Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 42 (1967)

Artikel: Über den Defekt simplizialer Abbildungen von Mannigfaltigkeiten.
Autor: Olivier, Reinhard
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32130

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über den Defekt simplizialer Abbildungen von Mannigfaltigkeiten

von Reinhard Olivier, Bonn

0. Einleitung

Die klassische Hurwitzformel lautet so:

Sind X, Y geschlossene, orientierte Flächen und $f: X \to Y$ eine offene Abbildung mit den Verzweigungspunkten $p_1, \ldots, p_k$ der Ordnung $m_1+1, \ldots, m_k+1$, und mit dem Grade $d>0$, so gilt

$$\chi(X) = d\,\chi(Y) - \sum_1^k m_i. \tag{1}$$

Die Punkte $f(p_1)$ sind gerade diejenigen Punkte in Y, die weniger als d Urbildpunkte besitzen.

Definiert man in Y die Funktion $\delta: Y \to Z$ durch

$$\delta(y) = d - \{\text{Anzahl der Punkte in } f^{-1}(y)\}$$

so lässt sich Formel (1) auch schreiben

$$\sum_{p \in Y} \delta(p) = d \cdot \chi(Y) - \chi(X) \tag{2}$$

Bezeichnet man $\delta(p)$ als den Defekt von p, so kann man die linke Seite von (2) als Gesamtdefekt der Abbildung betrachten, und erhält damit zugleich eine Aussage über seine Grösse.

Die Funktion δ lässt sich für jede Abbildung $f: X \to Y$ orientierter kompakter m-Mannigfaltigkeiten ohne Rand, mit dem Grade d, definieren. (Dabei ist der Wert $-\infty$ zugelassen). Die Punktmenge

$$\Delta(f) = \Delta = \{p \in Y \mid \delta(p) > 0\}$$

nennen wir Defektmenge und ihre Elemente Defektpunkte, die Zahl $\delta(p)$ den Defekt von p.

Von H. Hopf [4] stammt das Problem, über die topologischen Eigenschaften von Δ Aussagen zu machen, in Abhängigkeit von X, Y und der Homotopieklasse von f, insbesondere über die mögliche „Grösse" von Δ, und darunter lässt sich speziell die $(m-2)$-te Bettische Zahl verstehen, denn Δ enthält keinen $(m-1)$-dim. Zyklus und hat im allgemeinen gerade die Dimension $m-2$.

Formel (1), bzw. (2) stellt einen Beitrag zur Lösung dieses Problems dar. Hopf selbst hat in [4] zwei weitere Beiträge geliefert.

(a) Sind X und Y 2-dim., f stetig, so gilt

$$\sum_{p \in \Delta} \delta(p) \leqslant d \cdot \chi(Y) - \chi(X) \tag{3}$$

(b) Es sei $\Delta^1 = \{p \in \Delta | \delta(p) = d-1\}$ die Menge der Punkte mit maximalem Defekt, $\tilde{\Delta}^1$ abgeschlossen und echt in Δ^1 enthalten, sowie d teilerfremd zu den 1-dim. Torsionszahlen von X. Dann gilt (b_i die i-te Bettische Zahl):

$$b_{m-2}(\tilde{\Delta}^1) \leqslant b_1(X) - b_1(Y) + b_2(Y) \tag{4a}$$

$$b_{m-2}(\Delta^1) \leqslant 1 + b_1(X) - b_1(Y) + b_2(Y) \tag{4b}$$

4b ist eine Folgerung aus 4a. Die Voraussetzung über die Torsionszahlen ist insbesondere erfüllt, wenn X eine Sphäre ist.

Ausser den Arbeiten [3], [6], [7], die im folgenden nicht benutzt werden, sind mir keine weiteren Ergebnisse in dieser Hinsicht bekannt.

In der vorliegenden Arbeit werden nur offene simpliziale Abbildungen betrachtet und in der Hauptsache zwei Sätze bewiessen.

SATZ 1: *Zu jeder natürlichen Zahl k gibt es eine Abbildung $f_k: S^3 \to S^3$ vom Grade 3, deren Defekt- und Windungsmenge aus genau $2k+2$ disjunkten Kreisen besteht. f_k lässt sich so wählen, dass unter diesen Kreisen Knoten auftreten.*

Zum Begriff der Windungsmenge siehe 1.1.

Analoge Beispiele lassen sich für höhere Dimensionen finden. Das zeigt insbesondere, dass eine generelle Abschätzung analog 4b für Δ statt Δ^1 nicht existiert.

In der Arbeit [2] finden sich ähnliche Beispiele, die jedoch anders gewonnen werden, und mir zur Zeit der Niederschrift nicht bekannt waren. Das in [2] angegebene Beispiel für einen Knoten in der Windungsmenge ist mir nicht klar geworden.

Die Kreise der Menge Δ in Satz 1 sind zyklisch miteinander verschlungen, ihre Urbildkreise jedoch paarweise unverschlungen. Der folgende Satz zeigt, dass man für weitergehende Untersuchungen eine Art von Verschlingung oder Verknotung berücksichtigen muss.

SATZ 2: *$f: S^m \to \tilde{S}^m$, $m > 2$, sei eine offene simpliziale Abbildung mit dem Grade $d > 0$. Es sei $\Delta = \tilde{S}_1 \cup \cdots \cup \tilde{S}_k$ disjunkte Vereinigung von Sphären. $\tilde{S}_i$ berande die Zelle $\tilde{E}_i$, Unterkomplex von $\tilde{S}^m$, so dass $\tilde{E}_i \cap \Delta = \tilde{S}_i$, $i = 1, \ldots, k$. Es sei weiter δ stetig auf Δ und $\delta(\tilde{S}_i) = \delta_i$.*
Es sei $\Gamma = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_j$ disjunkte Vereinigung und $\gamma(\Gamma_i) = \gamma_i$, $i = 1, \ldots, j$. Dann gilt

$$d = 1 - j + \sum_1^j \gamma_i = 1 + \sum_1^k \delta_i \tag{5}$$

Nicht erklärte Bezeichnungen siehe 1.1.

Der Rest der Arbeit enthält noch einige weitere Beispiele, sowie einige Untersuchungen über geometrische Eigenschaften des Defektes.

Herr Prof. H. HOPF in Zürich hat die Anregung zu dieser Arbeit gegeben und sich häufig mit mir darüber unterhalten, und ich möchte ihm auch an dieser Stelle herzlich dafür danken.

1. Vorbereitungen

1.1. X und Y seien kompakte kombinatorische Mannigfaltigkeiten ohne Rand, orientiert, von der Dimension m, $f: X \to Y$ eine offene simpliziale Abbildung, d der Grad von f. Die Aussagen sind nicht leer nur für $d > 1$. $\delta: Y \to Z$ und $\Delta \subset Y$ sei wie in der Einleitung erklärt. Zusätzlich definieren wir $\gamma: X \to Z$ durch

$$\gamma(x) = \text{lokaler Grad von } f \text{ in } x$$

wir nennen $\gamma(x)$ auch Ordnung von x.

Es sei $\Gamma(f) = \Gamma = \{x \in X | \gamma(x) > 1\}$, die „Windungsmenge". Ist $\gamma | \Gamma$ stetig, so setzen Wir auch für eine Zusammenhangskomponente Γ_1 von $\Gamma: \gamma(\Gamma_1) = \gamma(x)$, $x \in \Gamma_1$, entsprechend für δ.

Ist $M \subset X$, bzw. $N \subset Y$, so sei $\Gamma_M = \Gamma \cap M$, $\Delta_N = \Delta \cap N$.

1.2. Es sei $p \in \Gamma$. Als Standard- Umgebung von p bezeichnen wir eine abgeschlossene Umgebung U mit den Eigenschaften: (i) U liegt im offenen Stern von p. (ii) U ist eine kombinatorische Zelle (und damit $U^{\cdot}$ in kanonischer Weise eine kombinatorische S^{m-1}) (iii) $f(U)$ ist eine kombinatorische Zelle V in Y und (iv) $f | U^{\cdot}$ ist offen und simplizial. Solche Umgebungen existieren nach den Voraussetzungen über X, Y, f. V heisst sodann Standard- Umgebung von $f(p)$.

Ist U eine Standard- Umgebung, so gilt $\Gamma(f | U^{\cdot}) = \Gamma_U{}^{\cdot}$.

γ(p) ist der Grad von $f | U^{\cdot}$.

1.3. Es ist $f(\Gamma) = \Delta$, wie sich aus der Definition leicht ergibt. Ist Y eine Sphäre der Dimension > 1, und ist $d > 1$, so ist $\Gamma \neq \emptyset$, weil Y einfach-zusammenhängend ist.

Weil f simplizial ist, ist Γ und Δ ein Unterkomplex von X resp. Y. Durch Induktion nach der Dimension m von X, beweist man folgende Eigenschaften.

(i) $\dim \Gamma = \dim \Delta = m - 2$, oder $\Gamma = \Delta = \emptyset$.

(ii) Jedes $(m-3)$-Simplex von Γ resp. Δ liegt in wenigstens zwei $(m-2)$-Simplexen von Γ resp. Δ.

Zum Beweiss kann man Standard- Umgebungen benutzen, sowie die Tatsache, dass für eine Abbildung $f: S^2 \to S^2$ nach der Hurwitzformel (1) Γ und Δ wenigstens zwei Punkte enthält.

HILFSSATZ: *Ist $\delta | \Delta$ stetig, so ist $\gamma | \Gamma$ stetig und $f | \Gamma \to \Delta$ eine lokal-topologische Abbildung.*

Beweis. Δ_1 sei eine Zusammenhangskomponente von Δ. Es sei $q \in \Delta_1$ und $p \in f^{-1}(q)$.

U sei eine Standard- Umgebung von p und $q' \in \Delta_V \cdot$. Dann ist $q' \in \Delta_1$, weil Δ ein Unterkomplex von Y ist. q' besitzt einen Urbildpunkt p' in $U^{\cdot}$. Das gilt für jeden Punkt $p \in f^{-1}(q)$ und eine Standard- Umgebung. Daher hat q' wenigstens soviele Urbildpunkte wie q. Weil aber δ auf Δ_1 konstant ist, besitzt q' genausoviele Urbildpunkte wie q, und es ist $f^{-1}(q') \cap U^{\cdot} = p'$. Daher ist $\gamma(p') = \text{Grad } f|U^{\cdot} = \gamma(p)$, d.h. γ lokal konstant. Γ_U ist homöomorph zu Δ_V, wenn $\Gamma_U \neq \emptyset$, d.h. $f|\Gamma$ ist lokal-topologisch.

2. Beispiele und Abschätzungen für die Defektmenge

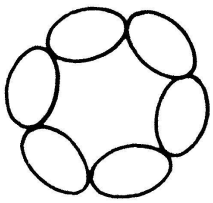
2.1. Es ist einfach zu sehen, dass Δ und Γ keine Mannigfaltigkeit zu sein braucht, und dass $\delta|\Delta$ und $\gamma|\Gamma$ nicht stetig zu sein braucht. (i) Es sei dafür $\xi: C \to C$ die durch z^3 vermittelte Abbildung. Diese Abbildung lässt sich durch eine offene Homotopie (d.h. eine, bei der jede Zwischenabbildung offen ist) in eine Abbildung mit zwei Windungspunkten der Ordnung zwei überführen. Dafür genügt es, das Polynom z^3 stetig in ein Polynom $z^3 + az^2 + bz$ zu deformieren. Das letztere vermittelt im allgemeinen eine Abbildung mit zwei Windungspunkten, weil es im allgemeinen gerade zwei Werte $x \in C$ gibt, so dass die Gleichung $z^3 + az^2 + bz - x = 0$ eine Doppellösung aufweist.

(ii) Eine Abbildung $f: S^2 \to S^2$ vom Grade drei mit genau zwei Windungspunkten lässt sich daher in eine Abbildung g deformieren mit einem Windungspunkt der Ordnung drei und zweien der Ordnung zwei. Man darf g als simplizial annehmen.

(iii) Die Einhängung von g ist eine Abbildung vom Grade drei, deren Defekt- und Windungsmenge der Doppelkegel über $\Delta(g)$ resp. $\Gamma(g)$ ist, und das ist keine Mannigfaltigkeit. $\gamma|\Gamma$ und $\delta|\Delta$ sind nicht konstant.

2.2. Es sei $\xi: C \to C$ wie in 2.1 (i) und $f: S^3 \to S^3$ die zweifache Einhängung von $\xi|S^1$. $\Gamma(f)$ besteht aus einem Kreis. k sei eine natürliche Zahl > 1. Durch eine Deformation von f in der Nähe von Γ, entsprechend der Deformation von ξ in 2.1 (i) lässt sich eine Abbildung g erhalten, deren Windungs- und Defektmenge k $1-$dim. Zyklen enthält und zusammenhängend ist. (Figur 1)

$\gamma|\Gamma(g)$ und $\delta|\Delta(g)$ ist nicht stetig.



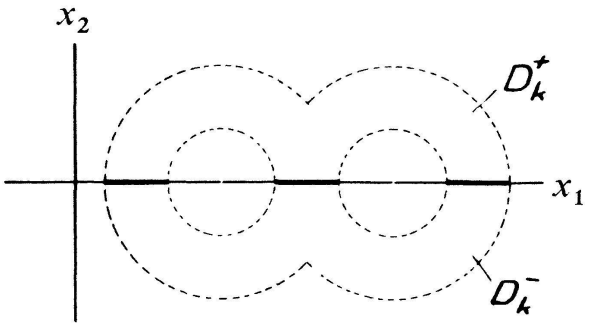
Figur 1

2.3. *Beweis von Satz* 1. (i) x_1, x_2, x_3 seien Koordinaten in E^3. Es sei $E_{i,k} = (x_i, x_k)$-Ebene. In $E_{1,2}$ seien k Kreise gewählt, jeder symmetrisch zur x_1-Achse, in linearer

Anordung, so dass jeder mit dem folgenden genau einen Punkt gemeinsam hat.

Eine abgeschlossene sphärische ε-Umgebung H_k für genügend kleines $\varepsilon>0$ ist ein dreidimensionaler Henkel und sein Rand eine Fläche F_k vom Geschlecht k. Als Aequator von F_k bezeichnen wir $E_{1,2} \cap F_k$, er besteht aus $k+1$ disjunkten Sphären. Mit D_k^+ resp. D_k^- bezeichnen wir den Durchschnitt von H_k mit der Halbebene in $E_{1,2}$ für $x_2 \geqslant 0$ resp. $x_2 \leqslant 0$, es sind 2-Zellen (Figur2 für $k=2$). $H_k \cap E_{1,3}$ besteht aus $k+1$ disjunkten Kreisscheiben, wir bezeichnen sie mit $C_1, \ldots, C_{k+1}$. $H_k-(C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_{k+1})$ zerfällt in zwei Komponenten, deren abgeschlossene Hülle jeweils eine 3-Zelle ist.

U sei eine zu H_k homöomorphe abgeschlossene sphärische Umgebung von H_k. $U \cap E_{1,3}$ besteht ebenfalls aus k + 1 disjunkten Kreisscheiben $C_1^\wedge, \ldots, C_{k+1}^\wedge$, mit $C_i \subset C_i^\wedge$.



Figur 2

(ii) α sei die senkrechte Projektion, parallel zu x_3, von F_k auf $E_{1,2}$. Es ist $\alpha(F_k)=D_k^+ \cup D_k^-$.

Es gibt eine Abbildung $\varphi: \overline{U-H_k} \to U$, mit $\varphi|F_k=\alpha$, $\varphi|U^{\cdot}=Id$, und so dass φ eine Homöomorphie von $U-H_k$ auf $U-(D_k^+ \cup D_k^-)$ ist.

(iii) Weiter werde eine Abbildung $\beta: C_i \to C_i^\wedge$ angegeben.

Dazu sei $K_1=\{y_1^2+y_2^2 \leqslant 1\}$, $K_2=\{y_1^2+y_2^2 \leqslant \frac{1}{2}\}$, es ist $K_2 \subset K_1$. $K_3=\{z_1^2+z_2^2 \leqslant 2\}$, in Koordinaten y_1, y_2, z_1, z_2.

Es sei $I=\{z_2=0,\ -1 \leqslant z_1 \leqslant 1\}$, $I \subset K_3$.

Weiter sei

$\kappa: K_2 \to K_3$ eine topologische Abbildung

$\kappa: (y_1, y_2) \to (y_1, 0) \in I$, für $(y_1, y_2) \in K_1^{\cdot}$

$$\left.\begin{array}{l} \kappa: [-1,-\frac{1}{2}] \to [-1,-2] \subset K_3 \text{ für } [-1,-\frac{1}{2}] \subset K_1 \\ \kappa: [\frac{1}{2}, 1] \to [2, 1] \subset K_3 \text{ für } [\frac{1}{2}, 1] \subset K_1 \end{array}\right\} \text{ affin}$$

$\kappa: K_1^0-K_2 \to K_3-I$ eine topologische Abbildung, stetig anschliessend an das schon definierte.

Durch Identifizierung von K_1 mit C_i und K_3 mit $C_i^\wedge$ erhält man so durch κ eine Abbildung β: $C_i \to C_i^\wedge$. Das Bild von $K_2^{\cdot}$ in C_i unter dieser Identifizierung werde mit S_i bezeichnet.

(iv) Es sei $\psi: U \to S^3$ eine Homöomorphie auf eine Untermenge von S^3.

Wir betrachten die folgende Abbildung $f_k: S^3 \to S^3$.

$$f_k|S^3 - \psi(U) = Id$$

$$f_k|\overline{\psi(U - H_k)} = \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$$

$$f_k|\psi(C_i) = \psi \circ \beta \circ \psi^{-1}, \quad i = 1, \ldots, k+1$$

f_k ist noch zu erklären auf $\psi[(H_k - (C_1 \cup \cdots \cup C_{k+1}))^0]$.

Dies besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten, jede eine offene drei-Zelle Z_1 resp. $Z_2 . Z_1^{\cdot}$ resp. $Z_2^{\cdot}$ wird durch f_k auf $\psi(D_k^+ \cup C_1^{\wedge} \cup \cdots \cup C_{k+1}^{\wedge})$ resp. $\psi(D_k^- \cup C_1^{\wedge} \cup \cdots \cup C_{k+1}^{\wedge})$ abgebildet, wie schon definiert.

Das Komplement in S^3 ist jeweils eine offene 3-Zelle, und f_k bilde Z_1 resp. Z_2 homöomorph darauf ab, verträglich mit der Randabbildung. Man sieht leicht, dass das auch so möglich ist, dass f_k insgesamt eine offene Abbildung ist, die dann den Grad 3 besitzt. Man kann sie als simplizial annehmen.

(v) Nach Konstruktion besteht $\Gamma(f_k)$ genau aus ψ(Aequator) $\cup\, \psi(S_1 \cup \cdots \cup S_{k+1})$, das sind $2k+2$ disjunkte Kreise.

$\Delta(f_k)$ besteht genau aus ψ(Aequator) $\cup\, \psi(C_1^{\wedge\cdot} \cup \cdots \cup C_{k+1}^{\wedge\cdot})$, das sind ebenfalls $2k+2$ disjunkte Kreise.

(vi) Unter Hinsicht auf Satz 2 sei betont, dass in Γ je zwei Kreise unverschlungen sind, die Kreise in Δ aber in zyklischer Reihenfolge miteinander verschlungen sind.

(vii) Wählt man den Homöomorphismus ψ so, dass ein Aequatorkreis auf einen Knoten abgebildet wird, so erhält man in Γ und Δ einen Knoten.

2.4. *Bemerkung* (Analoge Konstruktion bei höherer Dimension). Analog zur Konstruktion von 2.3 lassen sich für $m > 3$ Abbildungen $f_k: S^m \to S^m$ vom Grade 3 definieren, deren Defekt – und Windungsmenge aus $k+2$ disjunkten Mannigfaltigkeiten, darunter $k+1$ $(m-2)$-Sphären besteht. Als Henkel H_k wählt man für ein Kreissystem wie in 2.3 (i) eine sphärische Umgebung in E^m statt E^3. α ist sodann die Projektion auf die $(x_1, \ldots, x_{m-1})$–Ebene parallel zu x_m. Der Aequator von $F_k = H_k^{\cdot}$ ist in diesem Fall zusammenhängend (daher die kleinere Zahl von Komponenten in Δ und Γ).

Speziell für $m=4$ ist der Aequator von F_k eine orientierbare geschlossene Fläche vom Geschlecht k. Daher gibt es zu jedem $k > 0$ eine simpliziale offene Abbildung $S^4 \to S^4$, vom Grade 3, deren Defekt- und Windungsmenge eine geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht k enthält.

2.5. *Beweis von Satz* 2. (i) Nach Hilfssatz 1.4 ist Γ disjunkte Vereinigung $S_1 \cup \cdots \cup S_j$ von Sphären. Es sei $f(S_1) = \tilde{S}_1$.

Wir werden den Beweis durch Induktion nach dem Grad führen, indem wir in S^m zwei m-Zellen angeben, die jeweils auf $\tilde{S}^m$ abgebildet werden.

(ii) Es gibt in S^m zwei abgeschlossene $(m-1)$-Zellen E, F mit folgenden Eigenschaften:

$E^{\cdot} = F^{\cdot} = E \cap F = S_1^{\cdot}$. $f|E$ und $f|F$ ist eine topologische Abbildung auf $\tilde{E}_1$.

Um das einzusehen, wählen wir in der offenen Sternumgebung W von S_1 (S^m ist

simplizial) zwei verschiedene Punkte p, q mit $f(p)=f(q)$. $S^m-f^{-1}(\Delta)$ ist eine unverzweigte Überlagerung von $\tilde{S}^m-\Delta$.

$\tilde{E}_1^0(=\tilde{E}_1-\tilde{S}_1)$ ist einfach zusammenhängend, daher gibt es eine Untermenge $D\subset S^m-f^{-1}(\Delta)$, die p enthält und durch f topologisch auf $\tilde{E}_1^0$ abgebildet wird. $\bar{D}$ ist ein Unterkomplex von S^m. Aus Stetigkeitsgründen ist $f(D^{\cdot})\subset\tilde{S}_1$. Weil $W\cap f^{-1}(\tilde{S}_1)=S_1$ und weil $p\in D\cap W$, ist dann auch $D^{\cdot}\subset S_1$, und infolgedessen $D^{\cdot}=S_1$. $f|\bar{D}$ ist topologisch. Mit q statt p erhält man durch die gleiche Konstruktion eine weitere abgeschlossene Zelle, diese beiden nennen wir E und F. Weil f lokal-topologisch in $S^m-f^{-1}(\Delta)$, ist $E\cap F=S_1$.

(Ist $m=3$, so werden die 1-Sphären in Γ also topologisch auf die von Δ abgebildet.)

(iii) $E\cup F$ berandet zwei m-Zellen M_1 und M_2 (s. [1], die Verwendung des Schönfliess-Theorems lässt sich umgehen, vereinfacht aber den Beweis) mit $M_1\cup M_2=S^m$. Identifiziert man Punkte von $E\cup F$, wenn sie gleiches Bild unter f besitzen, so erhält man zwei Sphären Σ_1 und Σ_2, auf denen f eine offene simpliziale Abbildung f_1, resp. f_2 auf $\tilde{S}^m$ induziert. Wegen $\tilde{E}_1\cap\Delta=\tilde{S}_1$ ist $(E\cup F)\cap\Gamma=S_1$, und jede Komponente S_i von $\Gamma-S_1$ liegt entweder in Σ_1 oder in Σ_2, mit dem gleichen lokalen Grad γ_i wie für f. f_1 und f_2 erfüllen daher die Voraussetzungen des Satzes.

(iv) Wir beweisen die behauptete Formel durch Induktion nach d. Sie ist richtig für $d=1$.

Es sei $d_i=\mathrm{Grad}\,(f_i)$, $i=1, 2$. Offenbar ist $d_1+d_2=d$.

Es sei γ_1' der lokale Grad von f_1 in S_1, γ_1'' der lokale Grad von f_2 in S_1, es ist $\gamma_1'+\gamma_1''=\gamma_1$.

Dann ist nach Induktionsvoraussetzung, bei geeigneter Numerierung der Komponenten von $\Gamma-S_1$, mit $j_1+j_2=j+1$

$$\begin{aligned} d=d_1+d_2 &= 1-j_1+\gamma_1'+\sum_{i=2}^{j_1}\gamma_i \\ &\quad +1-j_2+\gamma_1''+\sum_{i=j_1+1}^{j}\gamma_i \\ &= 1-j+\sum_1^j\gamma_i \end{aligned}$$

Dies ist der erste Teil der Gleichung. Der zweite ergibt sich aus der folgenden Bemerkung.

Ist Δ_r eine Komponente von Δ und $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s=\Gamma\cap f^{-1}(\Delta_r)$, so ist

$$\delta(\Delta_r)=(\sum_1^s\gamma_i)-s\,.$$

2.6 Korollar: *$f: S^m\to S^m$, $m\geqslant 2$ sei offen und simplizial. Δ sei eine Sphäre, die eine Zelle berandet. Dann besteht Δ aus Punkten maximalen Defektes.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach m und Anwendung von Satz 2.

Für $m=2$ folgt er aus der Hurwitz-Formel (2), weil ein Punkt höchstens den Defekt $d-1$ besitzen kann.

Es sei $m>2$, $q\in\Delta$, $p\in f^{-1}(q)\cap\Gamma$, U Standard- Umgebung von p, $V=f(U)$. Sicher ist $\Delta(f|U^{\cdot})\subset\Delta_{V^{\cdot}}$, weil aber $\Delta_{V^{\cdot}}$ eine Sphäre ist, und $\Delta(f|U^{\cdot})$ abgeschlossener Unterkomplex davon, folgt aus 1.3 (ii) auch $\Delta(f|U^{\cdot})=\Delta_{V^{\cdot}}$.

Es sei E die von Δ berandete Zelle. $V^{\cdot}\cap E$ ist ebenfalls eine Zelle (V ist Standard-Umgebung) und hat als Rand $\Delta_{V^{\cdot}}$. Daher erfüllt $f|U^{\cdot}$ die Induktionsvoraussetzung.

$\Delta_{V^{\cdot}}$ besteht also aus Punkten maximalen Defektes bzgl. $f|U^{\cdot}$. D.h. der Defekt ist gleich $\gamma(p)-1$, daher ist der Defekt stetig in V, und also überhaupt auf Δ.

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt, mit $k=1$, und aus Formel (5) folgt: δ_1 ist maximal.

Bemerkung. Ob ein entsprechender Satz für Γ gilt, weiss ich nicht.

2.7. Enthält Δ als eine Komponente eine Sphäre S, die eine Zelle E berandet mit $E\cap\Delta=S$, so folgt aus 2.6, dass δ auf S stetig ist. Dann ist $f^{-1}(S)\cap\Gamma$ eine disjunkte Vereinigung von Sphären, die lokal-topologisch auf S abgebildet werden (1.4). Die Beweismethode von 2.5 lässt sich daher anwenden. Durch Induktion erhält man die Aussage

KOROLLAR: *Enthält Δ als Komponenten die Sphären $S_1, \ldots, S_k$, und berandet S_i eine Zelle E_i mit $E_i\cap\Delta=S_i$, $i=1, \ldots, k$, so ist $\delta|S_1\cup\cdots\cup S_k$ stetig und*

$$d\geqslant 1+\sum_1^k\delta_i.$$

Die Zahl der in diesem Sinne mit Δ unverknoteten Sphären von Δ ist also durch den Grad der Abbildung beschränkt. Auch das zeigt, dass in einer allgemeinen Aussage über die Grösse der Defektmenge die Verknotung eine Rolle spielen muss.

2.8. Für Abbildungen $S^3\to S^3$ lässt sich noch ein Spezialfall untersuchen. Wir bemerken vorher, dass, wenn der Defekt als Komponente einen Kreis enthält, δ auf diesem Kreis konstant ist. Das folgt unter Benutzung von Standard- Umgebungen sofort aus der Hurwitz-Formel. Auf dem Urbild dieses Kreises ist daher γ stetig (1.4).

SATZ: *$f:S^3\to\tilde{S}^3$ sei offen, simplizial und vom Grade d. Δ enthalte die unverknoteten disjunkten Kreise $\tilde{S}_1, \cdots, \tilde{S}_k$. $f^{-1}(\tilde{S}_i)$ sei ein unverknoteter Kreis S_i, $i=1, \ldots, k$. Es sei $\gamma(S_i)=\gamma_i$. Dann gilt*

$$d\geqslant\prod_1^k\gamma_i.$$

Der Beweis erfolgt durch Induktion nach dem Grad. Für $d=1$ ist die Aussage richtig. Es sei $d>1$. Man entferne aus S^3 die Sphäre S_1 und aus $\tilde{S}^3$ das Bild $\tilde{S}_1$. Da die Kreise unverknotet sind, ist die Fundamentalgruppe von $\tilde{S}^3-\tilde{S}_1$ und von S^3-S_1 zyklisch und ein erzeugendes Element der Fundamentalgruppe wird auf das γ_1-fache

abgebildet. $f|S^3-S_1$ lässt sich daher über eine γ_1-fache unverzweigte Überlagerung $Y^\wedge$ von $\tilde{S}^3-\tilde{S}_1$ faktorisieren (s. [5], S. 278) und es sei $f=h\circ f^\wedge$. Die Abbildung $f^\wedge|S^3-S_1$ lässt sich vervollständigen zu einer Abbildung $f^\wedge|S^3$, indem man $Y^\wedge$ mit einer Kreislinie in offensichtlicher Weise komplettiert. Das ist möglich, da h eine endliche Ueberlagerungsabbildung ist. Die aus $Y^\wedge$ durch diese Komplettierung entstehende Mannigfaltigkeit ist wieder eine 3-Sphäre $S^\wedge$, bei der jedoch $\tilde{S}_1$ nicht mehr im Defekt auftritt, der übrige Defekt ist unverändert. Es ist $d=\mathrm{Grad}\,(f^\wedge)\cdot\gamma_1.f^\wedge$ genügt den Voraussetzungen des Satzes 2.8. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\mathrm{Grad}\,(f^\wedge)\geqslant\Pi_2^k\gamma_i$.

3. Geometrische Eigenschaften des Defektes. Probleme

Es ist ein Problem, welche Aussagen sich über Δ und Γ machen lassen, wenn $\delta|\Delta$ resp. $\gamma|\Gamma$ stetig ist. Insbesondere ist die Frage: Ist dann Δ und Γ eine Mannigfaltigkeit?

Im folgenden werden partielle Antworten gegeben. $f:X^m\to X^m$ sei eine offene simpliziale Abbildung.

3.1. Ist $\gamma|\Gamma$ stetig, so liegt jedes $(m-3)$-Simplex von Γ in genau zwei $(m-2)$-Simplexen von Γ. Ist darüberhinaus $\delta|\Delta$ stetig, so liegt auch jedes $(m-3)$-Simplex von Δ in genau zwei $(m-2)$-Simplexen von Δ.

Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Dimension. Es sei $\gamma|\Gamma$ stetig.

Für $m=2$ ist die Aussage richtig (s. 1.3).

Es sei $m>2$ und σ ein $(m-3)$-Simplex in Γ, $p\in\sigma^0$ (für $m=3$: ein Eckpunkt). U sei Standard- Umgebung von p. $f|U^\cdot\to V^\cdot$ hat den Grad $\gamma(p)$ und genügt der Induktionsvoraussetzung, alle Punkte in $\Gamma(f|U^\cdot)$ haben maximale Ordnung $\gamma(p)$.

Für $m=3$ folgt dann aus der Hurwitzformel (2), dass $\Gamma(f|U^\cdot)$ aus genau zwei Punkten besteht.

Für $m>3$ darf man annehmen, dass jedes $(m-4)$-Simplex von $\Gamma(f|U^\cdot)$ in genau zwei $(m-3)$-Simplexen von $\Gamma(f|U^\cdot)$ liegt, und weil Γ_U der Kegel über $\Gamma_U\cdot$ ist, mit der Spitze in p, folgt die Aussage.

Es sei $\delta|\Delta$ stetig. Dann ist $\gamma|\Gamma$ stetig (1.4). Für $m=2$ ist die Aussage wieder trivial. Für $m=3$ zeigt die Verwendung der Hurwitz-Formel und einer Standard- Umgebung die Richtigkeit. Der Induktionsschluss verläuft analog wie vorher, man muss nur bemerken, dass die Defektfunktion auf dem Rand $V^\cdot$ einer Standard- Umgebung stetig ist, weil maximal für die induzierte Abbildung $f:U^\cdot\to V^\cdot$.

3.2. Ist $\gamma|\Gamma$ stetig und enthält Γ einen $(m-2)$-Zyklus ζ (bezüglich rationaler Koeffizienten), so ist der Träger $|\zeta|$ eine Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von Γ.

Eine entsprechende Aussage gilt für stetiges $\delta|\Delta$.

Es sei $p\in|\zeta|$ ein Eckpunkt, U eine Standard- Umgebung, $V=f(U)$. Auf jedem $(m-3)$ Simplex σ von Γ_U. mit $\sigma\subset|\zeta|$ wird eine Vielfachheit und Orientierung induziert durch

das (m−2)-Simplex in Γ_U, in dem σ liegt. Dadurch wird $\Gamma_{U^\cdot} \cap |\zeta|$ ein $(m-3)$-Zyklus ξ.

$f|U^\cdot$ hat den Grad γ(p), und wegen der Stetigkeit von γ ist der lokale Grad in allen Punkten von $\Gamma_{U^\cdot}$ ebenfalls γ(p). Daher wird $\Gamma_{U^\cdot}$ durch f topologisch abgebildet, und die Punkte in $\Delta(f|U^\cdot)$ sind Punkte maximalen Defektes. $f(\xi)$ ist ein Zyklus in $\Delta(f|U^\cdot)$, und nach (4a) ist $|f(\xi)|$ der ganze Defekt von $f|U^\cdot$, daher $|\xi|$ die gesamte Windungsmenge. Das gilt für jeden Eckpunkt von $|\zeta|$ und weil Γ Unterkomplex von X ist, liegt $|\zeta|$ isoliert in Γ.

Ist $\delta|\Delta$ stetig, so auch γ, und weil Γ lokal-topologisch abgebildet wird, folgt die entsprechende Aussage für Δ.

3.3. Als Korollar aus 3.1 und 3.2 ergibt sich: Ist $m \leqslant 4$ und γ stetig, so ist Γ eine Mannigfaltigkeit, entsprechend für Δ.

3.4 *Probleme* $f: S^m \to S^m$ sei offen und simplizial.

(i) Δ enthalte eine $(m-2)$-Sphäre aus Punkten maximalen Defektes. Ist sie identisch mit der gesamten Defektmenge?

(ii) Δ bestehe aus Punkten maximalen Defektes. Welche Gestalt kann Δ haben? Insbesondere: Ist es eine (Homologie-) Sphäre?

(iii) Kann eine nicht orientierbare Mannigfaltigkeit als eine Zusammenhangskomponente von Δ auftreten? (Besonders für $m=4$)

(iv) Es sei $m>3$ und Δ bestehe aus disjunkten Sphären, $\delta|\Delta$ sei stetig.

Vermutung: Die Anzahl der Sphären lässt sich mit Hilfe des Abbildungsgrades abschätzen.

$f: X^m \to Y^m$ sei offen und simplizial.

(v) Δ sei eine Mannigfaltigkeit (nicht notwendig zusammenhängend) und bestehe aus Punkten maximalen Defektes.

Welche topologischen Eigenschaften besitzt Δ in Abhängigkeit von X und Y?

(vi) Δ sei Vereinigung orientierbarer Mannigfaltigkeiten $N_1 \cup \cdots \cup N_k$.

Es sei $D = \bigcup_{i \neq j} N_i \cap N_j$ und $\dim D = m-4$.

Γ sei Vereinigung orientierbarer Mannigfaltigkeiten $M_1 \cup \cdots \cup M_l$.

Es sei $D' = \bigcup_{i \neq j} M_i \cap M_j$ und $\dim D' = m-4$.

Es sei $\delta|\Delta - D$ stetig und $f|\Gamma - D' \to \Delta - D$ lokal-topologisch.

Vermutung: Wird jedes $(m-2)$-Simplex in Δ resp. Γ mit der durch δ resp. γ bestimmten Vielfachheit versehen, so gibt es eine Orientierung der Mannigfaltigkeiten N_i, resp. M_j, so dass Δ resp. Γ ein nullhomologer Zyklus ist.

LITERATUR

[1] Brown, M. *A proof of the generalized Schoenfliess-Theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. *66* (1960), 74–76.

[2] Church u. Hemmingsen, *Light open maps of manifolds*, Duke Math. J. *28* (1961),

[3] Dolcher, M. *Exceptions to n-coverings for continous mappings of a plane region*, Proc. Int. Congr. Math. 1954, Amsterdam, Vol II, S. 95.

[4] HOPF, H. *Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, 2. Teil. Math. Ann. *102* (1929/30) 614–23.
[5] HOPF, H. *Über den Defekt stetiger Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Rend. Mat. e Appl., Univ. Roma *21*, (1962), 273–285.
[6] KNESER, H. *Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen*, Math. Ann. *103* (1930).
[7] TUCKER, A. W. *Branched and folded coverings*, Bull. Amer. Math. Soc. *42* (1931).

Eingegangen den 28. April 1966