

# Über den Defekt simplizialer Abbildungen von Mannigfaltigkeiten.

Autor(en): **Olivier, Reinhard**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **42 (1967)**

PDF erstellt am: **28.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-32130>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Über den Defekt simplizialer Abbildungen von Mannigfaltigkeiten

VON REINHARD OLIVIER, Bonn

## 0. Einleitung

Die klassische Hurwitzformel lautet so:

Sind  $X, Y$  geschlossene, orientierte Flächen und  $f: X \rightarrow Y$  eine offene Abbildung mit den Verzweigungspunkten  $p_1, \dots, p_k$  der Ordnung  $m_1 + 1, \dots, m_k + 1$ , und mit dem Grade  $d > 0$ , so gilt

$$\chi(X) = d \chi(Y) - \sum_1^k m_i. \quad (1)$$

Die Punkte  $f(p_i)$  sind gerade diejenigen Punkte in  $Y$ , die weniger als  $d$  Urbildpunkte besitzen.

Definiert man in  $Y$  die Funktion  $\delta: Y \rightarrow \mathbb{Z}$  durch

$$\delta(y) = d - \{\text{Anzahl der Punkte in } f^{-1}(y)\}$$

so lässt sich Formel (1) auch schreiben

$$\sum_{p \in Y} \delta(p) = d \cdot \chi(Y) - \chi(X) \quad (2)$$

Bezeichnet man  $\delta(p)$  als den Defekt von  $p$ , so kann man die linke Seite von (2) als Gesamtdefekt der Abbildung betrachten, und erhält damit zugleich eine Aussage über seine Grösse.

Die Funktion  $\delta$  lässt sich für jede Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  orientierter kompakter  $m$ -Mannigfaltigkeiten ohne Rand, mit dem Grade  $d$ , definieren. (Dabei ist der Wert  $-\infty$  zugelassen). Die Punktmenge

$$\Delta(f) = \Delta = \{p \in Y \mid \delta(p) > 0\}$$

nennen wir Defektmenge und ihre Elemente Defektpunkte, die Zahl  $\delta(p)$  den Defekt von  $p$ .

Von H. HOPF [4] stammt das Problem, über die topologischen Eigenschaften von  $\Delta$  Aussagen zu machen, in Abhängigkeit von  $X, Y$  und der Homotopieklasse von  $f$ , insbesondere über die mögliche „Grösse“ von  $\Delta$ , und darunter lässt sich speziell die  $(m-2)$ -te Bettische Zahl verstehen, denn  $\Delta$  enthält keinen  $(m-1)$ -dim. Zyklus und hat im allgemeinen gerade die Dimension  $m-2$ .

Formel (1), bzw. (2) stellt einen Beitrag zur Lösung dieses Problems dar. HOPF selbst hat in [4] zwei weitere Beiträge geliefert.

(a) Sind  $X$  und  $Y$  2-dim.,  $f$  stetig, so gilt

$$\sum_{p \in \Delta} \delta(p) \leq d \cdot \chi(Y) - \chi(X) \quad (3)$$

(b) Es sei  $\Delta^1 = \{p \in \Delta \mid \delta(p) = d - 1\}$  die Menge der Punkte mit maximalem Defekt,  $\tilde{\Delta}^1$  abgeschlossen und echt in  $\Delta^1$  enthalten, sowie  $d$  teilerfremd zu den 1-dim. Torsionszahlen von  $X$ . Dann gilt ( $b_i$  die  $i$ -te Bettische Zahl):

$$b_{m-2}(\tilde{\Delta}^1) \leq b_1(X) - b_1(Y) + b_2(Y) \quad (4a)$$

$$b_{m-2}(\Delta^1) \leq 1 + b_1(X) - b_1(Y) + b_2(Y) \quad (4b)$$

4b ist eine Folgerung aus 4a. Die Voraussetzung über die Torsionszahlen ist insbesondere erfüllt, wenn  $X$  eine Sphäre ist.

Ausser den Arbeiten [3], [6], [7], die im folgenden nicht benutzt werden, sind mir keine weiteren Ergebnisse in dieser Hinsicht bekannt.

In der vorliegenden Arbeit werden nur offene simpliziale Abbildungen betrachtet und in der Hauptsache zwei Sätze bewiesen.

**SATZ 1:** *Zu jeder natürlichen Zahl  $k$  gibt es eine Abbildung  $f_k: S^3 \rightarrow S^3$  vom Grade 3, deren Defekt- und Windungsmenge aus genau  $2k+2$  disjunkten Kreisen besteht.  $f_k$  lässt sich so wählen, dass unter diesen Kreisen Knoten auftreten.*

Zum Begriff der Windungsmenge siehe 1.1.

Analoge Beispiele lassen sich für höhere Dimensionen finden. Das zeigt insbesondere, dass eine generelle Abschätzung analog 4b für  $\Delta$  statt  $\Delta^1$  nicht existiert.

In der Arbeit [2] finden sich ähnliche Beispiele, die jedoch anders gewonnen werden, und mir zur Zeit der Niederschrift nicht bekannt waren. Das in [2] angegebene Beispiel für einen Knoten in der Windungsmenge ist mir nicht klar geworden.

Die Kreise der Menge  $\Delta$  in Satz 1 sind zyklisch miteinander verschlungen, ihre Urbildkreise jedoch paarweise unverschlungen. Der folgende Satz zeigt, dass man für weitergehende Untersuchungen eine Art von Verschlingung oder Verknotung berücksichtigen muss.

**SATZ 2:**  *$f: S^m \rightarrow \tilde{S}^m$ ,  $m > 2$ , sei eine offene simpliziale Abbildung mit dem Grade  $d > 0$ . Es sei  $\Delta = \tilde{S}_1 \cup \dots \cup \tilde{S}_k$  disjunkte Vereinigung von Sphären.  $\tilde{S}_i$  berande die Zelle  $\tilde{E}_i$ , Unterkomplex von  $\tilde{S}^m$ , so dass  $\tilde{E}_i \cap \Delta = \tilde{S}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Es sei weiter  $\delta$  stetig auf  $\Delta$  und  $\delta(\tilde{S}_i) = \delta_i$ .*

*Es sei  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_j$  disjunkte Vereinigung und  $\gamma(\Gamma_i) = \gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, j$ . Dann gilt*

$$d = 1 - j + \sum_1^j \gamma_i = 1 + \sum_1^k \delta_i \quad (5)$$

Nicht erklärte Bezeichnungen siehe 1.1.

Der Rest der Arbeit enthält noch einige weitere Beispiele, sowie einige Untersuchungen über geometrische Eigenschaften des Defektes.

Herr Prof. H. HOPF in Zürich hat die Anregung zu dieser Arbeit gegeben und sich häufig mit mir darüber unterhalten, und ich möchte ihm auch an dieser Stelle herzlich dafür danken.

## 1. Vorbereitungen

1.1.  $X$  und  $Y$  seien kompakte kombinatorische Mannigfaltigkeiten ohne Rand, orientiert, von der Dimension  $m$ ,  $f: X \rightarrow Y$  eine offene simpliziale Abbildung,  $d$  der Grad von  $f$ . Die Aussagen sind nicht leer nur für  $d > 1$ .  $\delta: Y \rightarrow Z$  und  $\Delta \subset Y$  sei wie in der Einleitung erklärt. Zusätzlich definieren wir  $\gamma: X \rightarrow Z$  durch

$$\gamma(x) = \text{lokaler Grad von } f \text{ in } x$$

wir nennen  $\gamma(x)$  auch Ordnung von  $x$ .

Es sei  $\Gamma(f) = \Gamma = \{x \in X \mid \gamma(x) > 1\}$ , die „Windungsmenge“. Ist  $\gamma|_{\Gamma}$  stetig, so setzen wir auch für eine Zusammenhangskomponente  $\Gamma_1$  von  $\Gamma: \gamma(\Gamma_1) = \gamma(x)$ ,  $x \in \Gamma_1$ , entsprechend für  $\delta$ .

Ist  $M \subset X$ , bzw.  $N \subset Y$ , so sei  $\Gamma_M = \Gamma \cap M$ ,  $\Delta_N = \Delta \cap N$ .

1.2. Es sei  $p \in \Gamma$ . Als Standard-Umgebung von  $p$  bezeichnen wir eine abgeschlossene Umgebung  $U$  mit den Eigenschaften: (i)  $U$  liegt im offenen Stern von  $p$ . (ii)  $U$  ist eine kombinatorische Zelle (und damit  $U^\circ$  in kanonischer Weise eine kombinatorische  $S^{m-1}$ ) (iii)  $f(U)$  ist eine kombinatorische Zelle  $V$  in  $Y$  und (iv)  $f|_{U^\circ}$  ist offen und simplizial. Solche Umgebungen existieren nach den Voraussetzungen über  $X$ ,  $Y$ ,  $f$ .  $V$  heisst sodann Standard-Umgebung von  $f(p)$ .

Ist  $U$  eine Standard-Umgebung, so gilt  $\Gamma(f|_{U^\circ}) = \Gamma_{U^\circ}$ .

$\gamma(p)$  ist der Grad von  $f|_{U^\circ}$ .

1.3. Es ist  $f(\Gamma) = \Delta$ , wie sich aus der Definition leicht ergibt. Ist  $Y$  eine Sphäre der Dimension  $> 1$ , und ist  $d > 1$ , so ist  $\Gamma \neq \emptyset$ , weil  $Y$  einfach-zusammenhängend ist.

Weil  $f$  simplizial ist, ist  $\Gamma$  und  $\Delta$  ein Unterkomplex von  $X$  resp.  $Y$ . Durch Induktion nach der Dimension  $m$  von  $X$ , beweist man folgende Eigenschaften.

(i)  $\dim \Gamma = \dim \Delta = m - 2$ , oder  $\Gamma = \Delta = \emptyset$ .

(ii) Jedes  $(m - 3)$ -Simplex von  $\Gamma$  resp.  $\Delta$  liegt in wenigstens zwei  $(m - 2)$ -Simplex von  $\Gamma$  resp.  $\Delta$ .

Zum Beweiss kann man Standard-Umgebungen benutzen, sowie die Tatsache, dass für eine Abbildung  $f: S^2 \rightarrow S^2$  nach der Hurwitzformel (1)  $\Gamma$  und  $\Delta$  wenigstens zwei Punkte enthält.

**HILFSSATZ:** Ist  $\delta|_{\Delta}$  stetig, so ist  $\gamma|_{\Gamma}$  stetig und  $f|_{\Gamma} \rightarrow \Delta$  eine lokal-topologische Abbildung.

*Beweis.*  $\Delta_1$  sei eine Zusammenhangskomponente von  $\Delta$ . Es sei  $q \in \Delta_1$  und  $p \in f^{-1}(q)$ .



$U$  sei eine Standard-Umgebung von  $p$  und  $q' \in \Delta_V$ . Dann ist  $q' \in \Delta_1$ , weil  $\Delta$  ein Unterkomplex von  $Y$  ist.  $q'$  besitzt einen Urbildpunkt  $p'$  in  $U'$ . Das gilt für jeden Punkt  $p \in f^{-1}(q)$  und eine Standard-Umgebung. Daher hat  $q'$  wenigstens soviele Urbildpunkte wie  $q$ . Weil aber  $\delta$  auf  $\Delta_1$  konstant ist, besitzt  $q'$  genausoviele Urbildpunkte wie  $q$ , und es ist  $f^{-1}(q') \cap U' = p'$ . Daher ist  $\gamma(p') = \text{Grad } f|_{U'} = \gamma(p)$ , d.h.  $\gamma$  lokal konstant.  $\Gamma_U$  ist homöomorph zu  $\Delta_V$ , wenn  $\Gamma_U \neq \emptyset$ , d.h.  $f|_{\Gamma}$  ist lokal-topologisch.

## 2. Beispiele und Abschätzungen für die Defektmenge

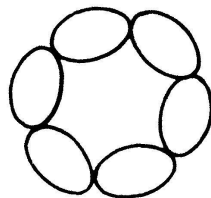
2.1. Es ist einfach zu sehen, dass  $\Delta$  und  $\Gamma$  keine Mannigfaltigkeit zu sein braucht, und dass  $\delta|_{\Delta}$  und  $\gamma|_{\Gamma}$  nicht stetig zu sein braucht. (i) Es sei dafür  $\xi: C \rightarrow C$  die durch  $z^3$  vermittelte Abbildung. Diese Abbildung lässt sich durch eine offene Homotopie (d.h. eine, bei der jede Zwischenabbildung offen ist) in eine Abbildung mit zwei Windungspunkten der Ordnung zwei überführen. Dafür genügt es, das Polynom  $z^3$  stetig in ein Polynom  $z^3 + az^2 + bz$  zu deformieren. Das letztere vermittelt im allgemeinen eine Abbildung mit zwei Windungspunkten, weil es im allgemeinen gerade zwei Werte  $x \in C$  gibt, so dass die Gleichung  $z^3 + az^2 + bz - x = 0$  eine Doppellösung aufweist.

(ii) Eine Abbildung  $f: S^2 \rightarrow S^2$  vom Grade drei mit genau zwei Windungspunkten lässt sich daher in eine Abbildung  $g$  deformieren mit einem Windungspunkt der Ordnung drei und zweien der Ordnung zwei. Man darf  $g$  als simplizial annehmen.

(iii) Die Einhängung von  $g$  ist eine Abbildung vom Grade drei, deren Defekt- und Windungsmenge der Doppelkegel über  $\Delta(g)$  resp.  $\Gamma(g)$  ist, und das ist keine Mannigfaltigkeit.  $\gamma|_{\Gamma}$  und  $\delta|_{\Delta}$  sind nicht konstant.

2.2. Es sei  $\xi: C \rightarrow C$  wie in 2.1 (i) und  $f: S^3 \rightarrow S^3$  die zweifache Einhängung von  $\xi|_{S^1}$ .  $\Gamma(f)$  besteht aus einem Kreis.  $k$  sei eine natürliche Zahl  $> 1$ . Durch eine Deformation von  $f$  in der Nähe von  $\Gamma$ , entsprechend der Deformation von  $\xi$  in 2.1 (i) lässt sich eine Abbildung  $g$  erhalten, deren Windungs- und Defektmenge  $k-1$ -dim. Zyklen enthält und zusammenhängend ist. (Figur 1)

$\gamma|_{\Gamma(g)}$  und  $\delta|_{\Delta(g)}$  ist nicht stetig.



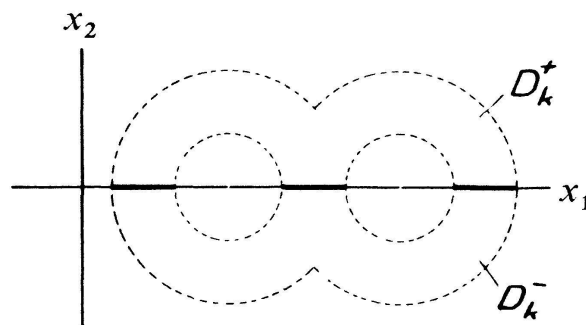
Figur 1

2.3. Beweis von Satz 1. (i)  $x_1, x_2, x_3$  seien Koordinaten in  $E^3$ . Es sei  $E_{i,k} = (x_i, x_k)$ -Ebene. In  $E_{1,2}$  seien  $k$  Kreise gewählt, jeder symmetrisch zur  $x_1$ -Achse, in linearer

Anordnung, so dass jeder mit dem folgenden genau einen Punkt gemeinsam hat.

Eine abgeschlossene sphärische  $\varepsilon$ -Umgebung  $H_k$  für genügend kleines  $\varepsilon > 0$  ist ein dreidimensionaler Henkel und sein Rand eine Fläche  $F_k$  vom Geschlecht  $k$ . Als Äquator von  $F_k$  bezeichnen wir  $E_{1,2} \cap F_k$ , er besteht aus  $k+1$  disjunkten Sphären. Mit  $D_k^+$  resp.  $D_k^-$  bezeichnen wir den Durchschnitt von  $H_k$  mit der Halbebene in  $E_{1,2}$  für  $x_2 \geq 0$  resp.  $x_2 \leq 0$ , es sind 2-Zellen (Figur 2 für  $k=2$ ).  $H_k \cap E_{1,3}$  besteht aus  $k+1$  disjunkten Kreisscheiben, wir bezeichnen sie mit  $C_1, \dots, C_{k+1}$ .  $H_k - (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{k+1})$  zerfällt in zwei Komponenten, deren abgeschlossene Hülle jeweils eine 3-Zelle ist.

$U$  sei eine zu  $H_k$  homöomorphe abgeschlossene sphärische Umgebung von  $H_k$ .  $U \cap E_{1,3}$  besteht ebenfalls aus  $k+1$  disjunkten Kreisscheiben  $C_1^\wedge, \dots, C_{k+1}^\wedge$ , mit  $C_i \subset C_i^\wedge$ .



Figur 2

(ii)  $\alpha$  sei die senkrechte Projektion, parallel zu  $x_3$ , von  $F_k$  auf  $E_{1,2}$ . Es ist  $\alpha(F_k) = D_k^+ \cup D_k^-$ .

Es gibt eine Abbildung  $\varphi: \overline{U - H_k} \rightarrow U$ , mit  $\varphi|_{F_k} = \alpha$ ,  $\varphi|_{U'} = Id$ , und so dass  $\varphi$  eine Homöomorphie von  $U - H_k$  auf  $U - (D_k^+ \cup D_k^-)$  ist.

(iii) Weiter werde eine Abbildung  $\beta: C_i \rightarrow C_i^\wedge$  angegeben.

Dazu sei  $K_1 = \{y_1^2 + y_2^2 \leq 1\}$ ,  $K_2 = \{y_1^2 + y_2^2 \leq \frac{1}{2}\}$ , es ist  $K_2 \subset K_1$ .  $K_3 = \{z_1^2 + z_2^2 \leq 2\}$ , in Koordinaten  $y_1, y_2, z_1, z_2$ .

Es sei  $I = \{z_2 = 0, -1 \leq z_1 \leq 1\}$ ,  $I \subset K_3$ .

Weiter sei

$\kappa: K_2 \rightarrow K_3$  eine topologische Abbildung

$\kappa: (y_1, y_2) \rightarrow (y_1, 0) \in I$ , für  $(y_1, y_2) \in K_1$

$\kappa: [-1, -\frac{1}{2}] \rightarrow [-1, -2] \subset K_3$  für  $[-1, -\frac{1}{2}] \subset K_1$  } affin

$\kappa: [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow [2, 1] \subset K_3$  für  $[\frac{1}{2}, 1] \subset K_1$

$\kappa: K_1 - K_2 \rightarrow K_3 - I$  eine topologische Abbildung, stetig anschliessend an das schon definierte.

Durch Identifizierung von  $K_1$  mit  $C_i$  und  $K_3$  mit  $C_i^\wedge$  erhält man so durch  $\kappa$  eine Abbildung  $\beta: C_i \rightarrow C_i^\wedge$ . Das Bild von  $K_2$  in  $C_i$  unter dieser Identifizierung werde mit  $S_i$  bezeichnet.

(iv) Es sei  $\psi: U \rightarrow S^3$  eine Homöomorphie auf eine Untermenge von  $S^3$ .

Wir betrachten die folgende Abbildung  $f_k: S^3 \rightarrow S^3$ .

$$f_k|S^3 - \psi(U) = Id$$

$$f_k|\overline{\psi(U - H_k)} = \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$$

$$f_k|\psi(C_i) = \psi \circ \beta \circ \psi^{-1}, \quad i = 1, \dots, k + 1$$

$f_k$  ist noch zu erklären auf  $\psi[(H_k - (C_1 \cup \dots \cup C_{k+1}))^0]$ .

Dies besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten, jede eine offene drei-Zelle  $Z_1$  resp.  $Z_2 \cdot Z_1$  resp.  $Z_2$  wird durch  $f_k$  auf  $\psi(D_k^+ \cup C_1^+ \cup \dots \cup C_{k+1}^+)$  resp.  $\psi(D_k^- \cup C_1^+ \cup \dots \cup C_{k+1}^+)$  abgebildet, wie schon definiert.

Das Komplement in  $S^3$  ist jeweils eine offene 3-Zelle, und  $f_k$  bilde  $Z_1$  resp.  $Z_2$  homöomorph darauf ab, verträglich mit der Randabbildung. Man sieht leicht, dass das auch so möglich ist, dass  $f_k$  insgesamt eine offene Abbildung ist, die dann den Grad 3 besitzt. Man kann sie als simplizial annehmen.

(v) Nach Konstruktion besteht  $\Gamma(f_k)$  genau aus  $\psi(\text{Aequator}) \cup \psi(S_1 \cup \dots \cup S_{k+1})$ , das sind  $2k+2$  disjunkte Kreise.

$\Delta(f_k)$  besteht genau aus  $\psi(\text{Aequator}) \cup \psi(C_1^+ \cup \dots \cup C_{k+1}^+)$ , das sind ebenfalls  $2k+2$  disjunkte Kreise.

(vi) Unter Hinsicht auf Satz 2 sei betont, dass in  $\Gamma$  je zwei Kreise unverschlungen sind, die Kreise in  $\Delta$  aber in zyklischer Reihenfolge miteinander verschlungen sind.

(vii) Wählt man den Homöomorphismus  $\psi$  so, dass ein Aequatorkreis auf einen Knoten abgebildet wird, so erhält man in  $\Gamma$  und  $\Delta$  einen Knoten.

2.4. *Bemerkung* (Analoge Konstruktion bei höherer Dimension). Analog zur Konstruktion von 2.3 lassen sich für  $m > 3$  Abbildungen  $f_k: S^m \rightarrow S^m$  vom Grade 3 definieren, deren Defekt- und Windungsmenge aus  $k+2$  disjunkten Mannigfaltigkeiten, darunter  $k+1$   $(m-2)$ -Sphären besteht. Als Henkel  $H_k$  wählt man für ein Kreissystem wie in 2.3 (i) eine sphärische Umgebung in  $E^m$  statt  $E^3$ .  $\alpha$  ist sodann die Projektion auf die  $(x_1, \dots, x_{m-1})$ -Ebene parallel zu  $x_m$ . Der Aequator von  $F_k = H_k$  ist in diesem Fall zusammenhängend (daher die kleinere Zahl von Komponenten in  $\Delta$  und  $\Gamma$ ).

Speziell für  $m=4$  ist der Aequator von  $F_k$  eine orientierbare geschlossene Fläche vom Geschlecht  $k$ . Daher gibt es zu jedem  $k > 0$  eine simpliziale offene Abbildung  $S^4 \rightarrow S^4$ , vom Grade 3, deren Defekt- und Windungsmenge eine geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht  $k$  enthält.

2.5. *Beweis von Satz 2.* (i) Nach Hilfssatz 1.4 ist  $\Gamma$  disjunkte Vereinigung  $S_1 \cup \dots \cup S_j$  von Sphären. Es sei  $f(S_1) = \tilde{S}_1$ .

Wir werden den Beweis durch Induktion nach dem Grad führen, indem wir in  $S^m$  zwei  $m$ -Zellen angeben, die jeweils auf  $\tilde{S}^m$  abgebildet werden.

(ii) Es gibt in  $S^m$  zwei abgeschlossene  $(m-1)$ -Zellen  $E, F$  mit folgenden Eigenschaften:

$$E \cap F = S_1, \quad f|E \text{ und } f|F \text{ ist eine topologische Abbildung auf } \tilde{E}_1.$$

Um das einzusehen, wählen wir in der offenen Sternumgebung  $W$  von  $S_1$  ( $S^m$  ist

simplizial) zwei verschiedene Punkte  $p, q$  mit  $f(p)=f(q)$ .  $S^m - f^{-1}(\Delta)$  ist eine unverzweigte Überlagerung von  $\tilde{S}^m - \Delta$ .

$\tilde{E}_1^0 (= \tilde{E}_1 - \tilde{S}_1)$  ist einfach zusammenhängend, daher gibt es eine Untermenge  $D \subset S^m - f^{-1}(\Delta)$ , die  $p$  enthält und durch  $f$  topologisch auf  $\tilde{E}_1^0$  abgebildet wird.  $\bar{D}$  ist ein Unterkomplex von  $S^m$ . Aus Stetigkeitsgründen ist  $f(D) \subset \tilde{S}_1$ . Weil  $W \cap f^{-1}(\tilde{S}_1) = S_1$  und weil  $p \in D \cap W$ , ist dann auch  $D \subset S_1$ , und infolgedessen  $D = S_1$ .  $f|_{\bar{D}}$  ist topologisch. Mit  $q$  statt  $p$  erhält man durch die gleiche Konstruktion eine weitere abgeschlossene Zelle, diese beiden nennen wir  $E$  und  $F$ . Weil  $f$  lokal-topologisch in  $S^m - f^{-1}(\Delta)$ , ist  $E \cap F = S_1$ .

(Ist  $m=3$ , so werden die 1-Sphären in  $\Gamma$  also topologisch auf die von  $\Delta$  abgebildet.)

(iii)  $E \cup F$  berandet zwei  $m$ -Zellen  $M_1$  und  $M_2$  (s. [1], die Verwendung des Schönfliess-Theorems lässt sich umgehen, vereinfacht aber den Beweis) mit  $M_1 \cup M_2 = S^m$ . Identifiziert man Punkte von  $E \cup F$ , wenn sie gleiches Bild unter  $f$  besitzen, so erhält man zwei Sphären  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$ , auf denen  $f$  eine offene simpliziale Abbildung  $f_1$ , resp.  $f_2$  auf  $\tilde{S}^m$  induziert. Wegen  $\tilde{E}_1 \cap \Delta = \tilde{S}_1$  ist  $(E \cup F) \cap \Gamma = S_1$ , und jede Komponente  $S_i$  von  $\Gamma - S_1$  liegt entweder in  $\Sigma_1$  oder in  $\Sigma_2$ , mit dem gleichen lokalen Grad  $\gamma_i$  wie für  $f$ .  $f_1$  und  $f_2$  erfüllen daher die Voraussetzungen des Satzes.

(iv) Wir beweisen die behauptete Formel durch Induktion nach  $d$ . Sie ist richtig für  $d=1$ .

Es sei  $d_i = \text{Grad}(f_i)$ ,  $i=1, 2$ . Offenbar ist  $d_1 + d_2 = d$ .

Es sei  $\gamma'_1$  der lokale Grad von  $f_1$  in  $S_1$ ,  $\gamma''_1$  der lokale Grad von  $f_2$  in  $S_1$ , es ist  $\gamma'_1 + \gamma''_1 = \gamma_1$ .

Dann ist nach Induktionsvoraussetzung, bei geeigneter Numerierung der Komponenten von  $\Gamma - S_1$ , mit  $j_1 + j_2 = j + 1$

$$\begin{aligned} d = d_1 + d_2 &= 1 - j_1 + \gamma'_1 + \sum_{i=2}^{j_1} \gamma_i \\ &\quad + 1 - j_2 + \gamma''_1 + \sum_{i=j_1+1}^j \gamma_i \\ &= 1 - j + \sum_1^j \gamma_i \end{aligned}$$

Dies ist der erste Teil der Gleichung. Der zweite ergibt sich aus der folgenden Bemerkung.

Ist  $\Delta_r$  eine Komponente von  $\Delta$  und  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_s = \Gamma \cap f^{-1}(\Delta_r)$ , so ist

$$\delta(\Delta_r) = \left( \sum_1^s \gamma_i \right) - s.$$

**2.6 KOROLLAR:**  $f: S^m \rightarrow S^m$ ,  $m \geq 2$  sei offen und simplizial.  $\Delta$  sei eine Sphäre, die eine Zelle berandet. Dann besteht  $\Delta$  aus Punkten maximalen Defektes.

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Induktion nach  $m$  und Anwendung von Satz 2.

Für  $m=2$  folgt er aus der Hurwitz-Formel (2), weil ein Punkt höchstens den Defekt  $d-1$  besitzen kann.

Es sei  $m>2$ ,  $q \in \Delta$ ,  $p \in f^{-1}(q) \cap \Gamma$ ,  $U$  Standard-Umgebung von  $p$ ,  $V=f(U)$ . Sicher ist  $\Delta(f|U^*) \subset \Delta_V$ , weil aber  $\Delta_V$  eine Sphäre ist, und  $\Delta(f|U^*)$  abgeschlossener Unterkomplex davon, folgt aus 1.3 (ii) auch  $\Delta(f|U^*) = \Delta_V$ .

Es sei  $E$  die von  $\Delta$  berandete Zelle.  $V^* \cap E$  ist ebenfalls eine Zelle ( $V$  ist Standard-Umgebung) und hat als Rand  $\Delta_V$ . Daher erfüllt  $f|U^*$  die Induktionsvoraussetzung.

$\Delta_V$  besteht also aus Punkten maximalen Defektes bzgl.  $f|U^*$ . D.h. der Defekt ist gleich  $\gamma(p)-1$ , daher ist der Defekt stetig in  $V$ , und also überhaupt auf  $\Delta$ .

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt, mit  $k=1$ , und aus Formel (5) folgt:  $\delta_1$  ist maximal.

**Bemerkung.** Ob ein entsprechender Satz für  $\Gamma$  gilt, weiss ich nicht.

2.7. Enthält  $\Delta$  als eine Komponente eine Sphäre  $S$ , die eine Zelle  $E$  berandet mit  $E \cap \Delta = S$ , so folgt aus 2.6, dass  $\delta$  auf  $S$  stetig ist. Dann ist  $f^{-1}(S) \cap \Gamma$  eine disjunkte Vereinigung von Sphären, die lokal-topologisch auf  $S$  abgebildet werden (1.4). Die Beweismethode von 2.5 lässt sich daher anwenden. Durch Induktion erhält man die Aussage

**KOROLLAR:** Enthält  $\Delta$  als Komponenten die Sphären  $S_1, \dots, S_k$ , und berandet  $S_i$  eine Zelle  $E_i$  mit  $E_i \cap \Delta = S_i$ ,  $i=1, \dots, k$ , so ist  $\delta|S_1 \cup \dots \cup S_k$  stetig und

$$d \geq 1 + \sum_1^k \delta_i.$$

Die Zahl der in diesem Sinne mit  $\Delta$  unverknoteten Sphären von  $\Delta$  ist also durch den Grad der Abbildung beschränkt. Auch das zeigt, dass in einer allgemeinen Aussage über die Grösse der Defektmenge die Verknötung eine Rolle spielen muss.

2.8. Für Abbildungen  $S^3 \rightarrow S^3$  lässt sich noch ein Spezialfall untersuchen. Wir bemerken vorher, dass, wenn der Defekt als Komponente einen Kreis enthält,  $\delta$  auf diesem Kreis konstant ist. Das folgt unter Benutzung von Standard-Umgebungen sofort aus der Hurwitz-Formel. Auf dem Urbild dieses Kreises ist daher  $\gamma$  stetig (1.4).

**SATZ:**  $f: S^3 \rightarrow \tilde{S}^3$  sei offen, simplizial und vom Grade  $d$ .  $\Delta$  enthalte die unverknoteten disjunkten Kreise  $\tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_k$ .  $f^{-1}(\tilde{S}_i)$  sei ein unverknoteter Kreis  $S_i$ ,  $i=1, \dots, k$ . Es sei  $\gamma(S_i) = \gamma_i$ . Dann gilt

$$d \geq \prod_1^k \gamma_i.$$

Der Beweis erfolgt durch Induktion nach dem Grad. Für  $d=1$  ist die Aussage richtig. Es sei  $d>1$ . Man entferne aus  $S^3$  die Sphäre  $S_1$  und aus  $\tilde{S}^3$  das Bild  $\tilde{S}_1$ . Da die Kreise unverknotet sind, ist die Fundamentalgruppe von  $\tilde{S}^3 - \tilde{S}_1$  und von  $S^3 - S_1$  zyklisch und ein erzeugendes Element der Fundamentalgruppe wird auf das  $\gamma_1$ -fache

abgebildet.  $f|S^3 - S_1$  lässt sich daher über eine  $\gamma_1$ -fache unverzweigte Überlagerung  $Y^\wedge$  von  $\tilde{S}^3 - \tilde{S}_1$  faktorisieren (s. [5], S. 278) und es sei  $f = h \circ f^\wedge$ . Die Abbildung  $f^\wedge|S^3 - S_1$  lässt sich vervollständigen zu einer Abbildung  $f^\wedge|S^3$ , indem man  $Y^\wedge$  mit einer Kreislinie in offensichtlicher Weise komplettiert. Das ist möglich, da  $h$  eine endliche Überlagerungsabbildung ist. Die aus  $Y^\wedge$  durch diese Komplettierung entstehende Mannigfaltigkeit ist wieder eine 3-Sphäre  $S^\wedge$ , bei der jedoch  $\tilde{S}_1$  nicht mehr im Defekt auftritt, der übrige Defekt ist unverändert. Es ist  $d = \text{Grad}(f^\wedge) \cdot \gamma_1 \cdot f^\wedge$  genügt den Voraussetzungen des Satzes 2.8. Nach Induktionsvoraussetzung ist  $\text{Grad}(f^\wedge) \geq \Pi_2^k \gamma_i$ .

### 3. Geometrische Eigenschaften des Defektes. Probleme

Es ist ein Problem, welche Aussagen sich über  $\Delta$  und  $\Gamma$  machen lassen, wenn  $\delta|\Delta$  resp.  $\gamma|\Gamma$  stetig ist. Insbesondere ist die Frage: Ist dann  $\Delta$  und  $\Gamma$  eine Mannigfaltigkeit?

Im folgenden werden partielle Antworten gegeben.  $f: X^m \rightarrow X^m$  sei eine offene simpliziale Abbildung.

3.1. Ist  $\gamma|\Gamma$  stetig, so liegt jedes  $(m-3)$ -Simplex von  $\Gamma$  in genau zwei  $(m-2)$ -Simplexen von  $\Gamma$ . Ist darüberhinaus  $\delta|\Delta$  stetig, so liegt auch jedes  $(m-3)$ -Simplex von  $\Delta$  in genau zwei  $(m-2)$ -Simplexen von  $\Delta$ .

Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Dimension. Es sei  $\gamma|\Gamma$  stetig.

Für  $m=2$  ist die Aussage richtig (s. 1.3).

Es sei  $m > 2$  und  $\sigma$  ein  $(m-3)$ -Simplex in  $\Gamma$ ,  $p \in \sigma^0$  (für  $m=3$ : ein Eckpunkt).  $U$  sei Standard- Umgebung von  $p$ .  $f|U \rightarrow V$  hat den Grad  $\gamma(p)$  und genügt der Induktionsvoraussetzung, alle Punkte in  $\Gamma(f|U)$  haben maximale Ordnung  $\gamma(p)$ .

Für  $m=3$  folgt dann aus der Hurwitzformel (2), dass  $\Gamma(f|U)$  aus genau zwei Punkten besteht.

Für  $m > 3$  darf man annehmen, dass jedes  $(m-4)$ -Simplex von  $\Gamma(f|U)$  in genau zwei  $(m-3)$ -Simplexen von  $\Gamma(f|U)$  liegt, und weil  $\Gamma_U$  der Kegel über  $\Gamma_U$  ist, mit der Spitze in  $p$ , folgt die Aussage.

Es sei  $\delta|\Delta$  stetig. Dann ist  $\gamma|\Gamma$  stetig (1.4). Für  $m=2$  ist die Aussage wieder trivial. Für  $m=3$  zeigt die Verwendung der Hurwitz-Formel und einer Standard- Umgebung die Richtigkeit. Der Induktionsschluss verläuft analog wie vorher, man muss nur bemerken, dass die Defektfunktion auf dem Rand  $V$  einer Standard- Umgebung stetig ist, weil maximal für die induzierte Abbildung  $f: U \rightarrow V$ .

3.2. Ist  $\gamma|\Gamma$  stetig und enthält  $\Gamma$  einen  $(m-2)$ -Zyklus  $\zeta$  (bezüglich rationaler Koeffizienten), so ist der Träger  $|\zeta|$  eine Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von  $\Gamma$ .

Eine entsprechende Aussage gilt für stetiges  $\delta|\Delta$ .

Es sei  $p \in |\zeta|$  ein Eckpunkt,  $U$  eine Standard- Umgebung,  $V = f(U)$ . Auf jedem  $(m-3)$  Simplex  $\sigma$  von  $\Gamma_U$ . mit  $\sigma \subset |\zeta|$  wird eine Vielfachheit und Orientierung induziert durch



das  $(m-2)$ -Simplex in  $\Gamma_U$ , in dem  $\sigma$  liegt. Dadurch wird  $\Gamma_U \cap |\zeta|$  ein  $(m-3)$ -Zyklus  $\xi$ .

$f|U'$  hat den Grad  $\gamma(p)$ , und wegen der Stetigkeit von  $\gamma$  ist der lokale Grad in allen Punkten von  $\Gamma_U$  ebenfalls  $\gamma(p)$ . Daher wird  $\Gamma_U$  durch  $f$  topologisch abgebildet, und die Punkte in  $\Delta(f|U')$  sind Punkte maximalen Defektes.  $f(\xi)$  ist ein Zyklus in  $\Delta(f|U')$ , und nach (4a) ist  $|f(\xi)|$  der ganze Defekt von  $f|U'$ , daher  $|\xi|$  die gesamte Windungsmenge. Das gilt für jeden Eckpunkt von  $|\zeta|$  und weil  $\Gamma$  Unterkomplex von  $X$  ist, liegt  $|\zeta|$  isoliert in  $\Gamma$ .

Ist  $\delta|\Delta$  stetig, so auch  $\gamma$ , und weil  $\Gamma$  lokal-topologisch abgebildet wird, folgt die entsprechende Aussage für  $\Delta$ .

3.3. Als Korollar aus 3.1 und 3.2 ergibt sich: Ist  $m \leq 4$  und  $\gamma$  stetig, so ist  $\Gamma$  eine Mannigfaltigkeit, entsprechend für  $\Delta$ .

3.4 Probleme  $f: S^m \rightarrow S^m$  sei offen und simplizial.

(i)  $\Delta$  enthalte eine  $(m-2)$ -Sphäre aus Punkten maximalen Defektes. Ist sie identisch mit der gesamten Defektmenge?

(ii)  $\Delta$  bestehe aus Punkten maximalen Defektes. Welche Gestalt kann  $\Delta$  haben? Insbesondere: Ist es eine (Homologie-) Sphäre?

(iii) Kann eine nicht orientierbare Mannigfaltigkeit als eine Zusammenhangskomponente von  $\Delta$  auftreten? (Besonders für  $m=4$ )

(iv) Es sei  $m > 3$  und  $\Delta$  bestehe aus disjunkten Sphären,  $\delta|\Delta$  sei stetig.

Vermutung: Die Anzahl der Sphären lässt sich mit Hilfe des Abbildungsgrades abschätzen.

$f: X^m \rightarrow Y^m$  sei offen und simplizial.

(v)  $\Delta$  sei eine Mannigfaltigkeit (nicht notwendig zusammenhängend) und bestehe aus Punkten maximalen Defektes.

Welche topologischen Eigenschaften besitzt  $\Delta$  in Abhängigkeit von  $X$  und  $Y$ ?

(vi)  $\Delta$  sei Vereinigung orientierbarer Mannigfaltigkeiten  $N_1 \cup \dots \cup N_k$ .

Es sei  $D = \bigcup_{i \neq j} N_i \cap N_j$  und  $\dim D = m-4$ .

$\Gamma$  sei Vereinigung orientierbarer Mannigfaltigkeiten  $M_1 \cup \dots \cup M_l$ .

Es sei  $D' = \bigcup_{i \neq j} M_i \cap M_j$  und  $\dim D' = m-4$ .

Es sei  $\delta|\Delta - D$  stetig und  $f|\Gamma - D' \rightarrow \Delta - D$  lokal-topologisch.

Vermutung: Wird jedes  $(m-2)$ -Simplex in  $\Delta$  resp.  $\Gamma$  mit der durch  $\delta$  resp.  $\gamma$  bestimmten Vielfachheit versehen, so gibt es eine Orientierung der Mannigfaltigkeiten  $N_i$ , resp.  $M_j$ , so dass  $\Delta$  resp.  $\Gamma$  ein nullhomologer Zyklus ist.

## LITERATUR

- [1] BROWN, M. *A proof of the generalized Schoenflies-Theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 74-76.  
 [2] CHURCH u. HEMMINGSEN, *Light open maps of manifolds*, Duke Math. J. 28 (1961),  
 [3] DOLCHER, M. *Exceptions to n-coverings for continuous mappings of a plane region*, Proc. Int. Congr. Math. 1954, Amsterdam, Vol II, S. 95.

- [4] HOPF, H. *Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, 2. Teil. Math. Ann. 102 (1929/30) 614–23.
- [5] HOPF, H. *Über den Defekt stetiger Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Rend. Mat. e Appl., Univ. Roma 21, (1962), 273–285.
- [6] KNESER, H. *Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen*, Math. Ann. 103 (1930).
- [7] TUCKER, A. W. *Branched and folded coverings*, Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1931).

Eingegangen den 28. April 1966