Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Band: 43 (1968)

Artikel: Kompakte Limesräume und limitierte Funktionenalgebren.

Autor: Binz, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32916

Kompakte Limesräume und limitierte Funktionenalgebren

E. BINZ

Einleitung

Es bezeichne X einen Limesraum (s. [7]). Die $\mathfrak{R}$-Algebra aller stetigen Funktionen von X nach dem Körper der reellen Zahlen $\mathfrak{R}$ heisse $\mathscr{C}(X)$. In [2] wurden einige Bemerkungen zur Korrespondenz zwischen X und seiner, mit der *Limitierung der stetigen Konvergenz* (s. [1] und [6]) versehenen Funktionenalgebra $\mathscr{C}_c(X)$ zusammengestellt. Dabei wurden dort spezielle Limesräume, nämlich die *c-einbettbaren*, etwas näher betrachtet. Ein c-einbettbarer Limesraum Y ist dadurch charakterisiert, dass seine Limitierung durch die limitierte $\mathfrak{R}$-Algebra (s. [1]) $\mathscr{C}_c(Y)$ bestimmt ist.

Hier nun sollen die Beziehungen zwischen einem *kompakten* Limesraum X und seiner Limesalgebra (ist dasselbe wie limitierte Algebra) $\mathscr{C}_c(X)$ näher untersucht werden (s. Sätze 3, 4, 6, 8 und 9). Wir nennen einen Limesraum *kompakt*, wenn er separiert ist und jeder Ultrafilter konvergiert. Insbesondere soll festgestellt werden, welche der kompakten Limesräume c-einbettbar sind (s. Sätze 4 und 9). Es wird sich herausstellen, dass es genau die *topologischen* sind. (Ein Limesraum heisst *topologisch*, falls seine Limitierung eine Topologie ist.) Dass es kompakte Limesräume gibt, die nicht topologisch sind, kann etwa aus [5], Satz 4.12., p. 57 gefolgert werden. Man wähle einen separierten nicht-topologischen Limesraum. Nach dem erwähnten Satze besitzt dieser eine (separierte) Kompaktifizierung. Diese kann aber nicht topologisch sein!

Der von C. H. COOK und H. R. FISCHER in [6] behandelte verallgemeinerte Begriff der *Gleichstetigkeit* und der von denselben Autoren verallgemeinerte Satz von Ascoli (s. [6]) erlauben uns, das angekündigte Vorhaben leicht auszuführen. Die in [6] im Zusammenhang mit den *uniformen Limitierungen* (uniform convergence structures) eingeführten Begriffe werden hier als bekannt vorausgesetzt. Die von uns aus [6] benötigten Terme und Sätze werden in (1.4) und (1.5) kurz zusammengestellt.

1. Vorbemerkungen

In diesem Paragraphen sollen einige später zur Anwendung kommende grundlegende Begriffe und Beziehungen aus [1], [2] und [6] kurz aufgeführt werden.

1.1. Seien A und A' zwei limitierte $\mathfrak{R}$-Algebren (s. [1]) mit Einselement e und e' resp. Statt von einem *Algebrahomomorphismus* (nicht notwendig stetig) zwischen A und A' (der e in e' überführt) sprechen wir im folgenden kurz von einem *Homomorphismus* zwischen A und A'. Die Menge aller *stetigen* Homomorphismen von A

in A' heisse $\mathscr{H}om(A, A')$. Wenn A' identisch mit $\mathfrak{R}$ ist, so kürzen wir $\mathscr{H}om(A, \mathfrak{R})$ durch $\mathscr{H}om\,A$ ab. Die Menge *aller* Homomorphismen von A nach $\mathfrak{R}$ heisse $\mathrm{Hom}\,A$.

Trägt $\mathscr{H}om\,A$ die *Limitierung der stetigen* resp. *der punktweisen Konvergenz* (s. [1] und [6]), so schreiben wir $\mathscr{H}om_c A$ resp. $\mathscr{H}om_s A$. Letzterer ist ein *vollständig regulärer* (s. [8], p. 36) *topologischer* Raum.

Für jeden Homomorphismus $u \in \mathscr{H}om(A, A')$ ist (falls $\mathscr{H}om\,A$ und $\mathscr{H}om\,A'$ nicht leer sind)

$$u^*: \mathscr{H}om_c A' \longrightarrow \mathscr{H}om_c A$$

resp.

$$u^*: \mathscr{H}om_s A' \longrightarrow \mathscr{H}om_s A,$$

definiert durch $u^*(h) = h \circ u$ für jedes $h \in \mathscr{H}om\,A'$, stetig.

1.2. Seien X und Y Limesräume (s. [1] und [7]). Die Menge der *stetigen* Abbildungen von X nach Y heisse $\mathscr{C}(X, Y)$. Ist diese mit der *Limitierung* Λ_c *der stetigen* resp. mit der *Limitierung* Λ_s *der punktweisen Konvergenz* versehen, so setzen wir $\mathscr{C}_c(X, Y)$ resp. $\mathscr{C}_s(X, Y)$. Letzterer ist genau dann *topologisch*, wenn Y topologisch ist. Der Einfachheit halber ersetzen wir das Zeichen $\mathscr{C}(X, \mathfrak{R})$ durch $\mathscr{C}(X)$. Die beiden Räume $\mathscr{C}_c(X)$ und $\mathscr{C}_s(X)$ sind limitierte $\mathfrak{R}$-Algebren (s. [1]).

Für jedes $f \in \mathscr{C}(X, Y)$ ist die Abbildung

$$f^*: \mathscr{C}_c(Y) \longrightarrow \mathscr{C}_c(X),$$

welche jedes $g \in \mathscr{C}_c(Y)$ in $g \circ f \in \mathscr{C}_c(X)$ überführt, ein stetiger Homomorphismus.

1.3. Jedes Element x aus einem Limesraum X induziert einen stetigen Homomorphismus

$$i_X(x): \mathscr{C}_c(X) \longrightarrow \mathfrak{R},$$

definiert durch $i_X(x)(f) = f(x)$ für jedes $f \in \mathscr{C}_c(X)$ (s. [2]). Die Abbildung

$$i_X: X \longrightarrow \mathscr{H}om_c \mathscr{C}_c(X)$$

(führt jedes $x \in X$ in $i_X(x)$ über) ist nach [2] ebenfalls stetig. Weil

$$id: \mathscr{H}om_c \mathscr{C}_c(X) \longrightarrow \mathscr{H}om_s \mathscr{C}_c(X)$$

stetig ist (s. [2]) muss

$$i_X: X \longrightarrow \mathscr{H}om_s \mathscr{C}_c(X)$$

auch stetig sein.

Wie in [2] steht $I(X)$ für $i_X(X) \subset \mathscr{H}om\,\mathscr{C}_c(X)$. Durch Einführen der Limitierung der stetigen resp. der punktweisen Konvergenz auf $I(X)$ erhält man die Limesräume $I_c(X)$ und $I_s(X)$. Dabei ist $I_s(X)$ als Unterraum von $\mathscr{H}om_s \mathscr{C}_c(X)$ ein *vollständig regulärer topologischer* Raum.

Satz 9 in [2] besagt, dass für jeden Limesraum X

$$id^*: \mathscr{C}(I_s(X)) \longrightarrow \mathscr{C}(I_c(X))$$

ein Isomorphismus ist. Der darauffolgende Satz 10 hält insbesondere fest, dass für jeden Limesraum X

$$i_X^*: \mathscr{C}_c(I_c(X)) \longrightarrow \mathscr{C}_c(X)$$

ein bistetiger Isomorphismus ist. Das gibt Anlass zur folgenden Definition (s. [2]):

DEFINITION 1. *Ein Limesraum X heisst c-einbettbar, falls $i_X: X \longrightarrow I_c(X)$ ein Homöomorphismus ist. Ein c-einbettbarer Limesraum X wird c-volleinbettbar genannt, falls $I(X) = \mathscr{H}om\,\mathscr{C}_c(X)$ gilt.*

Sei $\mathscr{C}^o(X)$ die $\mathfrak{R}$-Algebra aller *stetigen, beschränkten* Funktionen von X nach $\mathfrak{R}$.

LEMMA 1. *Für einen Limesraum X sei $I_c(X)$ ein kompakter, topologischer Raum. Dann gelten $\mathscr{C}(X) = \mathscr{C}^o(X)$ und $I(X) = \mathrm{Hom}\ \mathscr{C}^o(X)$.*

Der Beweis soll hier nur kurz skizziert werden. Die Voraussetzungen implizieren: $\mathscr{C}(I_c(X)) = \mathscr{C}^o(I_c(X))$ und folglich $\mathscr{C}(X) = \mathscr{C}^o(X)$. Aus 10.5.c, p. 142 in [8] folgert man $I(I_c(X)) = \mathrm{Hom}\,\mathscr{C}^o(I_c(X))$. Die Abbildung i_X^* induziert eine Bijektion von $I(X)$ auf $I(I_c(X))$, woraus $I(X) = \mathrm{Hom}\,\mathscr{C}^o(X)$ resultiert.

1.4. C. H. COOK und H. R. FISCHER führten in [6] den Begriff der *uniformen Limitierung* (*uniform convergence structure*) auf einer nicht-leeren Menge $E \times E$ ein. Dieser stellt eine Verallgemeinerung desjenigen der *uniformen Struktur* von BOURBAKI [3] dar. Die Menge E zusammen mit einer uniformen Limitierung heisst *uniformer Limesraum* (*uniform convergence space*). Jede uniforme Limitierung auf $E \times E$ induziert in natürlicher Weise eine Limitierung auf E. Die Menge E versehen mit dieser Limitierung heisse der zum betrachteten uniformen Limesraum *assoziierte Limesraum*. Sowohl den uniformen Limesraum, als auch den dazu assoziierten Limesraum werden wir fortan mit dem selben Symbol bezeichnen.

Für einen Limesraum X und einen uniformen Limesraum Y definierten die oben genannten Autoren auf $\mathscr{C}(X, Y)$ die *Limitierung der uniformen Konvergenz* (*the structure of uniform convergence*, s. [6], p. 98, § 2). Wir bezeichnen diese Limitierung mit Λ_u. Die Menge $\mathscr{C}(X, Y)$ versehen mit Λ_u heisse $\mathscr{C}_u(X, Y)$. Die Limitierung der uniformen Konvergenz auf $\mathscr{C}(X, Y)$ ist stets *feiner* als die Limitierung der stetigen Konvergenz (s. Theorem 6 in [6])! Sind speziell X ein topologischer und Y ein (im Sinne von [3]) uniformisierbarer Raum, so sind die Limitierung der uniformen Konvergenz und die Topologie der uniformen Konvergenz auf $\mathscr{C}(X, Y)$ identisch![1])

In unseren Betrachtungen in (2.) wird Λ_u stets auf $\mathscr{C}(X)$ definiert sein. Die uniforme Limitierung auf $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ sei stets die von der Addition in $\mathfrak{R}$ erzeugte uniforme Struktur im Sinne von [3].

1.5. Seien X ein Limesraum und Y ein uniformer Limesraum. Die Menge aller Abbildungen von X nach Y sei mit $\mathscr{F}(X, Y)$ bezeichnet. Eine nicht-leere Teilmenge

[1]) Die Aussage bleibt auch dann richtig, wenn X durch einen beliebigen Limesraum ersetzt wird.

$H \subset \mathscr{F}(X, Y)$ versehen mit der Limitierung der punktweisen Konvergenz heisse H_s. In [6] findet sich:

DEFINITION 2. *Es bezeichnen X ein Limesraum und Y ein uniformer Limesraum. Eine nicht-leere Teilmenge $H \subset \mathscr{F}(X, Y)$ heisst gleichstetig in $x_0 \in X$, falls*

$$d: X \longrightarrow \mathscr{C}_u(H_s, Y),$$

definiert durch $d(x)(f) = f(x)$ für jedes $x \in X$ und jedes $f \in H_s$, an der Stelle x_0 stetig ist.

H heisst gleichstetig, falls H in jedem $x \in X$ gleichstetig ist.

Wenn $H \subset \mathscr{F}(X, Y)$ gleichstetig ist, so sind alle Funktionen in H stetig, d.h. $H \subset \mathscr{C}(X, Y)$.

Eine nicht-leere Teilmenge $H \subset \mathscr{C}(X, Y)$ versehen mit der Limitierung der stetigen Konvergenz sei mit H_c bezeichnet. Sind H_c und H_s vermöge der Identität homöomorph, so drücken wir das oft durch $H_c = H_s$ aus.

LEMMA 2 (COOK und FISCHER). *Seien X ein Limesraum und Y ein uniformer Limesraum. Für eine gleichstetige Teilmenge $H \subset \mathscr{C}(X, Y)$ gilt $H_c = H_s$.*

LEMMA 3 (COOK und FISCHER). *Die Voraussetzungen seien wie in Lemma 2. Eine nicht-leere Teilmenge einer gleichstetigen Menge $M \subset \mathscr{C}(X, Y)$ ist gleichstetig.*

Eine nicht-leere Teilmenge $A \subset Z$ eines Limesraumes Z heisst *relativ kompakt*, falls die Adhärenz (s. [7]) $\bar{A}$ in Z kompakt ist.

SATZ VON ASCOLI (COOK und FISCHER). *Seien X ein Limesraum, Y ein separierter, uniformer Raum (im Sinne von [3]) und $H \subset \mathscr{C}(X, Y)$ eine nicht-leere Teilmenge. Genau dann ist $H \subset \mathscr{C}_c(X, Y)$ relativ kompakt, wenn H gleichstetig ist und*

$$H(x) = \{f(x) \mid f \in H, \quad x \in X \quad \textit{fest}\}$$

für jedes $x \in X$ in Y relativ kompakt ist.

Bemerkung: Sei (A, Λ) ein kompakter Unterraum des separierten Limesraumes Z. Dann gilt $A = \bar{A}$. Für jeden separierten Limesraum Y ist $\mathscr{C}_c(X, Y)$ separiert (s. [1]). Folglich ist mit einem kompakten Unterraum $H_c \subset \mathscr{C}_c(X, Y)$ die Menge H *relativ kompakt*.

2. Über kompakte $I_c(X)$

Weil für jeden Limesraum X die Limesalgebren $\mathscr{C}_c(I_c(X))$ und $\mathscr{C}_c(X)$ vermöge i_X^* bistetig isomorph sind, können wir an Stelle von $\mathscr{C}_c(X)$ das Objekt $\mathscr{C}_c(I_c(X))$ untersuchen. Für jeden kompakten Limesraum X ist $I_c(X)$ ebenfalls kompakt. Deshalb versuchen wir in diesem Paragraphen erst Näheres über den kompakten Limesraum

$I_c(X)$ zu erfahren, um später mit Hilfe von $\mathscr{C}_c(I_c(X))$ stärkere Aussagen über $\mathscr{C}_c(X)$ machen zu können.

2.1. Um etwas weitere Aufschlüsse zu erhalten, wählen wir für einen Limesraum X eine Teilmenge $H \subset \mathscr{H}om\,\mathscr{C}_c(X)$, die $I(X)$ umfasst, und versuchen festzustellen, wie einschränkend die Eigenschaft „kompakt“ für H_c ist. Es sei bemerkt, dass H_s topologisch ist.

Aus dem Satze von Ascoli und der Bemerkung in (1.5.) erhält man:

Lemma 4. *Wenn H_c kompakt ist, dann ist H gleichstetig.*

Die Lemmata 2 und 4 implizieren:

Lemma 5. *Wenn H gleichstetig ist, dann gilt $H_c = H_s$. Ist H_c kompakt, so ist er topologisch.*

Mehr über kompakte H_c erfahren wir (s. Satz 3), wenn wir die Beziehung zwischen der Kompaktheit von H_c und der Gleichstetigkeit von H eingehender studieren (s. Satz 1). Dazu benötigen wir die nächsten drei Lemmata.

Lemma 6. *$H_c = H_s$ impliziert, dass*

$$d : \mathscr{C}_c(X) \longrightarrow \mathscr{C}_c(H_c),$$

definiert durch $d(f)(h) = h(f)$ für jedes $f \in \mathscr{C}_c(X)$ und jedes $h \in H_c$, ein bistetiger Isomorphismus ist.

Vorerst verifiziert man, dass

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}_c(X) \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "id"'] & \mathscr{C}_c(H_c) \arrow[d, "i_X^*"] \\ & \mathscr{C}_c(X) \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm stetiger Abbildungen ist. (Hierin ist i_X aufgefasst als Abbildung von X in H.) Mithin muss d injektiv sein. $\mathrm{Hom}_s\mathscr{C}(X)$ bedeute den topologischen Raum gebildet aus der Menge aller Homomorphismen von $\mathscr{C}(X)$ nach $\mathfrak{R}$ und der Topologie der punktweisen Konvergenz. Aus 11.7. in [8] entnehmen wir, dass $I(X)$ in $\mathrm{Hom}_s\mathscr{C}(X)$ dicht liegt. Das bedeutet, dass $I(X) \subset H_s$ ebenfalls dicht liegt. Weil $H_c = H_s$ vorausgesetzt ist, muss daher i_X^* injektiv sein. Nun ergibt sich aus dem obigen Diagramm leicht die Surjektivität und hernach die Bistetigkeit von d.

Lemma 7. *Sei X ein vollständig regulärer topologischer Raum, für den $\mathscr{C}_c(X)$ eine topologische Algebra ist. Dann ist die Limitierung Λ_c auf $\mathscr{C}_c(X)$ die Topologie der kompakten Konvergenz.*

Unter den gemachten Voraussetzungen ist Λ_c eine Topologie. Diese ist nach [4], exercice 10c, §3, p. 72 identisch mit der Topologie der kompakten Konvergenz.

LEMMA 8. *Ein vollständig regulärer topologischer Raum X, für den*

$$id: \mathscr{C}_u(X) \longrightarrow \mathscr{C}_c(X)$$

ein Homöomorphismus ist, muss notwendigerweise kompakt sein.

Die Voraussetzungen implizieren: Λ_u auf $\mathscr{C}_u(X)$ ist die Topologie der gleichmässigen Konvergenz (s. 1.4) und ist mit der algebraischen Struktur von $\mathscr{C}(X)$ verträglich. Daher ist nach Lemma 7 Λ_c die Topologie der kompakten Konvergenz. Wir betrachten die Nullumgebung

$$U = \{f \in \mathscr{C}(X) | \; |f(x)| \leq 1 \quad \text{für jedes } x \in X\}$$

in $\mathscr{C}_u(X)$. Nach Voraussetzung enthält U eine Nullumgebung der Form

$$V = \{f \in \mathscr{C}(X) | \; |f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für jedes } x \in K\},$$

wobei $\varepsilon > 0 \in \mathfrak{R}$ und K eine kompakte Menge ist. Wenn nun $K \neq X$ wäre, so gäbe es ein $x \in X$, das nicht in K liegen würde. Nun ist X vollständig regulär und daher findet sich ein $f \in \mathscr{C}(X)$ mit $f(x) = 2$ und $f|K = 0$. Diese Funktion wäre offensichtlich in V aber nicht in U. Also ist $K = X$.

SATZ 1. *Sei X ein Limesraum. Eine Teilmenge $H \subset \mathscr{H}om\,\mathscr{C}_c(X)$ mit $H \supset I(X)$ ist genau dann gleichstetig, wenn H_c ein kompakter, topologischer Raum ist.*

Wenn H_c kompakt ist, so ist nach Lemma 4 H gleichstetig. Nun nehmen wir umgekehrt H als gleichstetig an. Dann gelten (s. Definition 2 und Lemma 5):

$$\text{(i)} \qquad d: \mathscr{C}_c(X) \longrightarrow \mathscr{C}_u(H_s) \text{ ist stetig}.$$

und

$$\text{(ii)} \qquad H_c = H_s.$$

Die Limitierung von $\mathscr{C}_u(H_s)$ ist feiner als diejenige von $\mathscr{C}_c(H_s)$ (s. 1.4). Daher folgert man aus (ii) und Lemma 6, dass

$$id: \mathscr{C}_u(H_s) \longrightarrow \mathscr{C}_c(H_c)$$

ein Homöomorphismus ist. Weil der Limesraum H_c wegen (ii) ein vollständig regulärer topologischer Raum ist, muss er nach Lemma 8 kompakt und topologisch sein.

2.2. Sei X ein Limesraum. $\mathscr{C}^0(X)$ bezeichne die $\mathfrak{R}$-Algebra aller stetigen, beschränkten Funktionen von X nach $\mathfrak{R}$. Weiter bezeichne $\mathrm{Hom}_s\,\mathscr{C}^0(X)$ den topologischen Raum, bestehend aus der Menge aller Homomorphismen von $\mathscr{C}^0(X)$ nach $\mathfrak{R}$ und der Topologie der punktweisen Konvergenz.

SATZ 2. *Für jeden Limesraum X ist* $\mathrm{Hom}_s\,\mathscr{C}^0(X)$ *kompakt.*

Weil $i_X^*: \mathscr{C}(I_s(X)) \longrightarrow \mathscr{C}(X)$ ein Isomorphismus ist (s. Satz 9 in [2]), sind

$\mathscr{C}^o(I_s(X))$ und $\mathscr{C}^o(X)$ vermöge $i_X^*|\mathscr{C}^o(I_s(X))$ isomorph. Daher sind $\mathrm{Hom}_s\mathscr{C}^o(I_s(X))$ und $\mathrm{Hom}_s\mathscr{C}^o(X)$ homöomorph. Es ist $I_s(X)$ ein vollständig regulärer topologischer Raum. Nach 11.5 und 11.9 in [8] ist $\mathrm{Hom}_s\mathscr{C}^o(I_s(X))$ kompakt. Also ist auch $\mathrm{Hom}_s\mathscr{C}^o(X)$ kompakt.

Satz 3. *Seien X ein Limesraum und $H\subset\mathscr{H}om\mathscr{C}_c(X)$ eine Teilmenge, welche $I(X)$ umfasst. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *H_c ist kompakt.*

(ii) *$I_c(X)$ und* $\mathrm{Hom}_s\mathscr{C}^o(X)$ *sind identisch.*

(ii) impliziert nach Satz 2 offensichtlich (i). Umgekehrt sei H_c kompakt. Dann sind H und $I(X)$ gleichstetig (s. Lemmata 4 und 3). Also ist nach Satz 1 der Raum $I_c(X)$ kompakt und nach Lemma 5 gar topologisch. Mit Hilfe von Lemma 1 schliessen wir nun $I_c(X)=\mathrm{Hom}_s\mathscr{C}^o(X)$.

Korollar 1. *Für jeden kompakten Limesraum X ist $I_c(X)=$* $\mathrm{Hom}_s\mathscr{C}(X)$.

Denn für jeden kompakten Limesraum X ist $I_c(X)$ kompakt und folglich ist die Behauptung nach Satz 3 wahr.

3. Kompaktheit und c-Einbettbarkeit

Hier nun soll angegeben werden, welche der kompakten Limesräume c-einbettbar (s. Definition 1 in (1.3)) sind.

3.1. Ein kompakter, c-einbettbarer Limesraum ist nach Satz 3 topologisch und es gilt $\mathscr{H}om_c\mathscr{C}_c(X)=\mathrm{Hom}_s\mathscr{C}(X)$. Umgekehrt ist jeder kompakte, topologische Raum c-volleinbettbar (s. [2]). Zusammengefasst können wir also sagen:

Satz 4. *Ein kompakter Limesraum ist genau dann c-einbettbar, wenn er topologisch ist. Jeder kompakte, topologische Raum X ist c-volleinbettbar und es gilt $\mathscr{H}om_c\mathscr{C}_c(X)=$* $\mathrm{Hom}_s\mathscr{C}(X)$.

Jeder Unterraum eines c-einbettbaren Limesraumes ist c-einbettbar. Also gilt:

Satz 5. *Jeder kompakte Unterraum eines c-einbettbaren Limesraumes ist topologisch.*

Für jeden Limesraum X ist $\mathscr{C}_c(X)$ c-einbettbar (s. [2]). Folglich ist jeder kompakte Unterraum von $\mathscr{C}_c(X)$ topologisch.

3.2. Nun sei X ein kompakter Limesraum. Der Limesraum $I_c(X)$ ist ebenfalls kompakt und nach Satz 3 sogar topologisch. Daher ist die Limitierung auf $\mathscr{C}_c(I_c(X))$ identisch mit der üblichen *Supremumsnormtopologie.* Also ist $\mathscr{C}_c(I_c(X))$ eine Banachalgebra. Die Abbildung

$$i_X^*:\mathscr{C}_c(I_c(X))\longrightarrow\mathscr{C}_c(X)$$

ist ein bistetiger Isomorphismus (s. 1.3). Daraus folgt:

Satz 6. *Für jeden kompakten Limesraum X ist $\mathscr{C}_c(X)$ eine Banachalgebra unter der üblichen Supremumsnorm.*

4. $\mathscr{C}_c$(X) als Banachalgebra

Der eben ausgesprochene Satz 6 führt uns nun zur Frage, für welche der c-einbettbaren Limesräume X die Limesalgebra $\mathscr{C}_c(X)$ eine Banachalgebra ist. Eine vollständige Antwort enthält Satz 9.

4.1. Sei X ein *pseudokompakter* Limesraum (d.h. alle stetigen Funktionen von X nach $\mathfrak{R}$ sind beschränkt). $\mathscr{C}(X)$ versehen mit der üblichen Supremumsnormtopologie heisse $\mathscr{C}_n(X)$.

Satz 7. *Sei X ein Limesraum, für den $\mathscr{C}_c(X)$ eine Banachalgebra ist. Dann ist X pseudokompakt und*

$$id: \mathscr{C}_c(X) \longrightarrow \mathscr{C}_n(X)$$

ist ein bistetiger Isomorphismus.

Wir weisen erst nach, dass jedes $f \in \mathscr{C}_c(X)$ beschränkt ist. Sei $V_0 = \{f \in \mathscr{C}_c(X) | \, \|f\| < 1\}$. Dabei bedeutet $f \rightarrow \|f\|$ die Norm in $\mathscr{C}_c(X)$. Es ist V_0 eine offene Nullumgebung. Alle Elemente in $e + V_0$ sind invertibel. Hierin bedeutet e das Einselement. Man wähle nun ein $\lambda \in \mathfrak{R}$ mit $|\lambda| \geqq 1$. Dann gilt

$$e + \lambda^{-1} \cdot V_0 \subset e + V_0 .$$

Also ist für jedes $f \in V_0$ die Funktion $e + \lambda^{-1} \cdot f$ invertibel, was $f(x) \neq -\lambda$ für jedes $x \in X$ bedeutet. Der Allgemeinheit von λ wegen folgt $|f(x)| < 1$ für alle $x \in X$. Also ist jede Funktion in V_0 beschränkt, was aber die Beschränktheit aller Funktionen in $\mathscr{C}_c(X)$ nach sich zieht. Daher ist X pseudokompakt. Wie man nun leicht verifiziert, ist id als Isomorphismus von der Banachalgebra $\mathscr{C}_c(X)$ auf die Banachalgebra $\mathscr{C}_n(X)$ stetig. Daher ist id sogar bistetig.

Lemma 9. *Für einen pseudokompakten, vollständig regulären topologischen Raum X ist $\mathscr{H}om_c \mathscr{C}_n(X)$ ein kompakter, topologischer Raum.*

Es bezeichne $\beta(X)$ die Stone-Čech'sche Kompaktifizierung (s. [8]) von X und $i_\beta : X \longrightarrow \beta(X)$ die (stetige) natürliche Inklusionsabbildung. Es ist

$$i_\beta^* : \mathscr{C}_n(\beta(X)) \longrightarrow \mathscr{C}_n(X)$$

ein bistetiger Isomorphismus. Deshalb ist

$$i_\beta^{**} : \mathscr{H}om_c \mathscr{C}_n(X) \longrightarrow \mathscr{H}om_c \mathscr{C}_n(\beta(X))$$

ein Homöomorphismus. Als kompakter, topologischer Raum ist $\beta(X)$ homöomorph zu $\mathscr{H}om_c \mathscr{C}_n(\beta(X))$. Mithin ist auch $\mathscr{H}om_c \mathscr{C}_n(X)$ kompakt und topologisch.

SATZ 8. *Wenn für einen Limesraum X die Limesalgebra $\mathscr{C}_c(X)$ eine Banachalgebra ist, dann ist $I_c(X)$ ein kompakter, topologischer Raum.*

Sei $\mathscr{C}_c(X)$ eine Banachalgebra. Einerseits wissen wir, dass

$$i_X^*: \mathscr{C}_c(I_c(X)) \longrightarrow \mathscr{C}_c(X)$$

ein bistetiger Isomorphismus ist. Wir folgern damit aus Satz 7: Es ist $I_c(X)$ pseudokompakt und $\mathscr{C}_c(I_c(X))$ und $\mathscr{C}_n(I_c(X))$ sind vermöge der Identität homöomorph. Anderseits sind $\mathscr{C}(I_c(X))$ und $\mathscr{C}(I_s(X))$ identisch. Also ist auch $I_s(X)$ pseudokompakt und

$$id: \mathscr{C}_c(I_c(X)) \longrightarrow \mathscr{C}_n(I_s(X))$$

ist bistetig. Jetzt folgern wir mit Hilfe von Lemma 9 die Kompaktheit von $\mathscr{H}om_c\mathscr{C}_c(I_c(X))$. Daraus schliessen wir, dass auch $\mathscr{H}om_c\mathscr{C}_c(X)$ kompakt ist. Aus Satz 3 lesen wir daher ab, dass $I_c(X)$ kompakt und topologisch ist.

Mit Hilfe der Sätze 4, 6 und 8 folgern wir abschliessend:

SATZ 9. *Für einen c-einbettbaren Limesraum X sind die folgenden Aussagen gleichwertig:*

(i) *X ist kompakt.*

(ii) *X ist kompakt und topologisch.*

(iii) *$\mathscr{C}_c(X)$ ist eine Banachalgebra.*

University of Michigan, Ann Arbor, Mich.

LITERATUR

[1] BINZ, E., und KELLER, H. H., *Funktionenräume in der Kategorie der Limesräume*, Ann. Acad. Sci. Fenn. [A], I, 383 (1966).
[2] BINZ, E., *Bemerkungen zu limitierten Funktionenalgebren*, Math. Ann. *175* (1968), 169–184.
[3] BOURBAKI, N., *Topologie général*, Chap. II, 3e ed., Act. Sci. Ind. 1142, Paris (1961).
[4] BOURBAKI, N., *Topologie général*, Chap. X, 3e ed., Act. Sci. Ind. 1084, Paris (1961).
[5] COCHRAN, A. C., *On uniform convergence structures and convergence spaces*, Diss., University of Oklahoma (1966).
[6] COOK, C. H., und FISCHER, H. R., *Equicontinuity and continuous convergence*, Math. Ann., *159* (1965), 94–104.
[7] FISCHER, H. R., *Limesräume*, Math. Ann. *137* (1959), 269–303.
[8] GILLMAN, L., und JERISON, M., *Rings of continuous functions* (Van Nostrand, Princeton 1960).

Eingegangen den 6. Juli 1967