Quelques questions d'espace vectoriels topologiques.

Autor(en): **Robert, Alain**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **42 (1967)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-32145

Quelques questions d'espaces vectoriels topologiques

par Alain Robert

0. Introduction et espaces semi-complets

0.1 *Notations générales et conventions*

Les espaces uniformes intervenant sont toujours supposés séparés sauf mention explicite du contraire (Chap. 3).

Si E est un espace uniforme, on note toujours $\hat{E}$ son complété (éventuellement muni de structures additionnelles, par exemple espace vectoriel, ...).

Les espaces vectoriels seront toujours des espaces vectoriels sur $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Lorsqu'on parle d'elc. (espace localement convexe) on sous-entend toujours séparé d'après ce qui précède.

$(\mathscr{F})$ (resp. $(\mathscr{S})$, $(\mathscr{L}\mathscr{F})$) dénotera un espace de Fréchet (resp de Schwarz, limite inductive non néc. stricte d'une suite d'espaces de Fréchet).

Sur $L(E, F)$ (E, F elc., espace des applications $E \to F$ linéaires continues) lorsqu'on parle de $\mathfrak{S}$-topologie, on sous-entend que $\mathfrak{S}$ est un recouvrement de E formé de parties bornées. (On peut toujours supposer les $A \in \mathfrak{S}$ disqués – i.e. convexes et équilibrés – fermés, que tout disque fermé $B \subset A \in \mathfrak{S}$ est encore dans $\mathfrak{S}$ et que toute réunion finie d'ensembles de $\mathfrak{S}$ est contenue dans un ensemble de $\mathfrak{S}$.)

Si E, F sont des elc., on note $\mathfrak{B}(E, F)$ l'ensemble des formes bilinéaires séparément continues sur $E \times F$ (avec différentes topologies en indice...) et $B(E, F)$ l'espace des formes bilinéaires continues sur $E \times F$.

Les notations d'espaces normés associés à un E elc.: E_B (B borné disqué, espace engendré par B muni de la norme jauge de B), E_V (V voisinage de 0 disqué, espace séparé associé à la semi-norme jauge de V), sont aujourd'hui courantes. On dit que B est complétant lorsque E_B est complet (rappelons que B semi-complet $\Rightarrow$ B complétant).

Puisqu'une partie importante du travail qui suit consiste en l'étude de la quasi-complétion d'un espace localement convexe séparé, il n'est peut-être pas inutile de rappeler les résultats classiques sur les espaces semi-complets d'abord, où la situation présente certaines analogies, et d'indiquer ensuite les raisons principales de l'intérêt des espaces quasi-complets.

0.2 *Espaces semi-complets*

(Pour de plus amples détails, cf. [19].)

Dans une optique constructive des mathématiques – ne faisant pas intervenir l'axiome du choix – on est amené à définir et à utiliser les espaces semi-complets où la convergence des filtres quelconques est remplacée par la convergence des seules suites de Cauchy.

(0.2.1) DÉFINITION. *E espace uniforme.*

E semi-complet $\Leftrightarrow$ *Toute suite de Cauchy de E converge.*

Les exemples d'espaces semi-complets (même non complets) sont nombreux:

(0.2.2) Soit I un ensemble non dénombrable et soit:

$$\prod_I{}' \mathbf{R} = \{(x_i)_I \mid x_i = 0 \text{ sauf pour un ensemble dénombrable au plus}\} \subset \prod_I \mathbf{R}$$

muni de la topologie induite par le produit.

Cet espace est semi-complet puisqu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, mais n'est pas complet: son complété est l'espace produit $\prod_I \mathbf{R}$ entier (l'ensemble des suites à support au plus fini $\bigoplus_I \mathbf{R}$ étant déjà dense dans le produit $\prod_I \mathbf{R}$).

(0.2.3) Prenons encore:

$$E = \{f: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f \text{ mesurable pour la mesure de Lebesgue}\}$$

Cet espace est semi-complet en vertu du théorème d'Egoroff (cf. [4] p. 175) pour la topologie de la convergence simple.

Son complété, comme dans l'exemple précédent (0.2.2) s'identifie à l'ensemble de toutes les fonctions réelles:

$$\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}.$$

(0.2.4) Les espaces semi-complets ont les propriétés de stabilité habituelles et triviales à vérifier:

a) (E_i) *famille d'espaces uniformes non vides:*

$$\prod E_i \textit{ semi-complet} \Leftrightarrow E_i \textit{ semi-complet } \forall i$$

b) *E espace uniforme semi-complet, F sous-espace fermé* $\Rightarrow$ *F semi-complet.* (La réciproque n'est pas vraie comme le montrent les exemples qui précédent.)

c) *L'intersection d'une famille de sous-espaces semi-complets d'un espace est semi-complète.*

L'intérêt de la semi-complétion en elc. provient des deux propriétés suivantes:

a) *E* elc. *Les parties bornées disquées semi-complètes de E sont absorbées par tout tonneau.*

b) *E semi-complet, F* elc. *Toute partie simplement bornée de $L(E, F)$ est bornée pour toute $\mathfrak{S}$-topologie.* (cf. [3] p. 34 Ex. 10.)

0.3 *Semi-complétés*

Soit E un espace uniforme. On peut définir de plusieurs façons le semi-complété $\check{E}$ de E, plus petit sous-espace semi-complet contenant E. De façon plus précise:

(0.3.1) L'intersection des sous-espaces semi-complets de $\hat{E}$ contenant E est appelé semi-complété de E (0.2.4.c). On peut aussi le définir comme solution d'un problème universel:

(0.3.2) Il existe un espace uniforme $\check{E}$ semi-complet et une application $E \xrightarrow{\iota_E} \check{E}$ uniformément continue (uniques à isomorphisme unique près) solution du problème universel suivant.

$\forall X$ semi-complet et $\forall f: E \to X$ uniformément continue, $\exists \check{f}$ unique, factorisation de f par ι_E:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\iota_E"'] & X \\ & \check{E} \arrow[u, "\check{f}"'] \end{tikzcd}$$

L'existence d'une telle solution découle des propriétés de permanence citées ci-dessus (0.2.4), et du fait que l'adhérence d'une partie A d'un espace uniforme a un cardinal majoré par:

$$2^{2^{(\mathrm{Card}\, A)}}$$

(cf. BOURBAKI, *Ens. Structures*).

(0.3.3) De façon constructive, on peut définir $E_{(0)}=E$,

$$E_{(1)} = \{x \in \hat{E} \mid x = \lim x_n \text{ où } (x_n) \text{ suite de Cauchy de } E\}$$

et comme $E_{(1)}$ n'est en général *pas* semi-complet, on est conduit à recommencer l'opération par induction:

$$E_{(n+1)} = (E_{(n)})_{(1)} \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Il arrive encore parfois que la réunion des E_n ne soit pas semi-complète. On pose alors par induction transfinie, $\forall \alpha$ ordinal

$$E_{(\alpha)} = (E_{(\alpha-1)})_{(1)} \qquad \text{si } \alpha \text{ a un prédécesseur } \alpha - 1$$

$$E_{(\alpha)} = \bigcup_{\xi<\alpha} E_{(\xi)} \qquad \text{si } \alpha \text{ est ordinal limite}$$

Le plus petit ordinal α tel que $E_{(\alpha)}=E_{(\alpha+1)}$ (Il y en a pour des raisons de cardinal de E !) est appelé ordre de semi-complétion de E.

De façon plus précise, on a même toujours $E_{(\omega_1)}=E_{(\omega_1+1)}$ (où ω_1 dénote le premier ordinal non dénombrable). En effet si (x_n) est une suite de Cauchy de $E_{(\omega_1)}$, on a $x_n \in E_{(\xi_n)}$ et puisque la suite dénombrable d'ordinaux (ξ_n) ne saurait être cofinale à ω_1, il y a un ordinal $\xi > \xi_n$ $\forall n$, $\xi < \omega_1$ d'où $\forall n$ $x_n \in E_{(\xi)}$ et $x = \lim x_n \in E_{(\xi+1)} \subset E_{(\omega_1)}$.

0.4 *Exemples de semi-complétion*

(0.4.1) Prenons pour E l'espace des fonctions numériques réelles continues sur $\mathbf{R}: E=\mathscr{C}(\mathbf{R})$ muni de la topologie induite par le produit $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ (fournissant donc la structure uniforme de la convergence simple). Dans la thèse de BAIRE figure explicitement – pour la première fois – une fonction $f \in E_2, f \notin E_1$, dite fonction de classe (de Baire) 2. Dans un article ultérieur (Acta Math. 1906) il cite une fonction de classe 3. (Ultérieurement, Melle. KELDYCH cite une fonction de classe 4.)

Pour son compte, LEBESGUE – dans son mémoire sur les fonctions représentables analytiquement (1905) – donne l'existence de fonctions de toutes les classes $<\omega_1$ et démontre donc par là que l'espace E considéré est d'ordre de semi-complétion maximum ω_1. (Sa démonstration n'est plus constructive et utilise l'axiome du choix) (cf. [5]).

(0.4.2) BANACH en 1932, dans [1], donne une manière inductive de construire des parties de $l^1_{\mathbf{N}}$ qui soient d'ordre de semi-complétion – pour la topologie faible de dual de (c_0) arbitrairement grand $<\omega_1$ (cf. [1]: appendice).

0.5 *Espaces localement convexes quasi-complets*

La semi-complétion en elc. s'utilise assez peu, car elle ne se laisse pas caractériser par dualité, de sorte que les techniques habituelles d'elc. ne s'appliquent pas. D'autre part les espaces semi-complets habituels, ont des propriétés (de complétion) supplémentaires. On introduit alors la notion plus forte (plus forte car les suites de Cauchy d'un elc. sont toujours bornées)

(0.5.1) DÉFINITION *E elc.*

E quasi-complet $\Leftrightarrow$ *Tout fermé borné de E est complet.*

(0.5.2) Donnons quelques propriétés principales des elc. quasi-complets.

Puisqu'un elc. quasi-complet est semi-complet, on a d'abord:

E quasi-complet $\Rightarrow$ *les bornés de* $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ *sont les mêmes pour toutes les* $\mathfrak{S}$*-topologies. En particulier, on parle de borné du dual E' sans précisier la topologie.*

Propriétés de permanence:

a) (E_i) *famille d'elc.*:

$$\prod E_i \text{ quasi-complet} \Leftrightarrow E_i \text{ quasi-complet } \forall i$$
$$\bigoplus E_i \text{ quasi-complet} \Leftrightarrow E_i \text{ quasi-complet } \forall i$$

b) *Tout sous-espace fermé d'un espace quasi-complet est quasi-complet.*

c) *Toute intersection d'une famille de sous-espaces quasi-complets d'un elc. est quasi-complète.*

Signalons encore le théorème: [3] p. 31

$$E \text{ tonnelé, } F \text{ quasi-complet} \Rightarrow L_{\mathfrak{S}}(E, F) \text{ quasi-complet } \forall \mathfrak{S}\text{-topologie.}$$

En particulier les duals faibles de tonnelés (ou duals forts de tonnelés, mais ils sont souvent complets) sont des exemples d'espaces quasi-complets. Plus particulièrement, les duals faibles des espaces de Banach sont quasi-complets, et non complets s'ils sont de dimension infinie.

1. Quasi-complétion d'un elc

1.1 *Existence et construction*

Soit E un elc., on va montrer comme en (0.3.2) l'existence d'un «plus petit» quasi-complet contenant E.

Soit Σ la structure d'elc. quasi-complet avec pour morphismes σ, les applications linéaires continues (automatiquement uniformément continues) et prenons pour α-applications les applications linéaires continues d'un elc. dans un elc. quasi-complet. Le problème universel relatif à ces données admet une solution (unique à isomorphisme unique près, comme on voit catégoriquement)

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & F \\ & {\scriptstyle\varphi_E}\searrow \; \nearrow{\scriptstyle\tilde\varphi} & \\ & F_E & \end{array}$$

(L'adhérence de $\varphi(E)$ est une partie Σ-permise de F, de cardinal $\leqslant 2^{2^{\operatorname{card} E}}$, et on peut appliquer le résultat de théorie des ensembles cité en (0.3.2), grâce aux propriétés (0.5.2). (cf. [18] p. 298)

(1.1.1) Proposition. *φ_E est un homéomorphisme dans $\hat{E}$ et donc F_E s'identifie au sous-espace de $\hat{E}$, intersection des quasi-complets contenant E.*

Démonstration. Prenant $F=\mathbf{K}$, le théorème de Hahn-Banach indique que φ_E est injective, puis prenant $F=\hat{E}$ on voit que φ_E est un homéomorphisme dans.

Pour voir que F_E a bien la topologie induite par $\hat{E}$, on remarque que $\hat{E}$ est aussi le complété de F_E puisqu'on vérifie facilement qu'il jouit de la propriété universelle le définissant.

(1.1.2) Construction. On définit $E_0=E$ puis par induction transfinie, pour tout α ordinal:

$$E_\alpha = \begin{cases} \bigcup_{\xi<\alpha} E_\xi & \text{si } \alpha \text{ est ordinal limite} \\ \text{réunion des adh. dans } \hat{E} \text{ des bornés de } E_{\alpha-1} & \text{si } \alpha \text{ a un prédécesseur } \alpha-1 \end{cases}$$

(On peut se borner à définir $\alpha\mapsto E_\alpha$ sur le segment des ordinaux $\leqslant$ un ordinal plus grand que l'ordinal initial relatif au cardinal d'une base algébrique de E.)

Il est clair – pour des raisons de cardinal – qu'on a finalement

$$E_\alpha = E_{\alpha+1} = \bigcup E_\alpha$$

et que: $E_\alpha=E_{\alpha+1}\Leftrightarrow E_\alpha$ quasi-complet.

(1.1.3) Proposition. *E, F elc. $f\colon E\to F$ linéaire continue, α ordinal, $\exists! f_\alpha$ continue rendant commutatif le diagramme suivant*:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & F_\alpha \end{array}$$

Démonstration. Par induction transfinie. Le seul cas à examiner est celui où α admet un prédecesseur et dans ce cas on applique la Prop. 8 p. 10 de [3].

(1.1.4) PROPOSITION. *$\bigcup E_\alpha$ est le quasi-complété de E.*

Démonstration. On vient de dire que $\bigcup E_\alpha$ est quasi-complet, vérifions la propriété universelle: soit F un elc. quasi-complet, $f: E \to F$ linéaire continue. Alors f fournit univoquement $f_\alpha: E_\alpha \to F_\alpha = F$ d'où la proposition.

Le plus petit ordinal α tel que $E_\alpha = E_{\alpha+1}$ est appelé ordre de quasi-complétion de E (ou simplement *ordre* dans ce travail)

E d'ordre $0 \Leftrightarrow E = E_0 = E_1 \Leftrightarrow E$ quasi-complet.

Les espaces métrisables sont tous d'ordre $\leqslant 1$ (quasi-complété = complété, car les suites de Cauchy fournissent déjà la complété). Le quasi-complété d'un espace E sera noté $\tilde{E}$.

(1.1.5) PROPOSITION. a) *E elc infratonnelé $\Rightarrow$ $\tilde{E}$ tonnelé.*

b) *E bornologique $\Rightarrow$ $\tilde{E}$ ultrabornologique (donc tonnelé)*

Démonstration. a) On remarque d'abord que si F est un sous-espace de $\hat{E}$ contenant E, et si E est infratonnelé, F est infratonnelé, d'où le résultat car les bornés faibles du dual de $\tilde{E}$ quasi-complet sont bornés forts.

b) Trivial d'après les définitions (cf. [3] p. 34 Ex. 11).

1.2 *Exemples*

(1.2.1) ENSEMBLE D'INDICES Λ.

Définissons un ensemble d'indices Λ qui va réapparaître dans ce travail.

Considérons d'abord:

$$\mathscr{B} = \{(\lambda_n) \mid (\lambda_n) \text{ suite strictement croiss. d'entiers } > 0\}$$

et munissons-le de la relation d'ordre (comparaison forte):

$$(\lambda_n) \ll (\mu_n) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \alpha > 0, \exists N \quad \text{t.q.} \quad \text{si} \quad n \geqslant N \quad \text{alors} \quad \alpha \lambda_n < \mu_n \\ \text{ou bien} \quad (\lambda_n) = (\mu_n) \end{cases}$$

On remarque que $(\lambda_n) \ll (\mu_n) \Rightarrow \forall \alpha > 0,\ \alpha(\lambda_n) = (\alpha\lambda_n) \ll (\mu_n)$, ou bien $(\lambda_n) = (\mu_n)$

Soit Λ une partie totalement ordonnée maximale de $\mathscr{B}$ (Zorn).

LEMME:

$$\left.\begin{matrix} (\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \ \textit{famille de } \mathbf{R}^* \\ (\mu_n) \in \mathscr{B} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \exists \lambda = (\lambda_n) \in \mathscr{B},\ n \in \mathbf{N} \quad \textit{arb. grand, t.q.} \\ |\alpha_\lambda| \cdot \lambda_n > \mu_n \end{matrix}$$

Par conséquent $\{\alpha_\lambda \cdot \lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ n'est pas un ensemble borné de $\prod_{\mathbf{N}} \mathbf{R}$.

Démonstration. Sinon on aurait $|\alpha_\lambda| \cdot \lambda_n \leqslant \mu_n \ \forall n \geqslant N_\lambda$. On pourrait construire $\nu = (\nu_n)$ telle que $(\mu_n) \ll (\nu_n)$. Une telle suite satisferait alors $|\alpha_\lambda| \cdot \lambda < \nu$, $\forall \lambda \in \Lambda$ contraire à la maximalité de Λ.

LEMME. *Λ n'est pas dénombrable.*

Démonstration. En effet un procédé diagonal judicieux (Th. de DU BOIS-REYMOND) permet de construire pour toute famille dénombrable de suites $\lambda^m=(\lambda_n^m)$, une suite $\lambda \geqslant \lambda^m$ $\forall m$. En pratique on utilisera souvent une partie Λ_0 bien ordonnée cofinale à Λ, partie qui a le type d'ordre de $\omega_1 \cong [0, \omega_1[$ si l'on admet l'hypothèse du continu, puisque ω_1 n'a pas de partie cofinale dénombrable et que:

$$\operatorname{Card} \Lambda_0 \geqslant \operatorname{Card} \mathbf{N}^{\mathbf{N}} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

(1.2.2) ORDRE 2. Soit F l'espace $\prod_{\mathbf{N}} \mathbf{R} \times \prod_{\Lambda_0} \mathbf{R}$ muni de la topologie produit E, le sous-espace engendré par les $((a_n), \varphi_\lambda)$ où φ_λ dénote la suite égale à 0 sauf au point λ où elle vaut 1, et (a_n) une suite (variable) finissant comme λ: $\exists N\ a_n=\lambda_n \forall n \geqslant N$ $(\lambda=(\lambda_n) \in \Lambda_0)$. Il est clair que E est un sous-espace vectoriel dense de F et que le point $((0), (1))$ n'est pas adhérent à une partie bornée de E (1.1.1).

Plus précisément:

$$E_1 = \{((a_n), f) \mid \exists \lambda_0 \in \Lambda_0 \text{ t.q. } f(\lambda) = 0\ \forall \lambda > \lambda_0, \lambda \in \Lambda_0\}$$

Tous les points de F sont adhérents à des bornés de E_1 donc $E_2=F$, $\tilde{E}=\hat{E}$ et E est d'ordre 2.

Examinons maintenant quelques espaces de fonctions continues.

(1.2.3) PROPOSITION. *X espace topologique complétement régulier. $E=\mathscr{C}_s(X; \mathbf{R})=\mathscr{C}_s(X)$, espace des fonctions continues (réelles) sur X, muni de la topologie de la convergence simple.*

Alors $E_1=\{f \in \mathbf{R}^X \mid \exists g$ semi-cont. inf. finie t.q. $|f| \leqslant g\}$
$E_2=\tilde{E}=\hat{E}=\mathbf{R}^X$. E est d'ordre $\leqslant 2$.

Démonstration. Si $f \in E_1$, $f \in \overline{\{f_i\}}$ borné, f_i continues et bornées dans leur ensemble en chaque point, donc $g=\operatorname{Sup}|f_i|$ satisfait aux conditions.

Inversément, il suffit de montrer qu'une fonction positive $f \leqslant g$ semi-cont. inf. finie, est dans E_1 (décomposition en partie positive et négative d'une fonction quelconque). Montrons qu'on peut approcher f par des fonctions continues positives $\leqslant g$. $x_1, \ldots, x_n \in X$, $\varepsilon>0$ donnés. On peut trouver f_1 continue positive égale à f en les x_i et des g_k continues positives $\leqslant g$ telles que $g_k(x_k) \geqslant g(x_k)-\varepsilon$ (g est l'enveloppe supérieure des fonctions continues qui lui sont inférieures) $\tilde{g}=\operatorname{Sup} g_k$ est continue, $\leqslant g$ et donc $\operatorname{Inf}(f_1, \tilde{g})$ est continue, $\leqslant g$, approche f à ε près en les x_i.

Pour la seconde affirmation, si $f \in \mathbf{R}^X$, soit $I=$ensemble des parties finies de x, et posons $\forall i \in I$:

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in i \\ 0 & \text{si } x \notin i \end{cases} \qquad |f_i(x)| \leqslant |f(x)| \quad \forall i$$

$\{f_i\}_{i \in I}$ est borné et $|f_i(x)| \leqslant \operatorname{Sup}_{x \in i} |f(x)| = \text{Const} < \infty$, semi-cont. inf. finie, donc $f_i \in E_1$ et comme évidemment $f \in \overline{\{f_i\}}$ on a $f \in E_2$.

Remarque: Lorsque X est localement compact et lorsqu'il existe une $f \in \mathbf{R}^X$ non majorée sur tout ouvert non vide, alors $E_1 \neq \mathbf{R}^X$ (et plus précisément $f \notin E_1$).

Par exemple pour $X = \mathbf{R}$ on peut prendre:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ irrationnel} \\ q & \text{si } x = p/q \text{ fraction réduite.} \end{cases}$$

Soit en effet $x \in X$, V un voisinage compact de x; f non majorée dans $\mathring{V}$, donc, pour approcher f simplement dans $\mathring{V}$, il faut prendre une fonction continue φ_n, $\geqslant n+1$ en un point $x_n \in \mathring{V}$. φ_n sera encore $\geqslant n$ dans un $V_n \subset V$, voisinage compact de x_n. Par induction, on définit une suite de compacts emboîtés $V_n \supset V_{n+1} \supset \dots$ dont l'intersection contient un point x en lequel on a $\operatorname{Sup} \varphi_n(x) = \infty$. Donc si Φ est un ensemble de fonctions continues et $f \in \bar{\Phi}$, $\exists \varphi_n \in \Phi$, $x \in X$ t.q. $\operatorname{Sup} \varphi_n(x) = \infty$ montrant que Φ est non borné.

(1.2.4) Proposition. *X complètement régulier.*

$E = \mathscr{C}_c(X)$ l'espace des fonctions continues (réelles) muni de la topologie de la convergence compacte.

Alors $\tilde{E} = \hat{E} = \{f: X \to \mathbf{R} \mid \forall K$ compact $f|_K$ continue$\}$ et E est d'ordre $\leqslant 2$.

Démonstration. Remarquons d'abord que si K est compact dans X et F fermé, $F \cap K = \emptyset$, il existe $f: X \to [0,1]$ continue, égale à 1 sur K et nulle sur F. Toute fonction continue sur K se prolonge en fonction continue sur X. (Il suffit de passer au compactifié de Stone-Čech βX de X et d'appliquer les résultats correspondants des espaces compacts, car K sera encore compact dans βX et $\bar{F}^{\beta X} \cap K = \emptyset$.) Ceci montre que $\mathscr{C}_c(X)^\wedge$ est bien l'espace annoncé.

1) Si f est positive, a des restrictions aux compacts continues et si f est majorée par $\tilde{f}$ continue, alors $f \in \mathscr{C}_c(X)_1$.

En effet si K est un compact, φ continue positive, égale à f sur K, $\{\operatorname{Inf}(\varphi, \tilde{f})\}$ est un ensemble borné de $\mathscr{C}_c(X)$ contenant f dans son adhérence.

2) Si f est positive et appartient à $\mathscr{C}_c(X)$, $\forall K$ compact choisissons φ^K continue égale à f sur K. Alors $\{\operatorname{Inf}(f, \varphi^K)\}$ est un ensemble borné de $\mathscr{C}_c(X)_1$ contenant f dans son adhérence. Le théorème est alors démontré puisqu'une fonction quelconque de $\mathscr{C}_c(X)^\wedge$ a ses parties positives et négatives dans $\mathscr{C}_c(X)_2$, donc est elle-même dans cet espace.

Ici, on n'a pas de caractérisation des éléments de $\mathscr{C}_c(X)_1$, mais on a néanmoins la Proposition:

(1.2.5) Proposition. *X complètement régulier*

$f \in \mathscr{C}_c(X)^\sim$ positive. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

i) *Propriété* (P):

$$\forall g \in \mathscr{C}(X),\ \forall K \text{ compact t.q. } g|_K < f|_K$$
$$\exists V_K \text{ voisinage de } K \text{ t.q. } g|_{V_K} < f|_{V_K}$$

ii) *f est enveloppe supérieure de fonctions continues positives,*

iii) *f est semi-cont. inf.*
et toute f y satisfaisant est dans $\mathscr{C}_c(X)_1$

Démonstration. i)$\Rightarrow$iii) Prendre $K=\{x\}$ et $g=$const.

iii)$\Rightarrow$i) Raisonnement facile utilisant la compacité

ii)$\Leftrightarrow$iii) Classique.

Quant à la dernière affirmation, il suffit de la vérifier comme précédemment pour les fonctions positives, et d'utiliser par exemple ii) et la compacité.

(1.2.6) Ordre n ($\in \mathbf{N}$).

Un exemple d'ordre 2, quoique légèrement plus compliqué figure dans [18] p. 299. L'idée sous-jacente nous a néanmoins permis de citer un exemple d'espace d'ordre fini arbitrairement grand. (La question de trouver de tels espaces, sans figurer explicitement dans [18], se trouve néanmoins à la base de questions comme celle de p. 311).

Proposition. *E elc. d'ordre α. Le sous espace F de $E\times \bigoplus_E \prod_n \mathbf{R}_n$ engendré par les $(x, e_{x,n})$ (où $e_{x,n}$ désigne la famille double nulle sauf à l'endroit (x, n) où elle vaut 1) est d'ordre $\geqslant 1+\alpha$ (donc $\geqslant \alpha$ si α est ∞)*

Démonstration. Un borné B de F a une seconde projection sur la somme directe, contenue dans une somme directe finie, donc (à fortiori) sa projection sur le premier facteur est de dimension finie (vu la liaison). La première projection de l'adhérence $\bar{B}$ de B dans F sera encore de dimension finie et contenue dans E. D'autre part $(x, e_{x,n}) \xrightarrow{n\to\infty} (x, 0) \in F_1$ et $(0, e_{x,n}) \in F_1$ d'où $F_1 = E\times \ldots$, Ordre $(F_1) \geqslant$ Ordre (E) puis

$$\text{Ordre}(F) \geqslant 1 + \text{Ordre}(E).$$

Partant d'un espace d'ordre$\geqslant 1$, cette proposition permet de construire des espaces d'ordre$\geqslant n$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

1.3 *Propriétés générales de l'ordre*

(1.3.1) Proposition. *(E_i) famille d'elc. d'ordres respectifs ξ_i, $\xi_i \leqslant n$ ordinal fini. Alors $E=\prod E_i$ est d'ordre* Sup ξ_i *(fini)*

Démonstration. Par induction (finie), il suffit de voir:

$$(\prod E_i)_1 = \prod (E_i)_1$$

Or: $x=(x_i)\in \prod (E_i)_1 \Leftrightarrow \forall i\, x_i \in \bar{B}_i$ où B_i borné de E_i

$$\Leftrightarrow (x_i)\in \prod \bar{B}_i = \overline{\prod B_i} \Leftrightarrow x = (x_i) \in (\prod E_i)_1$$

(1.3.2) Proposition. *(E_i) famille d'elc. d'ordres respectifs ξ_i. Alors $E=\bigoplus E_i$ est d'ordre* Sup ξ_i

Démonstration. $\forall \xi$, $(E_i)_\xi$ a la topologie induite par $\hat{E}_i$, donc la topologie somme directe $\bigoplus (E_i)_\xi$ est induite par $\bigoplus \hat{E}_i = \widehat{\bigoplus E_i} = \hat{E}$. Il suffit de démontrer $E_\alpha = \bigoplus (E_i)_\alpha$ $\forall \alpha$ ordinal, ce que nous ferons par induction transfinie.

$$E_0 = E = \oplus E_i = \oplus (E_i)_0$$

D'abord $E_i \to \oplus E_i$ fournit $(E_i)_\alpha \to (\oplus E_i)_\alpha$ d'où une application canonique:

$$\oplus (E_i)_\alpha \to (\oplus E_i)_\alpha$$

Supposons inversément par induction que l'application

$$(\oplus E_i)_\alpha \to \prod (E_i)_\alpha$$

ait une image dans $\oplus (E_i)_\alpha \quad \forall \alpha < \xi$.

Si ξ admet un prédécesseur, l'égalité $(\oplus E_i)_{\xi-1} = \oplus (E_i)_{\xi-1}$ fournit directement $(\oplus E_i)_\xi = \oplus (E_i)_\xi$, les bornés de $\oplus (E_i)_{\xi-1}$ étant déjà dans une somme directe finie. Si ξ est ordinal limite

$$(\oplus E_i)_\alpha = \oplus (E_i)_\alpha \qquad \forall \alpha < \xi$$

implique

$$(\oplus E_i)_\xi = \bigcup_{\alpha<\xi} (\oplus E_i)_\alpha = \oplus \bigcup_{\alpha<\xi} (E_i)_\alpha = \oplus (E_i)_\xi .$$

(1.3.3) Construisant $\forall n \in \mathbf{N}$ un espace E_n d'ordre $\geqslant n$ d'après (1.2.6), leur somme directe $\oplus E_n$ sera donc d'ordre $\geqslant \operatorname{Sup} n = \omega_0$ premier ordinal infini.

(1.3.4) Proposition. *E, F elc., E de dimension finie.*
Alors $\forall \alpha$ *ordinal* $L(E, F)_\alpha = L(E, F_\alpha)$
donc Ordre $L(E, F) =$ Ordre (F)
et $L(E, F)^{\sim} = L(E, \tilde{F})$

Démonstration. E étant de dimension finie, toutes les $\mathfrak{S}$-topologies sur $L(E, F)$ sont égales à $L_s(E, F)$ (convergence simple) $E = \oplus \mathbf{K}$ (somme finie) donc:

$$L(E, F) = L(\oplus \mathbf{K}, F) = \oplus L(\mathbf{K}, F)$$

$$L(E, F)_\alpha = \oplus L(\mathbf{K}, F)_\alpha$$

et il suffit de faire la démonstration pour $E = \mathbf{K}$, (induction transfinie) et comme:

$$L(\mathbf{K}, \bigcup_{\xi<\alpha} F_\xi) = \bigcup_{\xi<\alpha} L(\mathbf{K}, F_\xi)$$

il ne reste à démontrer que $L(\mathbf{K}, F_1) = L(\mathbf{K}, F)_1 = F_1$, ce qui est trivial vu l'isomorphisme vectoriel topologique:

$$L(\mathbf{K}, F) \to F$$

$$f \longmapsto f(1)$$

(1.3.5) On pourrait espérer généraliser le résultat précédent à des E tonnelés séparables, en prenant (x_n) suite dense dans E et en approchant E par les sous-espaces de dimension finie engendrés par les premiers x_n.

Mais en général pour voir que $\Phi \subset L_s(E, F)$ est borné, il ne suffit pas de voir que

$\Phi(x_n)=\{\varphi(x_n)|\varphi\in\Phi\}$ est borné $\forall n$: $E=\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ (espace de Fréchet nucléaire) $F=\mathbf{R}$, φ_n définie par $\varphi_n((\lambda_i))=\sum_{i\leqslant n}\lambda_i$; φ_n continue comme somme de projections $\Phi=\{\varphi_n|n\in\mathbf{N}\}$; $\forall x\in\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ on a: $\Phi(x)=\bigcup\varphi_n(x)$ borné de $\mathbf{R}$, mais $\Phi((1,1,\ldots))=\{0,1,2,\ldots\}=\mathbf{N}$ non borné d'où Φ non borné.

1.4 *Fonctions à valeurs vectorielles*

E elc. sur $\mathbf{R}$, X espace complètement régulier, on note φ_x la fonction caractéristique de $x\in X$.

$\mathscr{C}(X,E)$ désigne l'espace des fonctions continues à valeurs dans E muni de la topologie de la convergence simple.

(1.4.1) Proposition. a) *α ordinal, $f\in\mathscr{C}(X,E)_\alpha\Rightarrow f: X\to E_\alpha$*

b) α ordinal $\geqslant 1$, $e\in E_\alpha$, $x\in X\Rightarrow\varphi_x e\in\mathscr{C}(X,E)_\alpha$

Démonstration. a) La proposition est triviale pour $\alpha=0$ et se démontre par induction transfinie:

Si α a un prédécesseur $\alpha-1$

$f\in\mathscr{C}(X,E)_\alpha\Rightarrow f\in\overline{\{f_i\}}$, $\{f_i\}$ borné de $\mathscr{C}(X,E)_{\alpha-1}$

$f_i: X\to E_{\alpha-1}$ et $\forall x\in X, f(x)\in\overline{\{f_i(x)\}}$ adh. d'un borné de $E_{\alpha-1}$, donc $\in E_\alpha$

Si α est ordinal limite:

$$f\in\mathscr{C}(X,E)_\alpha=\bigcup_{\xi<\alpha}\mathscr{C}(X,E)_\xi \quad \text{et la proposition est triviale.}$$

b) Cas $\alpha=1$.

$\forall V$ ouvert, contenant x, soit $\chi_V: X\to[0,1]$ continue, $=1$ en x, nulle sur $\complement V$. Soit alors B un borné équilibré de E dont l'adhérence dans $\hat{E}$ contient $e\in E_1$ donné. Il suffit de voir que:

$$\mathscr{B}=\{\chi_V\cdot e_i \mid e_i\in B,\ V \text{ ouvert contenant } x\}$$

est un borné de $\mathscr{C}(X,E)$ dont l'adhérence dans $\hat{E}^X$ contient $\varphi_x e$.

$\mathscr{B}$ est borné car $\forall x$, $\mathscr{B}(x)\subset B$ borné et si W est un voisinage de 0 dans E, $x, x_1,\ldots,x_n$ un ensemble fini de points distincts de X, il suffit de choisir V ne contenant pas les x_i pour que:

$$\chi_V(x_k)\cdot e_i-\varphi_x(x_k)\,e=0\in W$$

$$\chi_V(x)\cdot e_i-\varphi_x(x)\,e=e_i-e\in W$$

dès que $e_i-e\in W$, possible par hypothèse: $e\in E_1$.

La démonstration se termine alors par induction transfinie:

Seul cas à examiner: α admet un prédécesseur $\alpha-1$; supposons $e\in\bar{B}$, B borné de $E_{\alpha-1}$,

$\{\varphi_x e_i \mid e_i\in B\}$ est un borné de $\mathscr{C}(X,E)_{\alpha-1}$ contenant $\varphi_x e$ dans son adhérence: $\varphi_x e\in\mathscr{C}(X,E)_\alpha$.

(1.4.2) Proposition: *$X\neq\emptyset$, E d'ordre $\alpha\geqslant 2$*

a) *α admet un prédécesseur $\Rightarrow\mathscr{C}(X,E)$ d'ordre α*

b) α *ordinal limite* $\Rightarrow \mathscr{C}(X, E)$ *d'ordre* α *ou* $\alpha+1$.
$\mathscr{C}(X, E)^{\sim} = \tilde{E}^X = \mathscr{F}(X, \tilde{E})$ *dans tous les cas.*

Démonstration. a) $\alpha - 1 \geqslant 1$, donc on peut appliquer (1.4.1.b) à $\alpha-1, f: X \to \tilde{E} = E_\alpha$. $\forall x$ soit B_x un borné de $E_{\alpha-1}$ tel que $f(x) \in \bar{B}_x$. Les sommes finies d'éléments $\varphi_x(f(x)+b)$ où $f(x)+b \in B_x$ forment un ensemble borné de $\mathscr{C}(X, E)_{\alpha-1}$ auquel f est adhérent.

b) $\mathscr{C}(X, E)$ est manifestement d'ordre $\geqslant \alpha$(1.4.1) et d'ordre $\leqslant \alpha+1$ car si $f: X \to \tilde{E} = E_\alpha$, les sommes finies d'éléments $\varphi_x f(x)$ forment un ensemble borné de $\mathscr{C}(X, E)_\alpha$ auquel f est adhérent, donc $f \in \mathscr{C}(X, E)_{\alpha+1}$

Lorsque X est fini – par exemple – $\mathscr{C}(X, E)$ est d'ordre α.

Lorsque $X = \tilde{E}$, l'application id. $X \to \tilde{E} = E_\alpha$ ne prend ses valeurs dans aucun E_ξ ($\xi < \alpha$ limite), donc n'est pas dans $\mathscr{C}(X, E)_\alpha$ ce qui montre que dans ce cas l'ordre est effectivement $\alpha+1$. D'après (1.3.3), on obtient ainsi un espace d'ordre $\geqslant \omega_0 + 1$. C'est le résultat le plus fin obtenu dans cette direction.

(1.4.3) Donnons encore une caractérisation des éléments de $\mathscr{C}(X, E)_1$ dans le cas où E est complet pour simplifier.

Proposition. *X complètement régulier, E* elc. *complet.*

$\mathscr{C}(X, E)_1 = \{f: X \to E \mid \forall p$ *semi-norme cont.* $\exists g_p$ *semi-cont. inf. finie t.q.* $pf \leqslant g_p\}$

Démonstration. Soient en effet $f \in \bar{B}$ où $B = \{f_i\}$ borné de $\mathscr{C}(X, E)$

$$pf(x) \leqslant \operatorname{Sup} pf_i(x) < \infty .$$

Inversément: $x_1, \ldots, x_n \in X$, p semi-norme continue sur E, $\varepsilon > 0$ (on suppose les $pf(x_i) \neq 0$, sinon modifications triviales).

Choisissons V_i, voisinages ouverts disjoints des x_i, $\varphi_i: X \to [0, 1]$ continues, nulles en dehors de V_i et telles que:

$$\varphi_i(x_i) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{pf(x_i)}$$

$$\varphi_i(x)\, g_p(x_i) \leqslant g_p(x) \qquad \forall x \in X$$

Alors:

$$p\left(\sum \varphi_i(x) f(x_i)\right)_{x \in V_i} = \varphi_i(x)\, pf(x_i) \leqslant \varphi_i(x)\, g_p(x_i) \leqslant g_p(x)$$

$$p\left(\sum \varphi_j(x_i) f(x_j) - f(x_i)\right) = (\varphi_i(x_i) - 1)\, pf(x_i) \leqslant \varepsilon \qquad \forall i .$$

(1.4.4) Les démonstrations ci-dessus montrent que si E est complet $\mathscr{C}(X, E)$ est d'ordre $\leqslant 2$ (et d'ordre 2 en général, par exemple lorsque $X = \mathbf{R}$ et $E \neq \{0\}$)

Application. *X localement compact, Y complètement régulier* $\mathfrak{S} = \{\bigcup_{\text{finie}} K \times \{y\} \mid K$ *relativement compact de* $X\}$.

Démonstration. $\mathfrak{S}$ est saturé pour les opérations: adhérence, réunion finie, et prendre une partie de.

Le complété de $\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X \times Y; \mathbf{R})$ s'identifie à l'espace des fonctions dont les restrictions aux ensembles de $\mathfrak{S}$ sont continues, donc puisque X est localement compact, aux fonctions F telles que

$$\forall y, F(\, , y) \text{ continue}.$$

On va simplement établir l'isomorphisme:

$$\mathscr{C}_{\mathfrak{S}}(X \times Y; \mathbf{R}) \to \mathscr{C}_s(Y, \mathscr{C}_c(X; \mathbf{R}))$$

$$F \longmapsto F(\cdot, y) \quad \text{fonct. de } y$$

$$y \longmapsto F(\cdot, y) = f_y.$$

1) Cette application est bien définie. Si F est continue, $y \mapsto f_y$ est une application continue $Y \to \mathscr{C}_c(X)$. En effet si K est un compact de X, $\forall x \in K$, $\exists V_x$ voisinage ouvert de x et W_x voisinage de y_0 tels que:

$$(x', y') \in V_x \times W_x \Rightarrow |F(x', y') - F(x, y_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Les V_x forment un recouvrement de K duquel on extrait un sous-recouvrement fini (V_{x_i}) et $W = \bigcap W_{x_i}$ est un voisinage de y_0 tel que: $y' \in W \Rightarrow |f_{y'}(x) - f_{y_0}(x)| \leqslant 2\varepsilon$ $\forall x \in K$.

2) Cette application est injective, et surjective car X est localement compact.

3) Cette application est un homéomorphisme linéaire par des principes généraux (cf. par ex. [10] p. 10).

4) La proposition résulte alors de la remarque précédant l'énoncé (cf. aussi (1.4.3)).

2. Applications de la quasi-complétion

2.1 *Caractérisation de E_1 par dualité*

La Proposition suivante joue un rôle clé dans tout ce chapitre.

(2.1.1) PROPOSITION. *E elc. $\mathfrak{S}$ recouvrement de E par des bornés. Supposons la $\mathfrak{S}$-topologie sur E' compatible avec la dualité.*

Alors:

$$(E'_{\mathfrak{S}})_1 = \widehat{E'_{\mathfrak{S}}} \cap (E_{\mathfrak{T}})' \subset E^*$$

où $\mathfrak{T}$ est la topologie sur E dont un système fondamental de voisinages de 0 *est formé des tonneaux de E.*

Démonstration. On remarque d'abord que d'après le théorème de Grothendieck ([13]) $\widehat{E'_{\mathfrak{S}}}$ s'identifie au sous-espace de E^* formé des x^* dont les restrictions à tous les éléments de $\mathfrak{S}$ sont continues.

Puisque la $\mathfrak{S}$-topologie sur E' est compatible avec la dualité, le dual de $\widehat{E'_{\mathfrak{S}}}$ est encore E, et l'adhérence dans $\widehat{E'_{\mathfrak{S}}}$ d'un borné disqué de $E'_{\mathfrak{S}}$ est égale à son adhérence faible $\sigma(\widehat{E'_{\mathfrak{S}}}, E)$, donc coïncide avec sa bipolaire dans la dualité $\langle E, \widehat{E'_{\mathfrak{S}}}\rangle$. $(E'_{\mathfrak{S}})_1$ est donc engendré par les $(B^0)^0 = T^0$ où B borné de $E'_{\mathfrak{S}}$ ce qui équivaut à $T = B^0$ tonneau de E $\mathfrak{S}$-bornivore (polaires prises dans $\widehat{E'_{\mathfrak{S}}}$). Or tout $T \in \mathfrak{T}$ est $\mathfrak{S}$-bornivore, puisque les ensembles de $\mathfrak{S}$ qu'on peut supposer fermés ($\Leftrightarrow \sigma(E, E')$-fermés lorsqu'on les suppose disqués) sont $\sigma(E, E')$-compacts (Th. de Mackey) donc complets pour cette topologie et à fortiori complets pour la topologie de E (cf. [2] Prop. 8 p. 11). Finalement les T^0 (polaires dans E^*) engendrent exactement $(E_{\mathfrak{T}})'$.

(2.1.2) COROLLAIRE. a) *E tonnelé, $E_{\mathfrak{T}}$ compatible avec la dualité $\Rightarrow$ $E_{\mathfrak{T}}$ quasi-complet.*
b) *E semi-réflexif, infratonnelé $\Rightarrow$ E'_b quasi-complet.*

Démonstration. a) $(E'_{\mathfrak{S}})_1 = \widehat{E'_{\mathfrak{S}}} \cap E' = E' \Rightarrow E'_{\mathfrak{S}}$ quasi-complet. b) Les hypothèses impliquent même E tonnelé et on applique a).

On retrouve ainsi des résultats classiques.

La proposition qui suit, découle de (2.1.1) par dualité et sera constamment utilisée sans référence.

(2.1.3) PROPOSITION. *E elc., alors*

$$E_1 = (E'_b)' \cap \hat{E}$$

Démonstration. Considérons E comme dual de $E'_\sigma = F$, $E = F'_{\mathfrak{S}}$, où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties équicontinues disquées faiblement fermées de E'. Soit T un ensemble disqué faiblement fermé absorbant de E', T^0 est borné faible de E donc borné de E et $T = T^{00}$ est polaire d'un borné de E (inversément, il est clair que la polaire d'un borné de E est un tonneau de E'). La topologie $\mathfrak{T}$ sur E' est ainsi la topologie forte et E_1 s'identifie à l'intersection annoncée.

Remarque: On voit ici que $E_{\mathfrak{T}}$ n'est en général pas tonnelé, par exemple $(E'_\sigma)_{\mathfrak{T}} = E'_b$ n'est pas toujours tonnelé (si E est un espace $(\mathscr{F})$ on a:
E'_b tonnelé $\Leftrightarrow E'_b$ bornologique $\Leftrightarrow E$ distingué cf. [12] p. 73)

(2.1.4) COROLLAIRE. *Si E est infratonnelé, on a l'égalité topologique*:

$$E_1 = E'' \cap \hat{E}$$

Démonstration. (E'' dénote toujours le bidual fort). En effet dans ce dernier cas $\hat{E}$ et E'' induisent sur E la bonne topologie.

(2.1.5) CRITÈRE. *E quasi-complet (resp. et infratonnlé) $\Leftrightarrow$ $E = \hat{E} \cap E''$ algébriquement (resp. et topologiquement)*

2.2 *Topologie tonnelée associée à un* elc.

(2.2.1) Rappelons la proposition suivante:
E elc., τ la topologie de Mackey $\tau(E, E')$, on a: E_τ tonnelé $\Leftrightarrow$ E'_σ quasi-complet.
(Pour la partie directe, on peut utiliser (2.1.2) et réciproquement une partie disquée

faiblement fermée bornée de E' est naturellement précompacte, donc compacte par hypothèse, d'où équicontinue par définition de la topologie de Mackey.)

(2.2.2) Soit toujours E un elc., $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}$ l'ensemble de ses tonneaux. On a vu que l'espace $E_{\mathfrak{T}_1}$ n'est pas toujours tonnelé. Cela suggère de poser $\mathfrak{T}_2 =$ ensemble des tonneaux de $E_{\mathfrak{T}_1}$ et par induction transfinie, $\forall\alpha$ ordinal:

$$\mathfrak{T}_\alpha = \begin{cases} \text{ens. des tonneaux de } E_{\mathfrak{T}_{\alpha-1}} \text{ si } \alpha \text{ a un prédécesseur} \\ \bigcup_{\xi<\alpha} \mathfrak{T}_\xi \text{ si } \alpha \text{ est ordinal limite.} \end{cases}$$

D'après (2.1.1) on a:

$$(E'_\sigma)_1 = E^* \cap (E_{\mathfrak{T}})' = E'_{\mathfrak{T}_1}$$

et de façon générale:

$$(E_{\mathfrak{T}_\alpha})' = (E'_\sigma)_\alpha$$

comme on le voit par induction transfinie (en remarquant que si α est ordinal limite, une forme linéaire $x^* \in E^*$ est dans $(E_{\mathfrak{T}_\alpha})'$ si et seulement si elle est dans la polaire d'un $T \in \mathfrak{T}_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \mathfrak{T}_\xi$ donc si et seulement si elle est déjà dans la polaire d'un $T \in \mathfrak{T}_\xi$ $(\xi < \alpha)$ ou encore lorsque $x^* \in (E_{\mathfrak{T}_\xi})'$ d'où:

$$(E_{\mathfrak{T}_\alpha})' = \bigcup_{\xi<\alpha} (E_{\mathfrak{T}_\xi})' = \bigcup_{\xi<\alpha} (E'_\sigma)_\xi = (E'_\sigma)_\alpha).$$

Si α est l'ordre de quasi-complétion de E'_σ, on a donc

$$(E'_\sigma)_\alpha = (E'_\sigma)_{\alpha+1} \Rightarrow E_{\mathfrak{T}_\alpha} \quad \text{et} \quad E_{\mathfrak{T}_{\alpha+1}} \quad \text{ont même dual}.$$

$E_{\mathfrak{T}_{\alpha+1}}$ est même *tonnelé*. En effet soit T un tonneau de $E_{\mathfrak{T}_{\alpha+1}}$, c'est aussi un tonneau de $E_{\mathfrak{T}_\alpha}$ puisque ces deux espaces ont même dual, donc par définition un voisinage de 0 de $E_{\mathfrak{T}_{\alpha+1}}$.

(Lorsque $\mathfrak{T}_\alpha$ est déjà la topologie de Mackey de la dualité

$$\langle E_{\mathfrak{T}_\alpha}, (E'_\sigma)_\alpha \rangle$$

on a déjà $E_{\mathfrak{T}_\alpha}$ tonnelé et égal à $E_{\mathfrak{T}_{\alpha+1}}$.)

Avec les notations précédentes, on pose:

DÉFINITION. *$E_{\mathfrak{T}_{\alpha+1}}$ est appelé espace tonnelé associé à E et noté ici E_t.*

(2.2.3) PROPOSITION. *E, F elc., $f: E \to F$ linéaire continue $\Rightarrow$ $\forall\alpha$ ordinal $f: E_{\mathfrak{T}_\alpha} \to F_{\mathfrak{T}_\alpha}$ continue.*

Démonstration. Clair pour $\alpha = 0$ et induction transfinie (standard).

(2.2.4) *Propriété universelle de la topologie tonnelée.*

E_t jouit d'une propriété (co)universelle duale de (1.1) et que nous signalons: $E_t \xrightarrow{i_E} E$ *est la seule application (à isomorphisme unique près) d'un tonnelé dans E jouissant de la propriété: $\forall F$ tonnelé, $f: F \to E$ linéaire continue, f se factorise univoquement par i_E en application continue.*

Démonstration. Si $F_E \xrightarrow{i} E$ a la propriété annoncée, prenant les applications linéaires de $\mathbf{K}$ dans E, on voit que i doit être un isomorphisme algébrique. (On aurait aussi pu voir la surjectivité en prenant id. $E_+ \to E$ où E_+ désigne E muni de la topologie localement convexe la plus fine, et l'application nulle $E_+ \xrightarrow{0} E$ aurait fourni l'injectivité.) Prenant ensuite $E_t \xrightarrow{\text{id}} E$ on voit que F_E est moins fin que E_t et puisque F_E est tonnelé les applications id. $F_E \to E_{\mathfrak{T}_\alpha}$ doivent être continues d'où id. $F_E \to E_t$ continue, montrant que F_E coïncide avec E_t. Le fait que id. $E_t \to E$ jouisse de la propriété résulte de (2.2.3).

Si E est un elc., on peut bien entendu appliquer à E_t tous les résultats des espaces tonnelés. Signalons en deux:

Soit $u: E_t \to F$ une application linéaire où F est du type $(\mathscr{F})$. Pour que $u: E_t \to F$ soit continue, il faut et il suffit qu'il existe une topologie (elc.) $\mathscr{T}$ sur F moins fine rendant $u: E_t \to F_{\mathscr{T}}$ continue. (cf. [10] p. 217 Ex. 2.)

Si F est un espace de Ptak et s'il existe $u: F \to E$ linéaire continue surjective, alors E_t est un espace de Ptak et u: $F \to E_t$ est un homomorphisme. (cf. [10] p. 216 Ex. 1 et [21] p. 162.)

2.3 *Complétion d'un bidual*

Ce court chapitre a pour but d'examiner la question de Bourbaki ([3] p. 96 note):

«*On ignore si, en général, le bidual E'' d'un espace localement convexe (séparé) E est complet pour la topologie forte $\beta(E'', E')$, même lorsque E est supposé tonnelé*».

Cette question est entièrement résolue par un exemple de Kōmura, ([16]); en effet il donne même un exemple d'espace de Montel (nécessairement quasi-complet puisque les fermés bornés doivent être compacts) non complet (rappelons que d'après les définitions, Montel $\Rightarrow$ réflexif $\Rightarrow$ tonnelé). Les remarques qui suivent ont été faites indépendamment de cet exemple, et fournissent une quantité de cas dans lesquels E'' est non complet.

D'après (2.1.4) on voit que si E est infratonnelé et E'' complet, alors E_1 est complet.

Ainsi tout exemple d'espace infratonnelé quasi-complet non complet fournit un exemple d'espace dont le bidual n'est pas complet. Cette remarque n'est pas très féconde car les exemples habituels d'espaces quasi-complets non complets ne sont (en général) pas infratonnelés:

E tonnelé $\Rightarrow$ E'_σ quasi-complet et E'_σ infratonnelé $\Rightarrow$ les bornés de $(E'_\sigma)'_b$ sont équicontinus $\Leftrightarrow$ les bornés de E sont équicontinus relativement à E'_σ $\Leftrightarrow$ les bornés de E sont de dimension finie. Puisque E étant tonnelé a la topologie de Mackey, cela se passe pratiquement lorsque E est somme directe de droites: espace muni de la topologie localement convexe la plus fine; dans ce cas $E'_\sigma = \prod \mathbf{K}$ est même complet.

Par contre une remarque plus productive est la suivante: Tout espace infratonnelé pour lequel E_1 n'est pas complet fournit un exemple d'espace dont le bidual n'est pas complet. Dans le cas de l'exemple (1.2.2), on remarque que E est infratonnelé:

E_b' a pour voisinages de 0 les parties de $\bigoplus_{\mathbf{N}} \mathbf{R} \times \bigoplus_{\Lambda_0} \mathbf{R}$ qui induisent un voisinage de 0 sur une première tranche dénombrable, et qui sont grossières finalement. Ainsi les bornés de E_b' sont de dimension finie (sinon on pourrait trouver une suite infinite non contenue dans une somme directe finie et construire un voisinage de 0 de E_b' n'absorbant pas cette suite) donc équicontinus, démontrant ainsi que E est infratonnelé.

Explicitement, l'élément de $\hat{E}: x=((0),(1))$ considéré comme $\tilde{x} \in E'^*$ est la forme linéaire:

$$\tilde{x}:((x_n'), f'(\lambda)) \mapsto \sum f'(\lambda)$$

(bien définie car $f'(\lambda)=0$ sauf pour un nombre fini de λ) non continue sur E_b' car tout voisinage de 0, V contient finalement un facteur $\mathbf{R}$ entier et $\tilde{x}(V)=\mathbf{R}$.

Les espaces de fonctions continues (munis de la topologie de la convergence simple) ont aussi des biduals (forts) non complets. Donnons encore quelques applications de la formule magique:

$$E_1 = E'' \cap \hat{E}.$$

(2.3.1) Proposition. *E elc. infratonnelé.*

E_b' bornologique $\Rightarrow$ $\tilde{E}=\hat{E}$: le quasi-complété est complet.

Démonstration. E_b' bornologique $\Rightarrow$ E'' complet $\Rightarrow$ $E'' \supset \hat{E} \Rightarrow E_1=\hat{E}$.

(2.3.2) Donnons quelques cas où le quasi-complété est le bidual:

Proposition. a) $\left.\begin{array}{l} E_b \textit{ semi-réflexif} \\ E'' \textit{ quasi-complet} \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{E}=E''$

b) *E_b' réflexif $\Rightarrow$ $\tilde{E}=E''$*

Démonstration. a) D'après [3] Ex. 11b p. 94 on a $E'' \subset \hat{E}_\tau \subset \hat{E}$, $E_1=E'' \Rightarrow \tilde{E}=E''$ car E'' est quasi-complet.

b) E_b' réflexif $\Leftrightarrow$ E_b' semi-réflexif et tonnelé $\Rightarrow$ E_b' semi-réflexif et E'' quasi-complet. Il suffit alors d'appliquer a). Montrons comment on déduit le résultat suivant connu (loc. cit.)

(2.3.3) Proposition. $\left.\begin{array}{l} E \textit{ elc., } E_\tau \textit{ quasi-complet} \\ E_b' \textit{ semi-réflexif} \end{array}\right\} \Rightarrow E_\tau \textit{ réflexif}$

Démonstration. E quasi-complet $\Leftrightarrow$ $E_\tau=(E_\tau)_1=E'' \cap \widehat{E_\tau}$ égalité avec les topologies car les hypothèses impliquent que E_τ est infratonnelé (et tonnelé puisque quasi-complet) donc d'après loc. cit. [3] $E_\tau=E''$ avec les topologies, ce qui équivaut à E_τ réflexif car $(E_\tau)_b'=E_b'$ et $E''=(E_\tau)''$.

2.4 *Complétion d'une limite inductive*

Rappelons d'abord qu'une limite inductive (généralisée) peut ne pas être complète, même si une suite de définition est formée d'espaces complets.

Par exemple si E et F sont $(\mathscr{F})$, $L_b^\infty(E, F)$ (espace des applications linéaires bornées muni de la topologie de la convergence bornée) est un espace $(\mathscr{L}\mathscr{F})$ (cf. [10] ou bien [11] p. 15). Si (V_n) est un système fondamental de voisinages de 0 disqués dans E, $L_b(E_{V_n}, F)$ en est une suite de définition.

Même si E et F sont des $(\mathscr{F})$ nucléaires, cet espace peut contenir un borné non semi-complet: prenons $E=F=\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $\{p_n\}$ l'ensemble des projecteurs unidimensionnels sur les axes coordonnées, qui est manifestement équicontinu, mais on ne peut pas trouver de V_m tel que tous les p_n se factorisent par $E \to E_{V_m}$ (ce dernier est toujours de dimension finie) donc $\{p_n\}$ n'est pas contenu dans un espace de définition et donc non complétant (cf. [10] Cor. 2 p. 199).

Grothendieck a posé la question dans [11] (p. 137):

« *Un espace $(\mathscr{L}\mathscr{F})$ quasi-complet est-il complet?* ».

Il semble que la réponse à cette question doive être négative (sans qu'on puisse donner de contre-exemple).

On a retrouvé dans le cas des limites de suites de Banachs que la réponse est affirmative (résultat figurant déjà dans [10] Cor. 2 p. 229 et [12] Cor. 2 p. 77). Montrons comment on peut appliquer les techniques précédentes et ne faisant pas intervenir la théorie des espaces $(\mathscr{D}\mathscr{F})$.

(2.4.1) PROPOSITION. *E elc. quasi-complet limite inductive d'une suite d'espaces de Banach. Alors E est complet.*

Démonstration. E est donc bornologique ($\Rightarrow$ infratonnelé) et tout borné de E est image d'un borné d'un espace de définition. (On peut aussi voir pour ceci [11] Cor. 1 p. 16). E admet donc un système fondamental dénombrable de bornés, d'où E'_b est métrisable et bornologique et il suffit d'appliquer (2.3.1). On obtient aussi une démonstration élémentaire de la proposition suivante (cf. [12] Cor. 2 p. 77).

(2.4.2) PROPOSITION. *E elc. $(\mathscr{D}\mathscr{F})$ infratonnelé quasi-complet. Alors E est complet.*

Démonstration. E'_b est un espace $(\mathscr{F})$ et E'' est $(\mathscr{D}\mathscr{F})$ complet donc $E=E_1=E''\cap\hat{E}$ est complet.

De façon générale, on a la proposition suivante montrant, dans le cas des $(\mathscr{L}\mathscr{F})$ (qui sont tonnelés) que si E est quasi-complet et E'' complet, alors E est complet.

(2.4.3) PROPOSITION. $\left.\begin{array}{l} E \text{ infratonnelé quasi-complet} \\ E'' \text{ complet} \end{array}\right\} \Rightarrow E \text{ complet}$

Démonstration. Comme toujours:

$$E = E_1 = E'' \cap \hat{E} = \hat{E}$$

(2.4.4) *Remarque.* Un cas dans lequel on peut affirmer qu'une limite inductive est quasi-complète est celui où les applications de transition: $v_i : E_i \to E_{i+1}$ sont compactes puisqu'alors la limite est un espace de Montel (cf. [10] Cor. 2 p. 230). C'est le cas des espaces de fonctions holomorphes sur un compact de $\mathbf{C}^n$: $\mathscr{H}(K)$. (qui sont même complets: loc. cit. p. 231 exemple b.)

2.5 *Espaces de mesures et* $\varinjlim$ *grossières*

Rappelons encore qu'une limite inductive (non stricte) n'est en général pas séparée (cf. par ex. [10] p. 195 Ex. 2).

Dans le cas où l'ensemble d'indices est non dénombrable des exemples ont été donnés par KŌMURA [16], et DOUADY [8] (limites inductives strictes). Montrons dans ce paragraphe comment on obtient facilement des limites inductives (même dénombrables) grossières. Il semble intéressant d'autre part de traduire en langage plus moderne des propriétés bien connues des espaces de mesures.

(2.5.1) FAISCEAU DES MESURES D'UN ESPACE COMPACT.

Pour toutes les définitions intervenant ici, cf. [9]. Soit X un espace compact et $\forall U$ ouvert de X posons:

$\mathscr{M}(U)$: espace vectoriel des mesures (réelles) sur U (localement compact) et pour V ouvert contenu dans U on a une application linéaire de restriction $\mathscr{M}(V) \to \mathscr{M}(U)$, les propriétés de transitivité étant satisfaites pour qu'on puisse parler du préfaisceau d'espaces vectoriels $\mathscr{M}$ sur X. En vertu du principe de localisation (cf. [4] Prop. 1, p. 65), ce préfaisceau est même un faisceau d'espaces vectoriels.

Si on munit les $\mathscr{M}(U)$ des topologies vagues correspondantes – fournissant comme dual $\mathscr{K}(U)$, espace des fonctions continues à support compact contenu dans U – les restrictions

$$\mathscr{M}(V) \to \mathscr{M}(U) \quad \text{pour} \quad V \supset U$$

sont vaguement continues comme transposées des $\mathscr{K}(V) \leftarrow \mathscr{K}(U)$ (opération de prolongement d'une fonction par 0!). On a donc un faisceau d'espaces vectoriels topologiques.

On définit de la façon habituelle les fibres du faisceau $\mathscr{M}$ comme limites inductives suivant l'ordonné filtrant décroissant des voisinages de x (voisinages ouverts), de sorte qu'on a des applications canoniques

$$\mathscr{M}(U) \to \varinjlim_{x \in U \text{ ouvert}} \mathscr{M}(U) = \mathscr{M}_x$$

et on peut munir $\mathscr{M}_x$ de la topologie $\varinjlim$ des topologies vagues.

(2.5.2) PROPOSITION.

X compact.
x non isolé $\Leftrightarrow$ $\mathscr{M}_x$ grossier.

Démonstration. La donnée d'une forme linéaire continue $f: \mathscr{M}_x \to \mathbf{R}$ équivaut à la donnée d'une famille de formes linéaires $\mathscr{M}(U) \to \mathbf{R}$ vaguement continues («compatibles»), donc de fonctions $f_U \in \mathscr{K}(U)$ telles que si $U \subset V$, f_V prolonge f_U par 0. Le support de f_V est ainsi contenu dans tout ouvert U de V contenant x. Le support de f_V est ainsi réduit au point x.

$\mathscr{M}_x$ non grossier $\Leftrightarrow$ $\exists f \neq 0 : \mathscr{M}_x \to \mathbf{R}$ linéaire continue $\Leftrightarrow$ le support d'une f_U (U ouvert, $\ni x$) n'est pas vide $\Leftrightarrow$ f_U multiple de la fonction caractéristique de $x \Leftrightarrow x$ isolé.

Dans le cas où X est métrisable, on obtient donc des limites inductives dénombrables grossières.

Signalons encore en passant quelques propriétés du faisceau $\mathscr{M}$.

(2.5.3) Le faisceau $\mathscr{M}$ n'est en général pas *flasque*, i.e. une mesure μ sur U ouvert $\subset X$ ne se prolonge pas nécessairement à X entier (il faut qu'elle soit bornée puisque X est compact; d'ailleurs ce faisceau ne serait pas flasque même si X n'avait été supposé que localement compact.)

Remarquons que toute $f \subset \mathscr{K}(X) = \mathscr{C}(X)$ définit un homomorphisme de faisceaux par:

$$\begin{aligned} h_f &: \mathscr{M} \to \mathscr{M} \\ h_f(U) &: \mathscr{M}(U) \to \mathscr{M}(U) \\ & \qquad \mu \mapsto f \cdot \mu \quad \text{(plus précisément } f|_U \cdot \mu) \end{aligned}$$

et si A et B sont deux fermés disjoints de X, il y a deux voisinages compacts de A et B respectivement qui sont encore disjoints donc une fonction $f \in \mathscr{C}(X)$ valant 0 au voisinage de A et 1 au voisinage de B; pour cette fonction f, $h_f : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ est un endomorphisme induisant 0 au voisinage de A et 1 au voisinage de B. Ceci montre que le faisceau $\mathscr{M}$ est *fin* et donc *mou* ([9] p. 157).

(Les germes de mesures sur un fermé A se définissent comme les éléments de la limite inductive: $\mathscr{M}(A) = \varinjlim \mathscr{M}(U) (U \supset A)$; on a naturellement une application linéaire de restriction $\mathscr{M}(X) \to \mathscr{M}(A)$ puisque X est un tel ouvert contenant A! Dire que $\mathscr{M}$ est mou revient à dire que $\forall A$ fermé, cette application est surjective.)

On aurait aussi pu considérer le préfaisceau des mesures bornées $\mathscr{M}^1$ et l'homomorphisme canonique injectif de préfaisceaux i: $\mathscr{M}^1 \to \mathscr{M}$

(2.5.4) PROPOSITION. *$\mathscr{M}$ est le faisceau engendré par $\mathscr{M}^1$ (ou faisceau associé à $\mathscr{M}^1$, ou encore image réciproque de $\mathscr{M}^1$ par 1_X: $X \to X$...)*

Rappel: Cette proposition signifie que $\mathscr{M}$ jouit de la propriété universelle suivante vis-à-vis de $\mathscr{M}^1$:

$\forall \mathscr{F}$ faisceau sur X, $\forall$ homomorphisme de préfaisceaux $\mathscr{M}^1 \to \mathscr{F}$, $\exists$ homomorphisme de faisceaux unique rendant le diagramme suivant commutatif:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{M}^1 \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & \mathscr{F} \\ \mathscr{M} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que toute mesure sur U (ouvert de X) peut être obtenue par recollement de mesures bornées. Soit $x \in U$, K_x un voisinage compact de

x, μ induit sur $\mathring{K}_x$ une mesure μ_x bornée car elle peut être considérée comme restriction de la restriction de μ à K_x compact. Les μ_x sont bornées et se recollent en μ.

3. Quelques propriétés des espaces nucléaires

3.1 *Espaces à dual nucléaire*

Nous examinons dans ce paragraphe des conditions qui assurent que le dual fort d'un elc. est nucléaire et parvenons à une démonstration plus intrinsèque (sans l'emploi des suites sommables) du théorème de Pietsch ([20] (4.3.1)).

On suppose ici, en plus des conventions générales, les elc. infratonnelés et complets (donc tonnelés) de sorte que la connaissance de la topologie forte sur E' permet de retrouver la topologie de E; E sera un sous-espace fermé de E'' (et semi-réflexif équivaut ici à réflexif.)

(3.1.1) Introduisons les définitions commodes suivantes:

On appelle application binucléaire une application linéaire continue qui se factorise en la composée de deux applications nucléaires (au moins) et multinucléaire une application (lin. cont.) qui se factorise en un nombre arbitrairement grand d'applications nucléaires.

Si E est nucléaire, on rappelle que toute application linéaire continue de E dans un Banach est multinucléaire.

(3.1.2) A titre indicatif signalons la propriété suivante des applications multinucléaires:

$$\left.\begin{array}{ll} u\colon E\to H & \textit{multinucléaire} \\ u(E)\subset H_1 & \textit{sous-espace fermé} \end{array}\right\} \Rightarrow u=u_1\colon E\to H_1 \ \textit{nucléaire}$$

Même idée de démonstration que dans [22] exposé 18: on considère u comme composée de 3 applications nucléaires et on factorise l'application centrale par un espace pré-hilbertien:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "v"] & F \arrow[r] \arrow[dr, "v_1"'] & G \arrow[r, "w"] & H \\ & & \mathfrak{H}_0 \arrow[u, "v_2"'] & \end{tikzcd}$$

et puisque dans $\hat{\mathfrak{H}}_0$ tous les sous-espaces fermés ont un supplémentaire topologique,

$$v_1\, v\colon E\to \overline{v_1\, v(E)}\subset \hat{\mathfrak{H}}_0 \qquad \text{est nucléaire}.$$

D'autre part wv_2 se prolonge en application $\hat{\mathfrak{H}}_0\to H$ et par compacité elle envoie $\hat{\mathfrak{H}}=\overline{v_1\, v(E)}$ dans $\overline{u(E)}$ et l'application composée

$$E\xrightarrow{v_1 v}\hat{\mathfrak{H}}\to\overline{u(E)}\to H_1$$

est nucléaire puisque $v_1\, v$ l'est.

(3.1.3) Proposition. *Les conditions suivantes sur E elc. sont équivalentes.*

a) *Toute application linéaire continue d'un Banach dans E est multinucléaire.*

b) *Toute application linéaire continue d'un Banach dans E est nucléaire.*

c) *Toute partie bornée de E est nucléaire.*

d) E'_b *est nucléaire.*

Elles impliquent E Montel (donc réflexif)

Démonstration. a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) Particularisation. (Les bornés de E sont toujours contenus dans des bornés disqués fermés donc complétants.)

c) $\Rightarrow$ d) Les bornés de E étant nucléaires sont relativement compacts, donc E est un espace de Montel. Il suffit de montrer que les applications canoniques $E'_b \to E'_V$ où V est un voisinage de 0 de E'_b – que l'on peut supposer polaire B^0 d'un borné disqué fermé de E, donc compact, faiblement fermé et $B = B^{00}$ – sont nucléaires. Par transposition, on obtient les applications canoniques:

$$E = E'' \leftarrow (E'_{B^0})' = (E'')_{B^{00}} = E_B$$

qui sont nucléaires par hypothèse.

d) $\Rightarrow$ a) $u: B \to E$ application linéaire continue d'un espace de Banach B. Sa transposée ${}^t u: B' \leftarrow E'_b$ est multinucléaire puisque E'_b est nucléaire, donc sa transposée ${}^{tt}u$ sera encore multinucléaire, d'où le résultat pour u:

$$u: B \to B'' \xrightarrow{{}^{tt}u} E'' = E$$

(3.1.4) PROPOSITION.

$$E'_b \text{ nucléaire} \Leftrightarrow \begin{cases} E \text{ réflexif et} \\ E'_b \otimes_\pi F \to \mathfrak{B}_{b,e}(E, F'_\sigma) \\ \text{isomorphisme topologique dans.} \end{cases}$$

Démonstration. (cf. [11] Chap. II déf. 4 p. 34) Il suffit de remarquer que E'_b nucléaire $\Rightarrow$ E réflexif $\Rightarrow$ $(E'_b)'_\sigma = E_\sigma$ et que $\mathfrak{B}(E_\sigma, F'_\sigma) = \mathfrak{B}(E, F'_\sigma)$. La topologie (b, e) sur $\mathfrak{B}$ est celle de la convergence uniforme sur les parties bornées du premier facteur et équicontinues du second.

(3.1.5) PROPOSITION.

$$\left.\begin{array}{l} E'_b \text{ nucléaire} \\ F \text{ Banach} \end{array}\right\} \Rightarrow E \hat{\otimes} F \to E \check{\otimes} F \text{ surjective.}$$

Démonstration. (Notations de Grothendieck [15]: $\check{\otimes}$ produit tensoriel complété de $\otimes_\varepsilon$.) D'abord E est réflexif d'où $E'_\tau = E'_b$

$$E \otimes_\varepsilon F \to \mathfrak{B}_e(E'_\sigma, F'_\sigma) = L_e(E'_\tau, F) = L_e(E'_b, F) = L_b(E'_b, F)$$

(Pour la première égalité, cf. [22] exposé 8.) et comme E et F sont complets, il en est de même de l'espace $L_e(E'_\tau, F)$ (cf. [10] p. 134). Les éléments de $E \check{\otimes} F$ définissent donc des applications $E'_b \to F$ linéaires continues. Soit $u \in E \check{\otimes} F$, $\tilde{u}: E'_b \to F$ l'application associée qui est nucléaire puisque E'_b l'est (et F Banach) donc définie par un élément d'un $(E'_b)'_A \hat{\otimes} F$. Où A équicontinu disqué fermé, donc complétant, et à fortiori par un élément de $E''\hat{\otimes}F=E\hat{\otimes}F$. C'est la surjectivité. (La démonstration est analogue à celle de [22], exposé 18, mais si E est de plus du type $(\mathscr{F})$ on conclut alors que $E\hat{\otimes}F\to E\check{\otimes}F$ est un homomorphisme topologique.)

(3.1.6) Lorsque E est de plus supposé nucléaire, on a la caractérisation suivante PIETSCH:

PROPOSITION. *Si E est nucléaire, alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) E'_b *nucléaire*

b) $\forall B$ *Banach,* $\forall u\in E\hat{\otimes}B$, $\exists A$ *borné disqué complétant de E tel que* $u\in E_A\hat{\otimes}B$.

Démonstration. a) $\Rightarrow$ b) $u\in E\hat{\otimes}B\subset L_e(E'_\tau, B)$ car E est nucléaire et comme précédemment $u:E'_\tau=E'_b\to B$ est continue donc nucléaire et $u\in(E'_b)'_A\hat{\otimes}B$ où A est équicontinu disqué fermé (donc complétant) et $u\in E_A\hat{\otimes}B$ comme dans l'énoncé.

b) $\Rightarrow$ a) E nucléaire, donc réflexif ici.

Montrons que toute application linéaire continue d'un Banach B dans E est nucléaire (3.1.3): $u:B\to E$ donnée. E étant nucléaire satisfait à la condition d'approximation ([11] Chap. I Cor. p. 170, Chap. II lemme 3 p. 37) et $u\in L(B, E)=B'\hat{\otimes}E$ (cf. [22] exposé 14, Th. 3 (B_2)), d'où $u\in E_A\hat{\otimes}B'$ par hypothèse (A comme dans l'énoncé) et $u:B\to E_A\to E$ nucléaire.

3.2 *Quelques exemples*

Donnons deux exemples d'espaces à dual nucléaire où l'on vérifie directement que le dual est nucléaire, sans passer par le critère du paragraphe précédent.

(3.2.1) PROPOSITION. *Si* $E=\varinjlim E_n$ *espace du type* $(\mathscr{L}\mathscr{F})$ *strict nucléaire, alors* E'_b *est nucléaire.*

Démonstration. Les E_n s'identifiant à des sous-espaces de E sont des $(\mathscr{F})$ nucléaires. Par transposition, on obtient les applications: $E'_n\leftarrow E'_b$ où E'_n est un espace $(\mathscr{D}\mathscr{F})$ complet nucléaire. Montrons que E'_b a la topologie initiale relative à ces applications (donc est nucléaire). Soit B un borné disqué de E, B^0 le voisinage de 0 correspondant de E'_b. Puisque B est déjà dans un E_n, la polaire de B dans E'_n est un voisinage de 0 dont l'image réciproque par $E'_n\leftarrow E'_b$ est B^0.

(3.2.2) PROPOSITION. $E(\mathscr{F})$ *séparable nucléaire,* $F(\mathscr{F})$ *nucléaire alors* $L_bE, F)$ *et son dual fort sont nucléaires. Les bornés de* $L_b(E, F)$ *sont métrisables et* $L_b(E, F)$ *est dense dans* $L_c(E, F)$ *complet.*

Démonstration. La première affirmation est classique ([11] Chap. II p. 48). La métrisabilité des parties bornées de $L_b(E, F)$ provient du fait qu'elles sont équicontinues (BANACH-STEINHAUS) et que sur les parties équicontinues, la topologie de la convergence simple sur une partie totale est équivalente à la topologie de la convergence précompacte (équivalente à la topologie (b) car E est nucléaire). (cf. [3] Prop. 5 p. 23.)

La densité de $L_b(E, F)$ découle du fait que E étant nucléaire, satisfait à la condition d'approximation et $E' \otimes F$ est donc déjà dense dans $L_c(E, F)$.

3.3 *Plongement d'un* $(\mathscr{S})$ *dans un produit de* $(\mathscr{F}\mathscr{S})$

(3.3.1) Rappelons qu'on appelle espace de Schwartz ou du type $(\mathscr{S})$ un elc. tel que toute application linéaire continue de cet espace dans un Banach est compacte, et $(\mathscr{F}\mathscr{S})$ un Fréchet Schwartz.

(On comparera avec:

E nucléaire $\Leftrightarrow$ *Toute application de E dans un Banach est nucléaire*

$E = E_{\sigma(E, E')} \Leftrightarrow$ *Toute application de E dans un Banach est de rang fini.*

d'où les implications:

E muni d'une topologie faible $\Rightarrow$ *E nucléaire* $\Rightarrow$ *E*$(\mathscr{S})$.)

Pour qu'un elc. E soit du type $(\mathscr{S})$, il suffit que $\forall V$ voisinage de 0 disqué, l'application canonique $E \to \widehat{E}_V$ soit compacte. (Pour tout ceci, cf. [12] ou [10] p. 244 et ss).

(3.3.2) Proposition. *E du type* $(\mathscr{S})$ *(resp. nucléaire) F du type* $(\mathscr{F})$ $u: E \to F$ *linéaire continue,*

alors il existe F_1 $(\mathscr{F}\,\mathscr{S})$ *(resp.* $(\mathscr{F})$ *nucléaire) et* v: $F_1 \to F$ *linéaire continue injective telle que u se factorise par v:*

$$u: E \to F_1 \to F.$$

Démonstration. En remplaçant E par $E/\ker(u)$ on se ramène au cas où u est injective. Soient (V_n) les images réciproques par u d'un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 disqués de F.

Puisque $E \to \widehat{E}_{V_0}$ est compacte (resp. nucléaire), il existe V' voisinage de 0 disqué de E tel que $\widehat{E}_{V'} \to \widehat{E}_{V_0}$ soit compacte (resp. nucléaire). Construisons de même V'' à partir de V', V''' à partir de V_1, V'''' à partir de V'', etc...

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
V_0 \arrow[dr, dash] & & V_1 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & V_2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \cdots \\
& V' & & V'' & & V''' \arrow[ur, dash] & \cdots
\end{tikzcd}$$

La topologie sur E dont un système fondamental de voisinages de 0 est donné par les homothétiques des V_n et $V^{(n)}$ (et leurs intersections finies) est métrisable et en fait un espace $(\mathscr{S})$ (resp. nucléaire).

(3.3.3) Proposition. *E du type* $(\mathscr{S})$ *(resp. nucléaire).*

Alors E est un sous-espace vectoriel topologique d'un produit de $(\mathscr{F}\mathscr{S})$ *(resp.* $(\mathscr{S})$ *nucléaires).*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente (3.3.2) aux applications canoniques $E \to \widehat{E}_V$.

Notons que cette proposition n'est nouvelle que dans le cas des espaces de Schwarz, car on sait que tout espace nucléaire est isomorphe vectoriel-topologiquement à une puissance convenable de (s) (dénombrable si métrisable) où (s) est l'espace des suites à décroissance rapide muni de sa topologie habituelle qui en fait un espace du type $(\mathscr{F})$ nucléaire.

3.4 *Appendice: Remarques sur les espaces à bornés métrisables*

Il semble que tous les espaces nucléaires dans lesquels les bornés sont métrisables ont un dual fort nucléaire. Donnons ici quelques remarques seulement sur ces espaces.

(3.4.1) PROPOSITION. *E elc. B borné disqué métrisable de E.*

Alors il existe sur E une topologie elc. éventuellement non séparée définie par un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 *et induisant sur B la topologie donnée.*

Démonstration. En effet B étant métrisable, soit (V_n) une suite de voisinages de 0 (disqués) de E telle que $(V_n \cap B)$ soit un système fondamental de voisinages de 0 de B, et soit $\mathscr{T}'$ la topologie sur E définie par le système de voisinages de 0: (V_n). La conclusion résulte du lemme de Grothendieck ([12]):

Une topologie localement convexe $\mathscr{T}'$ sur un elc. E induit sur une partie disquée A de E une topologie plus fine que celle induite par le topologie de E, $\mathscr{T}$, si et seulement si elle donne un filtre de voisinages de 0 *plus fin que $\mathscr{T}$.*

(3.4.2) COROLLAIRE. *Si E elc. admet un système fondamental dénombrable de bornés métrisables, il existe sur E une topologie métrisable moins fine que E, induisant sur les bornés la même topologie que E.*

(3.4.3) *Remarques.* 1) *Si la topologie métrisable $\mathscr{T}$ définie dans le corollaire précédent est différente de la topologie de E, il y a un borné pour $\mathscr{T}$ non borné dans E.* (En effet, si tout borné pour $\mathscr{T}$ est borné dans E, l'application $E_{\mathscr{T}} \to E$ est bornée sur tout borné donc continue puisque E est bornologique.)

2) *Un espace infratonnelé (resp. réflexif) ayant une suite fondamentale dénombrable de bornés est du type $(\mathscr{D}\mathscr{F})$ (resp. $(\mathscr{D}\mathscr{F})$ complet).*

(En effet si E est réflexif, il est le dual de son dual fort, qui sous les hypothèses de l'énoncé est métrisable.)

(3.4.4) PROPOSITION. *E nucléaire, B disque borné métrisable de E. Alors il existe F du type $(\mathscr{F})$ nucléaire et u linéaire continue $E \to F$ telle que $u|_B$ soit un homéomorphisme.*

Démonstration. D'après (3.4.1), construisons (V_n), suite fondamentale de voisinages de 0 définissant une topologie $\mathscr{T}$ (éventuellement non séparée) induisant sur B la bonne topologie. Soit N l'adhérence de 0 pour cette topologie: $u: E \to (E_{\mathscr{T}}/N)^\wedge = F$ l'application canonique (F est un espace de Fréchet). Il suffit alors d'appliquer (3.3.2).

(3.4.5) L'exemple suivant montre qu'un espace nucléaire complet dans lequel les bornés sont métrisables n'est pas nécessairement bornologique.

Soit I un ensemble non dénombrable et munissons $E = \mathbf{R}^{(I)}$ de la topologie initiale relative aux projections canoniques $\mathbf{R}^{(I)} \to \mathbf{R}^{(I_0)}$ où I_0 parcourt l'ensemble des parties dénombrables de I. E est un espace nucléaire complet comme limite projective de nucléaires complets. Dans E les bornés sont de dimension finie, puisque sur un produit dénombrable $\mathbf{R}^{(I_0)}$ la topologie est la topologie somme directe. E est donc non infratonnelé (et donc non bornologique). $E'_b = E'_\sigma$ est nucléaire.

4. Divers

4.1 *Bornés dans les métrisables*

On va examiner ici la question de Grothendieck [12] p. 119:
« *Une partie bornée du complété $\hat{E}$ d'un elc. métrisable est-elle contenue dans l'adhérence dans $\hat{E}$ d'une partie bornée de E?* »

Grothendieck lui-même avait remarqué que c'était le cas si E était supposé séparable ou du moins si le borné est séparable (cf. [10] p. 229). AMEMIYAH a donné un contre-exemple dans le cas général (cf. [18] p. 407). Montrons comment à l'aide de l'ensemble d'indices Λ défini en (1.2.1) on peut donner un contre-exemple plus simple. (cf. [6].)

(4.1.1) Soit $F = \overline{\mathscr{K}(\Lambda_{\text{discret}})} \times \overline{\prod_{\mathbf{N}} \mathbf{R}}$ où $\mathscr{K}(\Lambda)$ est l'espace de Banach des familles sur Λ tendant vers 0 (suivant le filtre des complémentaires des parties finies). F est un espace de Fréchet. E: sous-espace vectoriel métrisable engendré par les

$$(\varphi_\lambda, (a_n)) = (\varphi_\lambda, a) \quad \text{où} \quad \lambda = (\lambda_n) \in \Lambda \quad \text{et où} \quad \exists N \text{ t.q. } n \geqslant N \Rightarrow a_n = \lambda_n$$
$$E = \{ \sum_{\text{finie}} \alpha_i (\varphi_{\lambda_i}, a_i) \mid a_i = \lambda_i \quad \text{finalement}, \quad \alpha_i \in \mathbf{R},\ \lambda_i \in \Lambda \}.$$

$\hat{E} = F$. En effet, l'image par la première projection de E est $\mathscr{K}(\Lambda)$ et il est clair que E est dense dans $\mathscr{K}(\Lambda) \times \prod \mathbf{R}$ lui-même dense dans F.

(4.1.2) PROPOSITION. $B \subset E$, $\bar{B}^F \supset \{(\varphi, 0) | \varphi \in \overline{\mathscr{K}(\Lambda)}, \| \varphi \| \leqslant 1\}$ *Alors l'image de B par la projection sur $\prod \mathbf{R}$ est non bornée (donc B est non borné).*

Démonstration. On va voir que si $\bar{B} \supset \{(\varphi_\lambda, 0) \mid \lambda \in \Lambda\}$ alors la projection de B dans le produit est non bornée.

En effet si $(\varphi_\lambda, 0)$ est adhérent à B, B doit contenir un élément du type $\sum_{\text{finie}} \alpha_i (\varphi_{\lambda_i}, a_i)$, $\lambda_0 = \lambda$ (λ arbitrairement grand), $\alpha_0 > 0$. La suite $\sum \alpha_i a_i$ ayant une croissance comparable à celle de $\alpha_j \lambda_j$ où $\lambda_j = \text{Sup } \lambda_i = \text{Max } \lambda_i \geqslant \lambda_0 = \lambda$ donc par la projection indiquée, l'image de B contient une suite ayant une croissance plus rapide ou comparable à celle de $\alpha_0 \lambda$ ou λ. Ceci étant valable $\forall \lambda \in \Lambda$, cette projection est non bornée d'après le lemme de (1.2.1).

(4.1.3) KŌMURA dans [16] a utilisé indépendamment l'ensemble d'indices Λ_0 pour fournir un exemple d'espace de Fréchet non séparable dans lequel tous les bornés sont séparables. Dans sa démonstration, il semble utiliser le fait que Λ_0 est cofinal (pour la relation d'ordre partiel introduite dans $\mathscr{B}$) à l'ensemble de toutes les suites. Cela n'est pas établi et montrons comment on peut se passer de ce résultat.

Posons:

$$E = \{f : \Lambda_0 \to \mathbf{R} \mid p_n(f) = \sum |f(\lambda)| \, \lambda_n < \infty\}$$

muni des semi-normes (p_n) qui en font un espace $(\mathscr{F})$ non séparable, car il contient la partie non séparable $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_0}$. Soit alors B un borné de E, $M_n = \mathrm{Sup}\ p_n(f)(f \in B)$ donc:

$$|f(\lambda)| \cdot \lambda_n \leqslant p_n(f) \leqslant M_n \quad \forall n (\forall f \in B)$$

Choisissons $N = (N_n) \gg (M_n)$ d'où $\lambda \ll N$ $\forall \lambda$ t.q. $f(\lambda) \neq 0$. Par maximalité de Λ on voit que $f(\lambda) = 0$ $\forall \lambda \gg \lambda_0 \in \Lambda_0$ et les bornés sont donc contenus dans les sous-espaces métrisables séparables $E_{\lambda_0} = \{f \in E \mid f(\lambda) = 0 \ \forall \lambda \gg \lambda_0\}$ d'où le résultat.

4.2 *Question du complété de $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$*

(4.2.1) Le Théorème de Grothendieck ([13].) affirme que le complété de $E'_{\mathfrak{S}}$ (E elc.) est l'ensemble des applications linéaires dont les restrictions aux $A \in \mathfrak{S}$ sont continues. Il serait intéressant de connaître également le complété de $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ où E et F sont des elc.

(4.2.2) Question. *Le complété de $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ s'identifie-t-il à l'ensemble des applications linéaires $E \to F$ dont les restrictions aux $A \in \mathfrak{S}$ sont continues, espace noté* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}^{\blacksquare}(E, F)$.

La réponse est-elle affirmative lorsque F est complet? Je ne le sais que dans des cas particuliers. (L'espace candidat est manifestement complet, et le théorème de Grothendieck donne une réponse affirmative dans le cas $F = \mathbf{K}$. Nous verrons des généralisations). La question est de savoir si $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ est dense dans $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(E, F)$.

La réponse est affirmative dans les cas suivants:

(4.2.3) *Cas où $\mathfrak{S} = \{$parties finies de $E\}$*

Cas où E $(\mathscr{D}\mathscr{F})$ et F complet (cf. [10] Cor 1 et 2 p. 234)

(4.2.4) *Cas où $E = E_\tau$, $E'_{\mathfrak{S}}$ complet et F complet.*

En effet, on sait alors que $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ est complet, de plus $L_{\mathfrak{S}}(E, F) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(E, F)$ car si $u : E \to F$, $u \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(E, F)$ $\forall x' \in F'$, $\forall A \in \mathfrak{S}$, $x'u \mid_A$ continue et (Th. de Grothendieck) $\forall x' \in F'$, $x'u \in \widehat{E'_{\mathfrak{S}}} = E'_{\mathfrak{S}}$ qui implique $u : E_\sigma \to F_\sigma$ continue puis $u : E = E_\tau \to F_\tau \to F$ continue, donc $u \in L(E, F)$.

(4.2.5) *Cas où E satisfait à la propriété d'approximation et est bornologique. $L_c(E, F)$ est dense dans $L_c(E, \hat{F})$ complet* $(= \mathrm{Hom}_c(E, \hat{F})$ *d'après le raisonnement de* (4.2.4).)

Ici, E a la topologie τ puisqu'il est infratonnelé et E'_c est complet puisque E est bornologique.

$E' \otimes F$ est dense dans $E' \otimes \hat{F}$ dense dans $L_c(E, \hat{F})$ puisque E jouit de la propriété d'approximation d'où à fortiori, $L_c(E, F)$ est dense dans $L_c(E, \hat{F})$.

(4.2.6) Proposition. *E, (F_i) elc., $F = \prod F_i$.*

Si les complétés des $L_{\mathfrak{S}}(E, F_i)$ *sont les* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(E, \hat{F}_i)$*, alors le complété de* $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ *est* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(E, \hat{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(E, \prod \hat{F}_i)$.

En particulier, la réponse à (4.2.2) *est affirmative si* F *est un produit de droites.*

Démonstration. En effet, on a d'abord l'isomorphisme vectoriel topologique:

$$L_{\mathfrak{S}}(E, F) \to L_{\mathfrak{S}}(E, F_i)$$
$$f \mapsto (f_i)$$

et il ne reste plus qu'à constater: $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(E, \prod \hat{F}_i) = \prod \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(E, \hat{F}_i)$.

(4.2.7) PROPOSITION. *E, F elc., N sous-espace fermé de E admettant un supplémentaire topologique. Si le complété de* $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ *est* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(E, F)$*, celui de* $L_{\mathfrak{S}}(E, N)$ *est* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(E, N)$.

Démonstration. Soit p un projecteur continu $F \to N$. La rétraction associée $p_*: \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(E, F) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(E, N)$ est continue et envoie $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ sur $L_{\mathfrak{S}}(E, N)$, d'où la densité de $L_{\mathfrak{S}}(E, N)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(E, N)$ par l'hypothèse de densité de $L_{\mathfrak{S}}(E, F)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}}(E, F)$.

4.3 *Biduals d'espaces* $(\mathscr{L}\mathscr{F})$

Dans certains cas particuliers, on peut affirmer que le bidual d'un $(\mathscr{L}\mathscr{F})$ est limite inductive des biduals des espaces de définition. (cf. [12] question 8 p. 121 et p. 83 et ss. pour des réponses partielles.)

Par exemple dans le cas des limites inductives (non strictes) on a:

(4.3.1) PROPOSITION. $E = \varinjlim E_n$ *espace* $(\mathscr{L}\mathscr{F})$ *quasi-complet nucléaire.*

Alors E est réflexif, $= E'' = \varinjlim E_n''$

Démonstration. La nucléarité de E implique que les bornés sont précompacts donc E est même Montel (car quasi-complet); l'égalité $E_n'' = \varinjlim E_n''$ provient alors du diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} E_n & \to & E & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\ E_n'' & \to & \varinjlim E_n'' & \to & E'' = E. \end{array}$$

Le triangle étant commutatif car $\cup E_n = E$.

(4.3.2) PROPOSITION. (E_n) *suite d'espaces* $(\mathscr{F})$, $u_n: E_n \to E_{n+1}$ *linéaire continue,* $E = \lim E_n$ *quasi-complet. Si* $u_n(E_n)$ *dense dans* E_{n+1} *et si les applications canoniques* $E_n \xrightarrow{\varphi_n} E$ *sont injectives alors* $E'' = \varinjlim E_n''$.

Démonstration. L'hypothèse d'injectivité n'est pas essentielle et on peut toujours s'y ramener en remplaçant E_n par $E_n/\ker(\varphi_n)$. Il est immédiat que $\varphi_n(E_n)$ est dense dans E, donc la transposée ${}^t\varphi_n$ est injective, et par propriété universelle de E on a $E' = \cap E_n'$. Comme on l'a déjà vu dans (3.2.1) (l'hypothèse de quasi-complétion remplaçant ici l'hypothèse que E est $(\mathscr{L}\mathscr{F})$ strict: tout borné est image d'un borné d'un E_n) E'_b a la topologie initiale relativement aux ${}^t\varphi_n$, ou topologie intersection des E'_n. (E'_b est complet comme dual d'un bornologique ou comme intersection de complets, même $(\mathscr{D}\mathscr{F})$ complets). Toute forme linéaire continue sur E' provient d'une forme linéaire continue sur un E'_n (cf. [10] p. 104) donc les E''_n engendrent E''. Soit V disqué $\subset E''$ tel que ses images réciproques dans les E''_n soient des voisinages de 0 $(\forall n)$; il contient donc la polaire d'un borné $B'_n \subset E'_n$ et la polaire de V est un ensemble B' borné dans chaque E'_n. Tout voisinage de 0 de E' étant déjà voisinage de 0 dans un E'_n absorbe B', d'où B' est borné dans E' et V voisinage de 0 dans E''. Ceci montre que E'' a la topologie la plus fine rendant continues les applications:

$$E''_n \to E''.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Banach, S. *Théorie des opérations linéaires* (Warsaw 1932).

[2] Bourbaki, N. *Eléments de mathématiques*, Livre V, *Espaces vectoriels topologiques.* Chap. 1 et 2, Act. Sci. et Ind. n° 1189 (1953).

[3] ———, Chap. 3 à 5, Act. Sci. et Ind. n° 1229 (1955).

[4] ———, Livre 6, *Intégration*, 2e éd. revue et augmentée. Chap. 1 à 4, Act. Sci. et Ind. n° 1175 (1966).

[5] De La Vallée Poussin, C. *Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensemble, Classes de Baire*, 2e éd. (Gauthier-Villars, Paris, nouveau tirage 1950).

[6] Dieudonné, J. *Bounded Sets in $(\mathscr{F})$-spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. *6* (1955), 729–731.

[7] Dieudonné, J. et L. Schwartz, *La dualité dans les espaces $(\mathscr{F})$ et $(\mathscr{L}\mathscr{F})$*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) *1* (1949), 61–101 (1950).

[8] Douady, A. *Topologie induite par une topologie localement convexe limite inductive.* C. R. Acad. Sc. Paris *259* (1964), 2946–2947.

[9] Godement, R. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux* I (Paris, Hermann 1958).

[10] Grothendieck, A. *Leçons sur les espaces vectoriels topologiques*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada Universidade de Sao-Paulo, 3e éd. (Sao-Paulo 1964).

[11] ———, *Thèse: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires,* Mem. Amer. Math. Soc. n° 16 (1955).

[12] ———, *Sur les espaces $(\mathscr{F})$ et $(\mathscr{D}\mathscr{F},)$* Summa Brasil. Math., *3* (1954), 57–123.

[13] ———, *Sur la complétion du dual d'un espace vectoriel localement convexe.* C. R. Acad. Sci. Paris, *230* (1950), 605–606.

[14] ———, *Résumé des résultats dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) *4* (1952), 73–112 (1954).

[15] ———, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques,* Boletim da Sociedada de Mat. de Sao-Paulo *8*, fasc. 1 et 2 (1953), 1–79.

[16] Kōmura, Y. *Some examples on linear topological spaces,* Math. Ann., *153* (1964), 150–162.

[17] Kōmura, T. et Y. Kōmura. *Über die Einbettung der nuklearen Räume in $(s)^A$*, Math. Ann. *162* (1966) 284–288.

[18] Köthe, G. *Topologische lineare Räume* I, Springer (Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960).

[19] Kuratowski, C. *Topologie*, vol. 1 et 2 (Warzawa 1958 et 1961).

[20] Pietsch, A. *Nukleare localkonvexe Räume* (Berlin 1965).

[21] Schaefer, H. H. *Topological Vector Spaces,* Macmillan (New-York 1966).

[22] Schwartz, L. *Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires. Applications.* Sém. Schwartz (Paris, Année 1953/54).

Reçu le 20 janvier 1967