathbf{Z}}$ du K-module A telle que:

1) $F_0A = K\cdot 1_A$ (c-à-d. $F_0A_0 = K\cdot 1_A$, $F_0A_1 = 0$)
2) $F_iA = 0$ pour $i<0$
3) $F_iA \subset F_jA$ pour $i\leq j$
4) $\bigcup_{i\in\mathbf{Z}} F_iA = A$
5) $F_iA\cdot F_jA \subset F_{i+j}A \qquad i\in\mathbf{Z}, j\in\mathbf{Z}$.

Un homomorphisme d'algèbres filtrées $f: A\to B$ est un homomorphisme d'algèbres tel que $f(F_iA)\subset F_iB$, $i\in\mathbf{Z}$.

Si A et B sont deux algèbres filtrées, $F_p(A\otimes B)=\mathrm{Im}(\bigoplus_{i+j=p} F_iA\otimes F_jB\to A\otimes B)$ définit une filtration sur le produit tensoriel $A\otimes B$.

Exemples. $F_iTL=\bigoplus_{k\leq i} T^kL$ définit une filtration sur TL et $F_iSL=\bigoplus_{k\leq i} S^kL$ une filtration sur SL. La projection canonique $\pi: TL\to SL$ est alors un homomorphisme d'algèbres filtrées.

ALGÈBRE GRADUÉE ASSOCIÉE À UNE ALGÈBRE FILTRÉE

A toute algèbre filtrée A, il est possible d'associer une algèbre positivement graduée $EA=\bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} E^iA$. Par définition $E^iA=F_iA/F_{i-1}A$. Soit $\pi_i: F_iA\to E^iA$ la projection canonique. La multiplication de EA est définie par $\pi_i(x)\cdot\pi_j(y)=\pi_{i+j}(x\cdot y)$, $x\in F_iA$, $y\in F_jA$. On vérifie facilement que EA est positivement graduée.
Un homomorphisme d'algèbres filtrées $f: A\to B$ induit un homomorphisme des algèbres graduées associées $Ef: EA\to EB$ ($E^if: E^iA\to E^iB$).

PROPOSITION 5. Soit $f: A\to B$ un homomorphisme d'algèbres filtrées.
Si $Ef: EA\to EB$ est un isomorphisme, alors f est un isomorphisme.

Démonstration. Le résultat s'établit par induction à l'aide du lemme des cinq:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & F_{i-1}A & \to & F_iA & \to & E^iA & \to & 0 \\ & & \wr\| & & \downarrow & & \wr\| & & \\ 0 & \to & F_{i-1}B & \to & F_iB & \to & E^iB & \to & 0 \end{array}$$

PROPOSITION 6. Les applications canoniques $\varphi_1: A \to A \otimes B$ et $\varphi_2: B \to A \otimes B$ définies par $x \mapsto x \otimes 1$, $x \in A$ et $y \mapsto 1 \otimes y$, $y \in B$ induisent un épimorphisme d'algèbres $\varphi: EA \otimes EB \to E(A \otimes B)$.

REMARQUE. $EA \otimes EB$ est un produit tensoriel $\mathbf{Z}_2$-gradué.

Démonstration. L'homomorphisme $\varphi_1: A \to A \otimes B$ est un homomorphisme d'algèbres filtrées. φ_1 induit donc un homomorphisme $E\varphi_1: EA \to E(A \otimes B)$. De facon analogue, φ_2 induit un homomorphisme $E\varphi_2: EB \to E(A \otimes B)$. Les images de $E\varphi_1$ et de $E\varphi_2$ commutent dans $E(A \otimes B)$. Il existe donc un homomorphisme d'algèbres $\varphi: EA \otimes EB \to E(A \otimes B)$ tel que $\varphi(u \otimes v) = E\varphi_1(u) \cdot E\varphi_2(v)$, $u \in EA$, $v \in EB$. φ est un épimorphisme car la filtration de $A \otimes B$ est induite par les filtrations de A et B.

4. Généralisation du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt

FILTRATION DES ALGÈBRES f-ENVELOPPANTES

Soient $L = (L_0, L_1)$ une K-algèbre de Lie et f un 2-cocycle sur L à valeurs dans K. $F_iTL = \bigoplus_{k \le i} T^kL$ définit une filtration sur l'algèbre tensorielle TL du K-module L. Soit $\{F_iU_f(L)\}_{i \in \mathbf{Z}}$ la filtration de $U_f(L)$ induite par l'application canonique $\eta_f: TL \to TL/I = U_f(L)$,

$$F_iU_f(L) = \eta_f(F_iTL)$$

et soit $EU_f(L)$ l'algèbre graduée associée.

$$E^iU_f(L) = F_iU_f(L)/F_{i-1}U_f(L)$$

Appelons π_i la projection $F_iU_f(L) \to E^iU_f(L)$. Comme $i_f(L)$ engendre $U_f(L)$, $\pi_1 i_f(L)$ engendre $EU_f(L)$.

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE POINCARÉ-BIRKHOFF-WITT

PROPOSITION 7. $EU_f(L)$ est une algèbre commutative.

Démonstration. Nous savons que pour $x \in L_m$, $y \in L_n$

$$[\![i_f(x), i_f(y)]\!] = i_f([x, y]) + f(x, y) \cdot 1.$$

Le terme de gauche appartient à $F_2U_f(L)$, le terme de droite à $F_1U_f(L)$. On a donc $\pi_2[\![i_f(x), i_f(y)]\!] = 0$, c'est-à-dire

$$\pi_1 i_f(x) \cdot \pi_1 i_f(y) = (-1)^{mn} \pi_1 i_f(y) \cdot \pi_1 i_f(x).$$

D'où la proposition car $\pi_1 i_f(L)$ engendre $EU_f(L)$.

$\eta_f: TL \to U_f(L)$ est un homomorphisme d'algèbres filtrées. η_f induit par conséquent un homomorphisme $E\eta_f: ETL \to EU_f(L)$ des algèbres graduées associées. Comme ETL est canoniquement isomorphe à TL et comme $EU_f(L)$ est commutative (Prop. 7), $E\eta_f$ induit un homomorphisme $\psi_f: SL \to EU_f(L)$ (Prop. 2), SL est l'algèbre symétrique de L. On vérifie aisément que ψ_f est un épimorphisme. Nous voulons maintenant montrer que sous certaines conditions ψ_f est un isomorphisme. Introduisons tout d'abord quelques notations.

Soit $M=(M_0, M_1)$ un sous-module du K-module L qui soit la somme directe d'une famille de K-modules monogènes

$$M_0 = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} K \cdot z_\lambda \qquad M_1 = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_1} K \cdot z_\lambda .$$

Si z_λ est d'ordre fini, on notera cet ordre ε_λ. On notera $\bar{\lambda}$ le degré en $\mathbf{Z}_2$-graduation de z_λ. Nous pouvons supposer Λ_0 et Λ_1 totalement ordonnés. Soit Λ la somme ordinale $\Lambda_0 + \Lambda_1$. Rappelons que dans cette somme, un élément de Λ_0 est toujours plus petit qu'un élément de Λ_1. Un K-module libre M est un exemple d'une somme directe de modules monogènes. $(z_\lambda)_{\lambda \in \lambda}$ est alors une base de M.

Appelons $F_n^M TL$ le module $\bigoplus_{k<n} T^k L \oplus T^n M$. Un élément de degré n de $F_n^M TL$ appartient à $T^n M$ et peut s'écrire $\sum_\mu b_\mu z_{\mu_1} \otimes z_{\mu_2} \otimes \cdots \otimes z_{\mu_n}$, $\mu_i \in \Lambda$. Nous dirons qu'un monôme $z_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes z_{\lambda_r} \otimes z_{\lambda_{r+1}} \otimes \cdots \otimes z_{\lambda_n} \in T^n M$ est *ordonné* si $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_r < \lambda_{r+1} < \cdots < \lambda_n$, $\lambda_i \in \Lambda_0$ pour $1 \leq i \leq r$ et $\lambda_i \in \Lambda_1$ pour $r+1 \leq i \leq n$.

Notons $\{x, y\}$ l'élément $x \otimes y - (-1)^{mn} y \otimes x - [x, y] - f(x, y) \cdot 1$, $x \in L_m$, $y \in L_n$ de TL. I est l'idéal de TL engendré par les éléments $\{x, y\}$, $x \in L$, $y \in L$. Nous appelerons I_n le K-module engendré additivement par les éléments de la forme $P \otimes \{x, y\} \otimes Q$ de $F_n TL$ et I_n^M le K-module engendré par les éléments $P \otimes \{x, y\} \otimes Q$ de $F_n^M TL$.

LEMME 1. Supposons que 2 soit inversible dans K. Tout élément de $F_n^M TL$ peut se mettre modulo I_n^M sous la forme

$$\sum_\lambda a_\lambda z_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes z_{\lambda_n} + y^{n-1}, \qquad \lambda_i \in \Lambda$$

les monômes $z_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes z_{\lambda_n}$ étant ordonnés. Les coefficients a_λ sont définis modulo le p.g.c.d. de $\varepsilon_{\lambda_1}, \ldots, \varepsilon_{\lambda_n}$ et y^{n-1} qui appartient à $F_{n-1} TL$ est défini de façon univoque modulo I_{n-1}.

Démonstration. Nous savons qu'un élément de degré n de $F_n^M TL$ peut s'écrire $\sum_\mu b_\mu z_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes z_{\mu_n}$, $\mu_i \in \Lambda$. Modulo I_n^M on a, pour un monôme de degré n,

$$P \otimes z_\mu \otimes z_\lambda \otimes Q = (-1)^{\bar{\lambda}\bar{\mu}} P \otimes z_\lambda \otimes z_\mu \otimes Q + P \otimes [z_\mu, z_\lambda] \otimes Q + f(z_\mu, z_\lambda) P \otimes Q .$$

Si $\lambda < \mu$, on pourra ainsi inverser z_μ et z_λ. La correction appartient à $F_{n-1} TL$. Si $\lambda = \mu$, $\lambda \in \Lambda_1$, on a

$$P \otimes z_\lambda \otimes z_\lambda \otimes Q = -P \otimes z_\lambda \otimes z_\lambda \otimes Q + P \otimes [z_\lambda, z_\lambda] \otimes Q + f(z_\lambda, z_\lambda) P \otimes Q$$

modulo I_n^M. Puisque 2 est inversible, on peut écrire

$$P \otimes z_\lambda \otimes z_\lambda \otimes Q = \tfrac{1}{2} P \otimes [z_\lambda, z_\lambda] \otimes Q + \tfrac{1}{2} f(z_\lambda, z_\lambda) P \otimes Q$$

modulo I_n^M. Le terme de droite appartient à $F_{n-1} TL$. Nous appelerons cette opération une réduction par rapport à z_λ. Un monôme $z_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes z_{\mu_n}$ peut donc être ordonné par une suite d'inversions et de réductions. On démontrera par induction sur le nombre d'opérations (inversions et réductions) que la correction totale modulo I_{n-1} est indépendante de l'ordre des opérations.

Soit $P \otimes z_\nu \otimes z_\mu \otimes z_\lambda \otimes Q$ un monôme de degré n et soit j le nombre d'opérations. Supposons $\nu \geq \mu \geq \lambda$. Traitons tout d'abord le cas $\nu = \mu$, $\mu > \lambda$, $\mu \in \Lambda_1$. On peut réduire par rapport à z_μ ou échanger z_μ et z_λ. On obtient dans chaque cas un monôme avec $j-1$ opérations. Par induction, la suite des opérations ne changera rien à la correction modulo I_{n-1}. Les deux expressions ainsi obtenues se ramènent modulo I_n^M à des formes qui sont égales modulo I_{n-1}. En effet, on a d'une part

$$P \otimes z_\mu \otimes z_\mu \otimes z_\lambda \otimes Q = \tfrac{1}{2} P \otimes [z_\mu, z_\mu] \otimes z_\lambda \otimes Q + \tfrac{1}{2} f(z_\mu, z_\mu) P \otimes z_\lambda \otimes Q$$

modulo I_n^M. D'autre-part

$$\begin{aligned}
&P \otimes z_\mu \otimes z_\mu \otimes z_\lambda \otimes Q \\
&\quad = (-1)^{\bar\lambda} P \otimes z_\mu \otimes z_\lambda \otimes z_\mu \otimes Q + P \otimes z_\mu \otimes [z_\mu, z_\lambda] \otimes Q + f(z_\mu, z_\lambda) P \otimes z_\mu \otimes Q \\
&\quad = P \otimes z_\lambda \otimes z_\mu \otimes z_\mu \otimes Q + P \otimes z_\mu \otimes [z_\mu, z_\lambda] \otimes Q + f(z_\mu, z_\lambda) P \otimes z_\mu \otimes Q + \\
&\qquad + (-1)^{\bar\lambda} P \otimes [z_\mu, z_\lambda] \otimes z_\mu \otimes Q + (-1)^{\bar\lambda} f(z_\mu, z_\lambda) P \otimes z_\mu \otimes Q \\
&\quad = \tfrac{1}{2} P \otimes z_\lambda \otimes [z_\mu, z_\mu] \otimes Q + \tfrac{1}{2} f(z_\mu, z_\mu) P \otimes z_\lambda \otimes Q + P \otimes z_\mu \otimes [z_\mu, z_\lambda] \otimes Q + \\
&\qquad + f(z_\mu, z_\lambda) P \otimes z_\mu \otimes Q + (-1)^{\bar\lambda} P \otimes [z_\mu, z_\lambda] \otimes z_\mu \otimes Q + \\
&\qquad + (-1)^{\bar\lambda} f(z_\mu, z_\lambda) P \otimes z_\mu \otimes Q
\end{aligned}$$

modulo I_n^M.

Mais $f(z_\mu, z_\lambda) + (-1)^{\bar\lambda} f(z_\mu, z_\lambda) = 0$. C'est évident si $\bar\lambda = 1$, et si $\bar\lambda = 0$, $f(z_\mu, z_\lambda) = 0$ car $f(L_0, L_1) = 0$. On obtient donc finalement

$$\begin{aligned}
P \otimes z_\mu \otimes z_\mu \otimes z_\lambda \otimes Q = \tfrac{1}{2} P \otimes z_\lambda \otimes [z_\mu, z_\mu] \otimes Q + \tfrac{1}{2} f(z_\mu, z_\mu) P \otimes z_\lambda \otimes Q + \\
+ P \otimes z_\mu \otimes [z_\mu, z_\lambda] \otimes Q + (-1)^{\bar\lambda} P \otimes [z_\mu, z_\lambda] \otimes z_\mu \otimes Q
\end{aligned}$$

modulo I_n^M. La différence des deux expressions ainsi obtenues pour $P \otimes z_\mu \otimes z_\mu \otimes z_\lambda \otimes Q$ vaut modulo I_{n-1}

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} P \otimes [[z_\mu, z_\mu], z_\lambda] \otimes Q - P \otimes [z_\mu, [z_\mu, z_\lambda]] \otimes Q + \\
+ \tfrac{1}{2} f([z_\mu, z_\mu], z_\lambda) P \otimes Q - f(z_\mu, [z_\mu, z_\lambda]) P \otimes Q .
\end{aligned}$$

Mais cette différence est nulle d'après l'identité de Jacobi et le fait que f soit un 2-cocycle.

Le cas $\nu>\mu$, $\mu=\lambda$, $\mu\in\Lambda_1$ se traite de la même façon. Dans le cas $\nu=\mu=\lambda$, $\nu\in\Lambda_1$, c'est-à-dire dans le cas d'un monôme $P\otimes z_\lambda\otimes z_\lambda\otimes z_\lambda\otimes Q$, deux réductions modulo I_n^M sont possibles,

$$\tfrac{1}{2}P\otimes[z_\lambda, z_\lambda]\otimes z_\lambda\otimes Q+\tfrac{1}{2}f(z_\lambda, z_\lambda)P\otimes z_\lambda\otimes Q \quad \text{ou}$$
$$\tfrac{1}{2}P\otimes z_\lambda\otimes[z_\lambda, z_\lambda]\otimes Q+\tfrac{1}{2}f(z_\lambda, z_\lambda)P\otimes z_\lambda\otimes Q$$

On voit que ces deux expressions sont égales modulo I_{n-1} en utilisant l'identité $[[z_\lambda, z_\lambda], z_\lambda]=0$.

Nous pouvons maintenant supposer $\nu>\mu>\lambda$. Dans ce cas, nous pouvons tout d'abord échanger z_ν et z_μ ou z_μ et z_λ. De nouveau, par induction, la suite des opérations ne changera rien à la correction modulo I_{n-1}. Les deux expressions ainsi obtenues se ramènent modulo I_n^M à la forme commune $P\otimes z_\lambda\otimes z_\mu\otimes z_\nu\otimes Q$ et on vérifie que les corrections sont égales modulo I_{n-1}. Les calculs sont du même type que ceux faits ci-dessus.

Pour un monôme $P\otimes z_\mu\otimes z_\lambda\otimes Q\otimes z_\rho\otimes z_\nu\otimes R$, $\mu\geq\lambda$ et $\rho\geq\nu$, il faut également distinguer plusieurs cas. Si $\mu=\lambda$, $\lambda\in\Lambda_1$ et $\rho>\nu$, on peut réduire par rapport à z_λ ou échanger z_ρ et z_ν. Si $\mu=\lambda$ et $\rho=\nu$, $\lambda\in\Lambda_1$, $\rho\in\Lambda_1$, on peut réduire par rapport à z_λ ou par rapport à z_ν. Si finalement $\mu>\lambda$ et $\rho>\nu$, on peut échanger z_μ et z_λ ou z_ρ et z_ν. Dans tous les cas, on se ramène à une forme commune et on vérifie que les corrections sont égales modulo I_{n-1}.

LEMME 2. Supposons que 2 soit inversible dans K. Si K est un anneau principal ou si L est un K-module libre, $I\cap F_kTL=I_k$ pour tout entier k.

Démonstration 1) K est un anneau principal.

Il est trivial que $I_k\subset I\cap F_kTL$. Soit y un élément de $I\cap F_kTL$. y appartient à un sous-module I_n, $n\geq k$ de I. Montrons que si $n>k$, y appartient à I_{n-1}. Par définition de I_n, y peut se mettre sous la forme

$$y=\sum_j P_j\otimes\{x_j, y_j\}\otimes Q_j, \qquad P_j\otimes\{x_j, y_j\}\otimes Q_j\in F_nTL.$$

Dans cette somme n'apparaissent qu'un nombre fini d'éléments de L. Soit M le K-module engendré par ces éléments. Puisque l'anneau K est principal, M est somme directe de modules monogènes. Si on applique le *lemme 1* à la somme $\sum_j P_j\otimes\{x_j, y_j\}\otimes Q_j$, on trouve une correction y^{n-1} égale à zéro et si on l'applique à y, une correction y^{n-1} égale à y. Comme cette correction est déterminée univoquement modulo I_{n-1}, y appartient à I_{n-1}.

2) L est un K-module libre.

Nous pouvons choisir $M=L$ et appliquer le *lemme 1* comme dans le cas 1).

THÉORÈME 1. *Supposons que* 2 *soit inversible dans K. Si K est un anneau principal ou si le K-module* $L=(L_0, L_1)$ *est libre,* $\psi_f: SL\to EU_f(L)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. D'après le lemme 2, le terme de plus haut degré de tout élément de I appartient au noyau de l'homomorphisme canonique $TL \to SL$.

REMARQUE. Le théorème 1 et les lemmes qui le préparent sont dus à WITT [13] (voir aussi LAZARD [9]) pour les algèbres de Lie classiques sur un anneau principal. Lorsque le K-module L est libre, une autre démonstration classique (celle donnée en particulier par BOURBAKI [2], § 2 No 7) pourrait être reprise sous certaines modifications pour les algèbres f-enveloppantes $\mathbf{Z}_2$-graduées. Cela a été fait par ROSS [10] lorsque le cocycle f est nul. La présence du cocycle f ne compliquerait pas beaucoup la démonstration de Ross.

Le théorème 1 possède un certain nombre de corollaires. Nous supposons une fois pour toutes que 2 est inversible dans K.

COROLLAIRE 1. Si K est un anneau principal ou si L est un K-module libre, l'application canonique $i_f: L \to U_f(L)$ est injective et $K = K \cdot 1_{U_f(L)}$

Dorénavant, nous identifierons L et $i_f(L)$.

COROLLAIRE 2. Si $(z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une base du K-module L, les monômes ordonnés $z_{\lambda_1} \cdot \cdots \cdot z_{\lambda_n}$, $\lambda_n \in \Lambda$, de $U_f(L)$, forment une base du K-module $U_f(L)$.

Démonstration. Rappelons qu'un monôme $z_{\lambda_1} \ldots z_{\lambda_r} \cdot z_{\lambda_{r+1}} \ldots z_{\lambda_n}$ est dit ordonné si $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_r < \lambda_{r+1} < \cdots < \lambda_n$, $\lambda_i \in \Lambda_0$ pour $1 \leq i \leq r$ et $\lambda_i \in \Lambda_1$ pour $r+1 \leq i \leq n$. Soit Λ_n l'ensemble des suites croissantes de n éléments de Λ du type décrit ci-dessus et soit W le sous-module de TL qui a pour base $(z_{\lambda_1} \otimes z_{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes z_{\lambda_n})$, $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda_n$. On voit facilement que W est isomorphe à $S^n L$ et que la restriction de $E\eta_f$ à W est un isomorphisme de W sur un supplémentaire de $F_{n-1} U_f(L)$ dans $F_n U_f(L)$ (voir [2], § 2, 7.). $E\eta_f(z_{\lambda_1} \otimes z_{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes z_{\lambda_n}) = z_{\lambda_1} \cdot z_{\lambda_2} \ldots z_{\lambda_n}$. D'où le corollaire.

Ces deux corollaires s'appliquent en particulier aux algèbres de Clifford. Voir BOURBAKI [1], § 9, pour une autre démonstration du corollaire 2 pour les algèbres de Clifford.

Le théorème 1 et le corollaire 1 peuvent être généralisés. Signalons tout d'abord que ces résultats sont vrais si K est seulement *de Dedekind.* Ils sont dus à CARTIER [4] pour les algèbres enveloppantes classiques. Sa démonstration se copie pour les algèbres f-enveloppantes $\mathbf{Z}_2$-graduées.

CARTIER utilise en particulier la proposition suivante. Si K est un anneau de Dedekind et si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de K, l'anneau local $K_\mathfrak{p}$ est un anneau principal. Le lemme 2 est alors localement valable. On montre alors qu'il est également valable pour K.

Nous aurons besoin plus loin d'une autre généralisation. Le K-module L n'est plus supposé libre, mais projectif.

DÉFINITION. Un K-module $\mathbf{Z}_2$-gradué $L = (L_0, L_1)$ est dit *projectif* si les K-modules L_0 et L_1 sont projectifs.

Comme dans le cas «classique», L est projectif si et seulement si L est facteur direct d'un K-module libre.

COROLLAIRE 4. Supposons que le K-module L soit projectif. $i_f: L \to U_f(L)$ est alors injectif et $K \cong K \cdot 1_{U_f(L)}$.

Démonstration. Il existe un K-module M tel que $F = L \oplus M$ soit un K-module libre. Si M est muni de la structure d'algèbre de Lie triviale, F possède une structure d'algèbre de Lie, $F = L \times M$. Soit $\tilde{f}$ le 2-cocycle sur F identique à f sur L et nul sur M. On sait que (Prop. 4)

$$U_{\tilde{f}}(F) \cong U_f(L) \otimes U_0(M) = U_f(L) \otimes SM.$$

On en conclut tout d'abord que $K \cong K \cdot 1_{U_f(L)}$ puis que i_f est injectif car $i_{\tilde{f}}$ est injectif (voir la remarque suivant la proposition 4). On convient alors d'identifier L et $i_f(L)$.

COROLLAIRE 5. Si L est un K-module projectif, $\psi_f: SL \to EU_f(L)$ est un isomorphisme.

Démonstration. Nous construisons un homomorphisme φ en direction opposée. Les notations sont celles du corollaire 4.

$u \mapsto u \otimes 1$, $u \in EU_f(L)$, définit un homomorphisme $EU_f(L) \to EU_f(L) \otimes SM$. D'après la proposition 6, nous savons qu'il existe un homomorphisme d'algèbres $EU_f(L) \otimes SM \to E(U_f(L) \otimes SM)$ (on convient d'identifier ESM et SM).

L'isomorphisme $U_{\tilde{f}}(F) \cong U_f(L) \otimes SM$ est un isomorphisme d'algèbres filtrées car la filtration de $U_{\tilde{f}}(F)$ correspond au produit tensoriel des filtrations de $U_f(L)$ et de SM. Par conséquent $E(U_f(L) \otimes SM) \cong EU_{\tilde{f}}(F)$. D'après le théorème 1, $EU_{\tilde{f}}(F) \cong SF$ et $SF \cong SL \otimes SM$ d'après la proposition 4. Nous avons donc construit un homomorphisme $EU_f(L) \to SL \otimes SM$. A l'aide de l'homomorphisme $SM \to K$ égal à zéro sur $S^i M$, $i > 0$ et égal à l'identité sur K, on obtient l'homomorphisme cherché φ.

Indiquons encore un résultat appartenant au même cercle d'idées, mais qui ne sera pas utilisé dans la suite.

COROLLAIRE 6. Si le K-module est projectif, le K-module $U_f(L)$ est également projectif.

Démonstration. Les notations sont celles des lemmes précédents. Le K-module $U_{\tilde{f}}(F) \cong U_f(L) \otimes SM$ est libre d'après le corollaire 3. D'autre part le K-module SM peut être décomposé en une somme directe $SM = K \oplus \overline{SM}$ où $\overline{SM} = \bigoplus_{i>0} S^i M$. On a donc $U_{\tilde{f}}(F) \cong U_f(L) \oplus U_f(L) \otimes \overline{SM}$. $U_f(L)$ est facteur direct d'un module libre, donc projectif.

Signalons de nouveau que ces résultats s'appliquent aux algèbres enveloppantes classiques et aux algèbres de Clifford.

5. Classification de certaines algèbres filtrées

Nous supposerons dans ce paragraphe que 2 est inversible dans K. Nous ne ferons aucune autre hypothèse sur K.

Soit $M=(M_0, M_1)$ un K-module projectif et soit SM l'algèbre symétrique de M.

Soit $\mathfrak{A}(SM)$ la catégorie dont les objets sont les couples (A, ψ_A) où $A=(A_0, A_1)$ est une algèbre filtrée et $\psi_A: SM \to EA$ un isomorphisme d'algèbres graduées. Un morphisme $\theta:(A, \psi_A)\to(B, \psi_B)$ est un homomorphisme d'algèbres filtrées $\theta: A\to B$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} EA \arrow[rr, "E\theta"] & & EB \\ & SM \arrow[ul, "\psi_A"] \arrow[ur, "\psi_B"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Cette construction est due à SRIDHARAN [12].

PROPOSITION 8. Les morphismes de $\mathfrak{A}(SM)$ sont des isomorphismes d'algèbres filtrées.

Démonstration. $E\theta=\psi_B\psi_A^{-1}$ est un isomorphisme. Le résultat suit alors de la proposition 5.

COROLLAIRE. Tous les morphismes de $\mathfrak{A}(SM)$ sont des isomorphismes.

Soit L une structure d'algèbre de Lie sur M et soit f un 2-cocycle sur L à valeurs dans K. $(U_f(L), \psi_f)$ appartient à $\mathfrak{A}(SM)$ d'après le corollaire 5 du théorème 1. Inversément, nous allons montrer que tout objet de $\mathfrak{A}(SM)$ est isomorphe à un couple $(U_f(L), \psi_f)$ où L est une structure d'algèbre de Lie sur M et f un 2-cocycle. Plus précisément:

THÉORÈME 2. ([12] pour les algèbres f-enveloppantes sans $\mathbf{Z}_2$-graduation).

Les classes d'objets isomorphes dans $\mathfrak{A}(SM)$ sont en correspondance biunivoque avec les couples $(L, \bar{f})$ où L est une structure d'algèbre de Lie sur M et $\bar{f}\in H^2(L, K)$. Si $f\in\bar{f}\in H^2(L, K)$, alors $(U_f(L), \psi_f)$ est un objet dans la classe déterminée par $(L, \bar{f})$.

DÉFINITION. Les cocycles $f(x, y)$ et $f'(x, y)$ sont dits *cohomologues* s'il existe une forme linéaire $h: L\to K$ telle que

$$f(x, y) - f'(x, y) = h([x, y]), \qquad x\in L, y\in L.$$

$H^2(L, K)$ est l'ensemble des classes de 2-cocycles cohomologues.

Démonstration. Soit (A, ψ_A) un objet de $\mathfrak{A}(SM)$. Construisons un couple $(L, \bar{f})$. Soit $(\pi_A)_i: F_iA\to F_iA/F_{i-1}A$ la i-ème projection canonique. Posons $(\phi_A)_i=\psi_A^{-1}(\pi_A)_i: F_iA\to S^iM$. La suite de K-modules

$$0 \longrightarrow F_{i-1}A \longrightarrow F_iA \xrightarrow{\varphi(A)_i} S^iM \longrightarrow 0$$

est exacte pour tout $i\geq 1$.

$[\![F_1 A, F_1 A]\!] \subset F_2 A$ mais $(\phi_A)_2 [\![F_1 A, F_1 A]\!] = [\![(\phi_A)_1 F_1 A, (\phi_A)_1 F_1 A]\!] = 0$ car SM est commutative. Par conséquent $[\![F_1 A, F_1 A]\!] \subset F_1 A$. $F_1 A$ est donc une algèbre de Lie pour l'opération $[\![\, , \,]\!]$. $F_0 A = K \cdot 1_A$ est un idéal dans cette algèbre de Lie. Le K-module $F_1 A / F_0 A$ est isomorphe à M. M possède donc une structure d'algèbre de Lie L et cette structure est déterminée univoquement. Soit $[\, , \,]$ le produit de L. Nous avons maintenant une suite exacte d'algèbres de Lie

$$0 \longrightarrow K \cdot 1_A \longrightarrow F_1 A \xrightarrow{(\varphi_A)_1} L \longrightarrow 0$$

$K \cdot 1_A$ est isomorphe à $S^0 M$, donc à K. $F_1 A$ est donc une extension de L par K. Le K-module L $(=M)$ est projectif. Il existe par conséquent un homomorphisme de K-modules $t: L \to F_1 A$ tel que $(\phi_A)_1 \circ t$ soit l'identité de L. $(\phi_A)_1([\![t(x), t(y)]\!] - t([x, y])) = 0$, donc $[\![t(x), t(y)]\!] - t([x, y]) \in K \cdot 1_A$, $x \in L$, $y \in L$.

$$[\![t(x), t(y)]\!] = t([x, y]) + f(x, y) \cdot 1_A \qquad x \in L, y \in L$$

f est un 2-cocycle.

Soit t' un second homomorphisme de K-modules $L \to F_1 A$ tel que $(\phi_A)_1 \circ t'$ soit l'identité de L et soit f' le 2-cocycle correspondant. $t - t'$ définit une forme linéaire $h: L \to K$ et

$$f(x, y) - f'(x, y) = h([x, y]) \qquad x \in L, y \in L$$

f et f' sont cohomologues.

Tout couple $(L, \bar{f})$ est image d'un couple (A, ψ_A). En effet la construction ci-dessus appliquée à $(U_f(L), \psi_f)$ où $f \in \bar{f}$, redonne le couple $(L, \bar{f})$. t est alors l'application i_f.

Montrons maintenant que cette correspondance est biunivoque. Supposons qu'à (A, ψ_A) corresponde $(L, \bar{f})$. Pour tout $f \in \bar{f}$, $(U_f(L), \psi_f)$ a également pour image $(L, \bar{f})$. Ces deux objets sont isomorphes. Pour le voir, il suffit de contruire un morphisme $\bar{t}: (A, \psi_A) \to (U_f(L), \psi_f)$ d'après le corollaire de la proposition 8.

Pour tout $f \in \bar{f}$, il existe une section $t: L \to F_1 A$ (c'est-à-dire un homomorphisme de K-modules tel que $(\phi_A)_1 \circ t = \mathrm{Id}_L$) telle que

$$[\![t(x), t(y)]\!] = t([x, y]) + f(x, y) \cdot 1_A \qquad x \in L, y \in L.$$

En effet, soit $f' \in \bar{f}$ un 2-cocycle correspondant à une section connue $t': L \to F_1 A$. f et f' sont cohomologues, il existe donc une forme linéaire $h: L \to K$ telle que

$$f(x, y) - f'(x, y) = h([x, y]) \qquad x \in L, y \in L$$

$t = t' + h$ est la section cherchée.

Comme $F_1 A \subset A$, t est un f-homomorphisme de L dans A. t induit donc un homomorphisme $\bar{t}: U_f(L) \to A$ d'après la proposition 3. $\bar{t}$ est un homomorphisme d'algèbres filtrées ($U_f(L)$ étant filtrée de façon habituelle) car $\bar{t}|_L: L \to F_1 A$.

Pour prouver que $\bar{t}$ est le morphisme cherché, il faut montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd} E\,U_f(L) \arrow[rr, "E\bar{t}"] & & E\,A \\ & S\,M \arrow[ul, "\psi_f"] \arrow[ur, "\psi_A"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif. Il suffit d'établir la commutativité sur E^1.

Le diagramme

$$\begin{tikzcd} L(\subset U_f(L)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & F_1\,U_f(L) \arrow[r, "\bar{t}"] \arrow[d, "\pi_1"] & F_1\,A \arrow[d, "(\pi_A)_1"] \\ L(\subset S\,L) \arrow[r, "\psi_f"'] & E^1\,U_f(L) \arrow[r, "E\bar{t}"'] & E^1\,A \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Donc

$$E\bar{t}\circ\psi_f = (\pi_A)_1\circ t \qquad \text{sur } L \qquad (t=\bar{t} \text{ sur } L)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \psi_f\circ\psi_A^{-1}\circ E\bar{t} &= \psi_f\circ\psi_A^{-1}\circ(\pi_A)_1\circ t\circ\psi_f^{-1} \\ &= \psi_f\circ(\phi_A)_1\circ t\circ\psi_f^{-1} && \text{car} \quad \psi_A^{-1}\circ(\pi_A)_1 = (\phi_A)_1 \\ &= \mathrm{Id}_{E^1\,U_f(L)} && \text{car} \quad (\phi_A)_1\circ t = \mathrm{Id}_L \\ E\bar{t} &= \psi_A\circ\psi_f^{-1}. \end{aligned}$$

COROLLAIRE 1. $(U_f(L), \psi_f)$ et $(U_{f'}(L), \psi_{f'})$ sont isomorphes si et seulement si f et f' sont cohomologues.

REMARQUE. $U_f(L)$ et $U_{f'}(L)$ peuvent être isomorphes sans que f et f' soient cohomologues.

Nous savons que les algèbres de Clifford sont des cas particuliers des algèbres f-enveloppantes $U_f(L)$. Reprenons le théorème 2 dans ce cas particulier.

COROLLAIRE 2. Une algèbre $\mathbf{Z}_2$-graduée filtrée dont l'algèbre graduée associée est isomorphe à l'algèbre symétrique $S\,M$ d'un module projectif $\mathbf{Z}_2$-gradué $M=(M_0, M_1)$ tel que $M_0=0$, est isomorphe à une algèbre de Clifford $C_Q(M)$ sur M. La forme quadratique est univoquement déterminée.

Démonstration. Q est univoquement déterminée car la structure d'algèbre de Lie L sur M est triviale. Deux cocycles sont alors cohomologues si et seulement s'ils sont égaux.

REMARQUE. L'algèbre symétrique $S\,M$ est simplement l'algèbre extérieure de M_1. ROY [11] démontre un résultat analogue au corollaire 2. Il ne suppose pas que l'algèbre A est $\mathbf{Z}_2$-graduée. Il lui est alors nécessaire de supposer que M_1 est libre.

Soit $A=(A_0, A_1)$ une algèbre filtrée telle que $E\,A\cong S\,M$, M un K-module projectif. Nous savons que $A\cong U_f(L)$ où L est une structure d'algèbre de Lie sur M et f un 2-cocycle sur L. Sous certaines conditions sur L, l'algèbre $U_f(L)$ se réduit au produit

tensoriel d'une algèbre f-enveloppante sur L_0 par une algèbre de Clifford sur L_1 (Prop. 4, corollaire). Ces conditions peuvent être remplacées par des conditions sur la filtration de A.

COROLLAIRE 3. Soit $A=(A_0, A_1)$ une algèbre filtrée dont l'algèbre graduée associée est isomorphe à l'algèbre symétrique d'un module projectif M.

Si $[\![(F_1 A)_1, F_1 A]\!] \subset K\cdot 1_A$, A est isomorphe au produit tensoriel $U_{f'}(L_0)\otimes C_Q(M_1)$ où L_0 est une structure d'algèbre de Lie sur M_0, f' un 2-cocycle sur L_0 et Q une forme quadratique sur M_1. f' est déterminée à un cobord près et Q est déterminée univoquement.

Démonstration. Dans la démonstration du théorème 2, on utilise une application $t: L\to F_1 A$ telle que

$$[\![t(x), t(y)]\!] = t([x, y]) + f(x, y)\cdot 1_A \qquad x\in L, y\in L$$

et telle que $(\phi_A)_1\circ t=\mathrm{Id}_L$.

(Les notations sont celles du théorème 2).

Soit $x\in L_1$. $t(x)\in(F_1 A)_1$ donc $[\![t(x), t(y)]\!]\subset K\cdot 1_A$ par hypothèse.

Par conséquent $(\phi_A)_1\circ t([x, y])=0$ car $\mathrm{Ker}(\phi_A)_1=K\cdot 1_A$, donc $[x, y]=0$. Comme cela est vrai pour tout $x\in L_1$, tout $y\in L$, on a $[L_1, L]=0$. Le résultat suit alors du corollaire de la proposition 4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI, N., *Algèbre*, Chap. 9, *Formes sesquilinéaires et formes quadratiques*. Hermann 1959 Paris.

[2] BOURBAKI, N., *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. 1, *Algèbres de Lie*. Hermann 1960, Paris.

[3] CARTIER, P., *Effacement dans la cohomologie des algèbres de Lie. Séminaire Bourbaki 54/55*, Exposé 116.

[4] CARTIER, P., *Remarques sur le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) *12* (1958), 1–4.

[5] CHEVALLEY, C., *The construction and study of certain important algebras*. Publications of the Math. Soc. of Japan, 1955.

[6] CHEVALLEY, C., *Fundamental concepts of algebra*. Academic Press 1956, New York.

[7] COHN, P. M., *On the embedding of rings in skew fields*, Proc. of London Math. Soc. (3) *11* (1961), 511–530.

[8] HILTON, P., *Note on quasi-Lie rings*, Fund. Math. *43* (1956), 230–237.

[9] LAZARD, M., *Sur les algèbres enveloppantes universelles de certaines algèbres de Lie*, Publ. Sci. Univ. Alger [Sér. A] *1* (1954), 281–294.

[10] ROSS, L. E., *Representations of graded Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. *120* (1965).

[11] ROY, A., *On a characterisation of Clifford algebras*, Math. Z. *85* (1964), 241–244.

[12] SRIDHARAN, R., *Filtered algebras and representations of Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. *100* (1961), 530–550.

[13] WITT, E., *Treue Darstellungen beliebiger Liescher Ringe*, Collect. Math. *6* (1953), 107–114.

Reçu le 27 octobre 1966