Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 43 (1968)

Artikel: Différentiabilité de la composition et complétitude de certains espaces fonctionnels.

Autor: Bucher, Willi

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32922

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Différentiabilité de la composition et complétitude de certains espaces fonctionnels

par WILLI BUCHER [1])

Introduction

Dans [4], une théorie de différentiation a été développée pour la catégorie $\mathfrak{A}^{\#}$ des espaces vectoriels pseudo-topologiques dits «equable and admissible» qui contient les espaces vectoriels localement convexes séparés. Le présent travail examine à peu près le même problème dans la catégorie $\mathfrak{R}$ des espaces vectoriels dits raffinés. $\mathfrak{R}$ n'est pas une sous-catégorie de $\mathfrak{A}^{\#}$. $\mathfrak{A}^{\#}$ n'est pas non plus une sous-catégorie de $\mathfrak{R}$. En particulier un espace vectoriel localement convexe séparé en général n'est pas raffiné sauf s'il est normable. Les objets de $\mathfrak{A}^{\#}$ entrent quand même dans nos considérations car on peut raffiner les structures des objets de $\mathfrak{A}^{\#}$, c. à. d. on a un foncteur $^{\times}$ de $\mathfrak{A}^{\#}$ dans $\mathfrak{R}$. Si un objet E de $\mathfrak{A}^{\#}$ est topologique, l'objet correspondent $E^{\times}$ dans $\mathfrak{R}$ en général ne l'est pas, tandis que si E est complet, il en est de même de $E^{\times}$.

La catégorie $\mathfrak{P}_0^{\times}$ des espaces vectoriels pseudo-topologiques localement bornés ayant comme morphismes les applications de classe C_0 définies dans [4] (une condition qui, en général, est plus forte que la continuité) est examinée dans le deuxième paragraphe. L'espace vectoriel $\mathscr{C}_0(E_1; E_2)$ des morphismes $f: E_1 \to E_2$ de $\mathfrak{P}_0^{\times}$ sera muni d'une pseudo-topologie telle qu'on obtienne de nouveau un objet de $\mathfrak{P}_0^{\times}$ et telle qu'on ait un homéomorphisme linéaire entre $\mathscr{C}_0(E_1 \times E_2; E_3)$ et $\mathscr{C}_0(E_1; \mathscr{C}_0(E_2; E_3))$.

Les objets de la catégorie $\mathfrak{C}_k$ sont les espaces vectoriels raffinés et les morphismes les applications k-fois différentiables telles que la k-ième dérivée soit de classe C_0. De nouveau $\mathscr{C}_k(E_1; E_2)$ sera un objet de $\mathfrak{R}$.

Si E_1 et E_2 sont de dimension finie, alors $\mathscr{C}_k(E_1; E_2)$ contient exactement les applications k-fois continuement différentiables. Or, la pseudo-topologie définie là-dessus est strictement plus fine que la topologie de la convergence compacte, malgré que les suites (au sens usuel) qui convergent sont les mêmes par rapport aux deux structures (cf. (2.31)).

Pour des espaces raffinés E_1, E_2, E_3 la composition $c: \mathscr{C}_k(E_1; E_2) \times \mathscr{C}_{k+p}(E_2; E_3) \to \mathscr{C}_k(E_1.; E_3)$ est un morphisme de la catégorie $\mathfrak{C}_p$. En particulier, la loi de composition de la catégorie $\mathfrak{C}_\infty$ peut donc être considérée comme morphisme de cette catégorie.

[1]) Ce travail a été partiellement subventionné par le Fonds National Suisse pour la Recherche scientifique.

Pour une certaine classe d'espaces vectoriels raffinés, la complétitude de E_2 entraîne celle de $\mathscr{C}_k(E_1; E_2)$. Surtout en cherchant des structures vérifiant un résultat de ce genre nous sommes tombés sur les espaces vectoriels raffinés.

Les résultats trouvés dans [4] pour la catégorie $\mathfrak{A}^\#$ sont tous valables dans la catégorie $\mathfrak{R}$, et quelques-uns sont améliorés.

Les résultats de [4] qui sont applicables dans la catégorie $\mathfrak{R}$ n'ont pas été redémontrés. La connaissance de [4] est nécessaire pour une étude approfondie du présent travail. Pour une première lecture il suffit d'être familier avec la notion de filtre et de pseudo-topologie.

J'exprime à M. A. FRÖLICHER ma très vive reconnaissance pour l'aide et l'encouragement qu'il m'a apportés.

Table des Matières

§ 1. Quelques catégories d'espaces vectoriels pseudo-topologiques 259

1.1 Espaces vectoriels raffinés 259
1.2 Une méthode générale de raffinement des structures 260
1.3 Construction d'espaces raffinés à partir d'un espace admissible 260
1.4 La catégorie $\mathfrak{R}$ des espaces vectoriels raffinés et les foncteurs $^\circ$, $^\times$ et $^\#$ 261
1.5 Résultats divers 265

§ 2. Homéomorphismes canoniques dans la catégorie $\mathfrak{P}_0$ 265

2.1 L'objet $\mathscr{C}_0(E_1; E_2)$ 266
2.2 Le morphisme $c: \mathscr{C}_0(E_1; E_2) \times \mathscr{C}_0(E_2; E_3) \to \mathscr{C}_0(E_1; E_3)$ 267
2.3 Les morphismes $f \mapsto f^*$ et $g \mapsto g_*$ 268
2.4 L'homéomorphisme $\Psi: \mathscr{C}_0(E_1 \times E_2; E_3) \to \mathscr{C}_0(E_1; \mathscr{C}_0(E_2; E_3))$ 269
2.5 Sous-espace de $\mathscr{C}_0(E_1; E_2)$ 270
2.6 Complétitude de $\mathscr{C}_0(E_1; E_2)$ 273

§ 3. Calcul différentiel dans les objets de $\mathfrak{R}$ 274

3.1 Différentiabilité 275
3.2 Inégalité fondamentale et applications 276
3.3 Dérivée d'ordre supérieure d'une application composée 278

§ 4. La catégorie $\mathfrak{C}_k$ 279

4.1 L'objet $\mathscr{C}_k(E_1; E_2)$, $0 \leqslant k < \infty$ 279
4.2 L'objet $\mathscr{C}_\infty(E_1; E_2)$ 280
4.3 Morphismes élémentaires de $\mathfrak{C}_\infty$ 280
4.4 La loi de composition de $\mathfrak{C}_k$ 281
4.5 La composition comme morphisme de $\mathfrak{C}_k$ 282
4.6 L'homéomorphisme $\Phi: \mathscr{C}_\infty(E_2; \mathscr{C}_\infty(E_2; E_3)) \to \mathscr{C}_\infty(E_1 \times E_2; E_3)$ 285
4.7 Complétitude de $\mathscr{C}_k(E_1; E_2)$ 287

§ 1. Quelques catégories d'espaces vectoriels pseudo-topologiques

1.1 *Espaces vectoriels raffinés*

Soit E un espace vectoriel pseudo-topologique[2]), et soient $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ des filtres sur E. Nous utilisons les notations suivantes:

$\mathscr{X} \vee \mathscr{Y}$: $=\mathscr{X} \cap \mathscr{Y}$ (borne supérieure de $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$)

$\mathscr{X} \leqslant \mathscr{Y}$: $\Leftrightarrow \mathscr{X} \supset \mathscr{Y}$ ($\mathscr{X}$ est plus fin que $\mathscr{Y}$)

$\mathscr{X} \downarrow E$: $\mathscr{X}$ converge vers zéro dans E par rapport à la pseudo-topologie donnée. (En bref: $\mathscr{X}$ converge dans E)[3])

$\mathscr{X}^*$: le filtre engendré par les enveloppes convexes équilibrées X^* des $X \in \mathscr{X}$.

$E_1 \leqslant E_2$: $\Leftrightarrow E_1$ et E_2 sont les mêmes espaces vectoriels, et $\mathscr{X} \downarrow E_1$ entraîne $\mathscr{X} \downarrow E_2$ (E_1 est plus fin que E_2).

E°: L'espace vectoriel localement convexe le plus fin de ceux qui sont moins fins que E (D'après (2.7.8)[4]) on a: $\mathscr{X} \downarrow E^\circ \Leftrightarrow \mathscr{X} \leqslant \mathscr{U}^*$, où $\mathscr{U} = \bigvee_{\mathscr{X} \downarrow E} \mathscr{X}$).

$\mathscr{X}^-$: le filtre engendré par les adhérences $\bar{X}$ *par rapport à* E° des $X \in \mathscr{X}$.[5])

$\mathbf{V}$: le filtre sur $\mathbf{R}$ engendré par les intervalles fermés $I_\delta = [-\delta, \delta]$, où $\delta > 0$.

(1.1) Définition. *Un espace vectoriel* raffiné *E est un espace vectoriel pseudo-topologique vérifiant:*

(R_1) *E° est séparé.*

(R_2) $\mathscr{X} \downarrow E \Rightarrow \mathscr{X}^- \downarrow E$.

(R_3) $\mathscr{X} \downarrow E \Rightarrow \mathscr{X}^* \downarrow E$.

(R_4) $\mathscr{X} \downarrow E \Rightarrow$ *il existe $B \in \mathscr{X}$ tel que $\mathbf{V} \cdot B \downarrow E$ (où $\mathbf{V} \cdot B$ est le filtre engendré par les $I_\delta \cdot B$, $I_\delta \in \mathbf{V}$).*

Si $\mathbf{V} \cdot B \downarrow E$, on dira que B est *borné* dans E. Un espace vectoriel pseudo-topologique vérifiant (R_4) est dit *localement borné*. Ces deux notions ont le sens habituel, si E est un espace vectoriel topologique.

(1.2) Remarques

(1) (R_1) à (R_3) sont les conditions (7.1.1) pour un espace vectoriel *admissible*. Pour cela nous n'avons qu'à montrer que (7.1.1) entraîne (R_3). Soit $\mathscr{X} \downarrow E$ et considérons le filtre $\mathscr{Y} = (\mathscr{X} \vee (-\mathscr{X}))^\wedge$. On a $I_1 \cdot \mathscr{X} \leqslant \mathscr{Y} \downarrow E$ (voir p. 137 de [4]). De plus on obtient $(I_1 \cdot \mathscr{X})^* = (I_1 \cdot \mathscr{X})^\wedge$, car l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble équilibré est convexe et équilibrée (Voir p. 177 de [6]). Donc $\mathscr{X}^* \leqslant (I_1 \cdot \mathscr{X})^* = (I_1 \cdot \mathscr{X})^\wedge \leqslant \mathscr{Y}^\wedge = \mathscr{Y} \downarrow E$.

(2) Les espaces vectoriels pseudo-topologiques vérifiant (R_1) sont «quasi-topologiques localement convexes» au sens de A. Bastiani (cf. déf. 1.2 de [1]). De plus

---

[2]) Voir [3] ou [4].

[3]) On évite ainsi un symbole spécial pour la pseudo-topologie.

[4]) Les références contenant trois numéros séparés par deux points se rapportent toujours à [4].

[5]) Si différentes structures sur E sont considérées, on va préciser de quelle adhérence il s'agit.

la condition «(R)» de A. BASTIANI (même référence) est plus faible que (R_3).

(3) H. R. FISCHER [3] définit les «bornés de E» par rapport à E°. Notre définition est équivalente à celle de A. BASTIANI (définition 1.9 de [1]).

1.2 *Une méthode générale de raffinement de structures*

A chaque espace vectoriel pseudo-topologique E on peut associer un espace vectoriel localement borné $E^\times$ (E-croix) de la manière suivante:

(1.3) (a) *E et $E^\times$ sont les mêmes espaces vectoriels.*

(b) $\mathscr{X}\downarrow E^\times :\Leftrightarrow$ (1) $\mathscr{X}\downarrow E$

(2) *il existe $B\in\mathscr{X}$ tel que $\mathbf{V}\cdot B\downarrow E$.*

Avec cette définition $E^\times$ vérifie les axiomes d'un espace vectoriel pseudo-topologique. Cela résulte du fait que le système ϱ des bornés de E satisfait les conditions suivantes:

(1.4) (a) *$\{x\}\in\varrho$ pour tout $x\in E$.*

(b) *Si $A\subset B$ et $B\in\varrho$, alors $A\in\varrho$.*

(c) *Si $A\in\varrho$ et $B\in\varrho$, alors $A\cup B\in\varrho$ et $A+B\in\varrho$.*

(d) *Si $B\in\varrho$, alors $I_1\cdot B$ (l'enveloppe équilibrée de B) $\in\varrho$ et $\delta\cdot B\in\varrho$ pour tout $\delta\in\mathbf{R}$.*

(a) et (b) sont triviales. Pour (c) on n'utilise que $\mathbf{V}(A\cup B)=\mathbf{V}\cdot A\cup\mathbf{V}\cdot B$ et que $\mathbf{V}(A+B)\leqslant\mathbf{V}\cdot A+\mathbf{V}\cdot B$. Enfin $I_1\cdot\mathbf{V}=\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}\cdot\delta\leqslant\mathbf{V}$ pour tout $\delta\in\mathbf{R}$, d'où (d). Plus généralement n'importe quel système ϱ de sous-ensembles d'un espace vectoriel pseudo-topologique E ayant les propriétés (1.4), permet d'associer à E un espace vectoriel E_ϱ comme suit:

(1.5) (a) *E et E_ϱ sont les mêmes espaces vectoriels.*

(b) $\mathscr{X}\downarrow E_\varrho :\Leftrightarrow$ (1) $\mathscr{X}\downarrow E$

(2) $\mathscr{X}\cap\varrho\neq\emptyset$.

Par construction on a toujours

$E_\varrho\leqslant E$, donc la structure donnée de E est remplacée par une qui est plus fine.

Si ϱ est le système des bornés de E, nous notons $E^\times$ au lieu de E_ϱ. $^\times$ peut être considéré comme foncteur (voir 1.4).

Certains espaces vectoriels pseudo-topologiques définis à l'aide d'une limite inductive peuvent aussi être définis à l'aide d'une collection de sous-ensembles ϱ avec les propriétés (1.4). Nous donnons sans démonstration l'exemple suivant. Soit $L_\Lambda(E;F)$ l'espace vectoriel pseudo-topologique défini dans [5], et $L^\#(E;F)$ comme dans [4]. Soit $\varrho=\{H\subset L(E;F)$: il existe $\sigma\in\Omega$ tel que $H\subset L_\sigma(E;F)\}$. Alors on a $L_\Lambda(E;F)=(L^\#(E;F))_\varrho$.

1.3 *Construction d'espaces raffinés à partir d'un espace admissible*

(1.6) DÉFINITION. *Un* système raffinant *ϱ d'un espace vectoriel admissible E est une collection de sous-ensembles de E vérifiant* (1.4) *et*:

(e) *Tout élément de ϱ est borné dans E.*

(f) *Si B est un élément de ϱ, il en est de même de $B^\wedge$ (l'enveloppe convexe de B) et de $\bar{B}$ (l'adhérence de B par rapport à E°).*

(1.7) PROPOSITION. *Soit E un espace vectoriel admissible (c.à.d. un espace vectoriel pseudo-topologique vérifiant* (R_1) *à* (R_3) *de* (1.1)), *et soit ϱ un système raffinant de E. Alors E_ϱ défini par* (1.5) *est un espace vectoriel raffiné, et les bornés de E_ϱ sont exactement les éléments de ϱ.*

Démonstration. On vérifie facilement que E_ϱ est un espace vectoriel pseudo-topologique. On a $E_\varrho \leqslant E$, d'où $(E_\varrho)^\circ \leqslant E^\circ$. Donc si E° est séparé, alors a fortiori $(E_\varrho)^\circ$ l'est. Soit maintenant $A \subset E$, $\bar{A}$ l'adhérence par rapport à E° et $\bar{A}^\varrho$ l'adhérence par rapport à $(E_\varrho)^\circ$. On a $\bar{A}^\varrho \subset \bar{A}$, car la topologie de $(E_\varrho)^\circ$ est plus fine que celle de E°. Donc pour n'importe quel filtre sur E on obtient $\mathscr{X}^{-\varrho} \leqslant \mathscr{X}^-$. Soit $\mathscr{X} \downarrow E_\varrho$ et $B \in \mathscr{X} \cap \varrho$. Alors $\bar{B} \in \mathscr{X}^- \cap \varrho$, d'où $\mathscr{X}^- \downarrow E_\varrho$, donc $\mathscr{X}^{-\varrho} \downarrow E$. De plus $B^* = (I_1 \cdot B)^\wedge \in \mathscr{X}^* \cap \varrho$, d'où $\mathscr{X}^* \downarrow E$. Pour montrer ($R_4$), il suffit de prouver la deuxième affirmation de (1.7).

Soit $B \in \varrho$. Alors $I_1 \cdot B \in \mathbf{V} \cdot B \cap \varrho$, d'où $\mathbf{V} \cdot B \downarrow E_\varrho$ d'après (e). Inversement, si $\mathbf{V} \cdot B \downarrow E_\varrho$, il existe $\delta > 0$ tel que $I_\delta \cdot B \in \mathbf{V} \cdot B \cap \varrho$. On a $\delta \cdot (I_1 \cdot B) = I_\delta \cdot B$, d'où $I_1 \cdot B \in \varrho$ d'après (d). Donc $B \in \varrho$ car $B \subset I_1 \cdot B$.

(1.8) PROPOSITION. *Si E est un espace vectoriel admissible, alors $E^\times$ est raffiné.*

D'après (1.7) nous avons à montrer que les bornés de E forment un système raffinant de E. (1.4) a été démontré dans (1.3).

Pour tout $B \subset E$, $\delta \in \mathbf{R}$ on a $\delta \cdot B^* = (\delta \cdot B)^*$, car $x \in B^* \Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, où $x_i \in B$, $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leqslant 1$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$ (Voir p. 177 de [6]).

Donc

$$A \subset I_1 \cdot A \Rightarrow A^* \subset (I_1 \cdot A)^* \Rightarrow I_\delta \cdot A^* = \delta(I_1 \cdot A^*) = \delta \cdot A^* \subset \delta(I_1 \cdot A)^* = \\ = (\delta \cdot I_1 \cdot A)^* = (I_\delta \cdot A)^*$$

pour tout $\delta \in \mathbf{R}$, d'où $\mathbf{V} \cdot A^* \leqslant (\mathbf{V} \cdot A)^*$.

Soit maintenant $B = A^*$. $\bar{B}$ est de nouveau équilibré et convexe (voir p. 178 (5) de [6]), donc en particulier $I_1 \cdot \bar{B} = \bar{B}$. De la continuité de l'application $x \mapsto \delta \cdot x$ de E° dans E° (cf. (2.9.1)) on déduit:

$\delta \cdot \bar{B} \subset \overline{\delta \cdot B}$. Donc $I_\delta \cdot \bar{B} = \delta \cdot (I_1 \cdot \bar{B}) = \delta \cdot \bar{B} \subset \overline{\delta \cdot B} = \overline{\delta \cdot (I_1 \cdot B)} = \overline{I_\delta \cdot B}$, d'où $\mathbf{V} \cdot \bar{B} \leqslant \overline{\mathbf{V} \cdot B}$. Le reste est facile à vérifier.

1.4 *La catégorie $\mathfrak{R}$ des espaces vectoriels raffinés et les foncteurs $^\circ$, * et $^\times$*

Sauf mention expresse du contraire, les morphismes seront toujours les applications linéaires et continues. Nous désignons par

(1.9) $\mathfrak{P}$: la catégorie des espaces vectoriels pseudo-topologiques,
$\mathfrak{A}$: la catégorie des espaces vectoriels admissibles,
$\mathfrak{R}$: la catégorie des espaces vectoriels raffinés.

A tout objet E de $\mathfrak{P}$ on peut associer E°, $E^\#$ [6] ou $E^\times$. Alors en définissant $\ell^\circ = \ell^\# = \ell^\times = \ell$ pour les morphismes de $\mathfrak{P}$, on obtient des foncteurs. Ils sont idempotents, donc surjectifs. Pour des détails voir (2.7.8), (2.6.2), (2.9.1) et

(1.10) LEMME. *Soient E_1, E_2 des objets de $\mathfrak{P}$. Si $\ell: E_1 \to E_2$ est linéaire et continue, il en est de même de $\ell: E_1^\times \to E_2^\times$.*

Soit $\mathscr{X} \downarrow E^\times$. Alors $\mathscr{X} \downarrow E_1$, d'où $\ell(\mathscr{X}) \downarrow E_2$. Soit maintenant $B \in \mathscr{X}$ borné dans E_1. Alors $\mathbf{V} \cdot B \downarrow E_1$, d'où $\ell(\mathbf{V} \cdot B) = \mathbf{V} \cdot \ell(B) \downarrow E_2$. Donc $\ell(B)$ est borné dans E_2.

En considérant l'image de $\mathfrak{P}$ par ces foncteurs, on obtient donc:

(1.11) PROPOSITION

$\mathfrak{P}^\circ$ *est la catégorie de tous les espaces vectoriels localement convexes (non nécessairement séparés),*

$\mathfrak{P}^\#$ *est la catégorie de tous les espaces vectoriels dits «equable»* [7]*, et*

$\mathfrak{P}^\times$ *est la catégorie de tous les espaces vectoriels pseudo-topologiques localement bornés.*

(1.12) PROPOSITION

$\mathfrak{R} = \mathfrak{A}^\times = \mathfrak{P}^\times \cap \mathfrak{A}$.

$\mathfrak{R} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}^\times$ selon (1.1) et (1.10).

$\mathfrak{A}^\times \subset \mathfrak{R}$ a été démontré dans (1.8).

De plus on a $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{A}$ et $\mathfrak{R}^\times = \mathfrak{R}$, d'où $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{A}^\times$.

Le foncteur $^\#$ défini dans (2.6.2) remplace la structure pseudo-topologique d'un espace vectoriel par une qui est plus fine. De même pour le foncteur $^\times$. Or, on n'a ni $\mathfrak{P}^\# \subset \mathfrak{P}^\times$ ni $\mathfrak{P}^\times \subset \mathfrak{P}^\#$. Si E est un espace vectoriel localement convexe non normable, alors $E = E^\#$ (cf. (2.5.2)), mais $E^\times \neq E$.) Pour montrer qu'en général on n'a pas $\mathfrak{P}^\times \subset \mathfrak{P}^\#$, nous considérons l'exemple suivant: Soit $\mathbf{R}_1$ l'espace vectoriel $\mathbf{R}$ muni de la pseudo-topologie définie par: $\mathscr{X} \downarrow \mathbf{R}_1 :\Leftrightarrow$ Il existe $\delta > 0$ tel que $I_\delta \in \mathscr{X}$. On constate aisément que $\mathbf{R}_1$ est un objet de $\mathfrak{P}^\times$. Au lieu de montrer directement que $\mathbf{R}_1$ n'est pas un objet de $\mathfrak{P}^\#$, nous utilisons:

(1.13) PROPOSITION. *Si E_1 est un objet de $\mathfrak{P}^\times$, E_2 et E_3 des objets de $\mathfrak{P}^\circ$ alors en général la continuité d'une application bilinéaire $b: E_1 \times E_2 \to E_3$ à l'origine n'entraîne pas la continuité globale.*

Démonstration. Nous choisissons $E_1 = \mathbf{R}_1$, $E_2 = E_3 = \mathbf{R}$ (avec la topologie naturelle), et pour b la multiplication ordinaire. Soit $\mathscr{X} \downarrow \mathbf{R}_1$. Alors $\mathbf{V} \cdot \mathscr{X} \downarrow \mathbf{R}$, d'où $b: \mathbf{R}_1 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

---

[6] $E^\#$ (E-dièse) est introduit dans (2.6.2).

[7] E est «equable»: $\Leftrightarrow E = E^\#$ (voir [4]).

est continue au point (0, 0). Or, b n'est pas continue au point (0, 1), car $[I_1]\downarrow\mathbf{R}_1$, $[1]-1\downarrow\mathbf{R}$, mais $[I_1]\cdot[1]=[I_1]$ ne converge pas vers 0 dans $\mathbf{R}$!

(1.14) COROLLAIRE. $\mathbf{R}_1$ *n'est pas un objet de* $\mathfrak{P}^{\#}$.

Si $\mathbf{R}_1$ était un objet de $\mathfrak{P}^{\#}$ alors b: $\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ serait continue partout d'après (2.8.10).

(1.15) REMARQUE Soit $\mathscr{U}=\bigvee\{\mathscr{X}:\mathscr{X}\downarrow\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}\}$. Alors les filtres $\mathscr{U}_x=x+\mathscr{U}$ définissent une pseudo-topologie sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ («Hauptideal-Limitierung» de H. R. FISCHER [3] p. 273). Nous affirmons que les $\mathscr{U}_x$ ne sont pas les filtres des voisinages de x par rapport à une topologie (donc en particulier que Satz 6 de [3] p. 294 est faux).

Soit $U=\bigcup_{\delta\geqslant 1}(I_\delta\times I_{1/\delta})$. Alors $U\in\mathscr{U}$, car $U\in\mathscr{X}\times\mathbf{V}$ pour tout $\mathscr{X}\downarrow\mathbf{R}_1$. Supposons que U soit un voisinage de zéro par rapport à une topologie. Alors il existe $V\in\mathscr{U}$ tel que $U\in\mathscr{U}_x$ pour tout $x\in V$, c.à.d. pour tout $x\in V$ il existe $V_x\in\mathscr{U}$ tel que $x+V_x\subset U$. Soit $x_2>0$ tel que $x'=(0,x_2)\in V$ (x_2 existe car $V\in[0]\times\mathbf{V}$). $\mathbf{R}\times\{0\}\subset V_{x'}$, car $V_{x'}\in[I_\delta]\times[0]$ pour tout $\delta>0$. Donc $\mathbf{R}\times\{x_2\}\subset x'+V_{x'}\subset U$ ce qui donne une contradiction.

Pour obtenir les théorèmes des chapitres 3 et 4, nous supposerons toujours que les espaces vectoriels E_1, E_2 soient des objets de la catégorie $\mathfrak{R}=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P}^{\times}$. Pour les résultats correspondants obtenus dans [4], nous avons supposés que E_1, E_2 ... soient des objets de $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P}^{\#}$. On n'a pas $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P}^{\#}\subset\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P}^{\times}$, car un espace vectoriel localement convexe en général n'est pas localement borné. Or, on n'a pas non plus $\mathfrak{R}\subset\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P}^{\#}$:

(1.16) PROPOSITION. *En général un espace raffiné n'est pas un objet de* $\mathfrak{P}^{\#}$.

(1.17) LEMME. *Soit E un objet de $\mathscr{P}^{\times}$. Alors $\mathscr{X}\downarrow E^{\#}\Leftrightarrow$ il existe $B\subset E$ tel que $\mathscr{X}\leqslant\mathbf{V}\cdot\downarrow B$.*

Soit $\mathscr{X}\downarrow E^{\#}$. Alors il existe $\mathscr{Y}$ tel que $\mathscr{X}\leqslant\mathscr{Y}=\mathbf{V}\cdot\mathscr{Y}$. E étant un objet de $\mathscr{P}^{\times}$, il existe $B\in\mathscr{Y}$ tel que $\mathbf{V}\cdot B\downarrow E$. On a trivialement $\mathscr{Y}\leqslant[B]$, d'où $\mathbf{V}\cdot\mathscr{Y}\leqslant\mathbf{V}\cdot B$, donc $\mathscr{X}\leqslant\mathbf{V}\cdot B$. Inversement $\mathbf{V}\cdot(\mathbf{V}\cdot B)=\mathbf{V}\cdot B$. D'où, si $\mathscr{X}\leqslant\mathbf{V}\cdot B$ et $\mathbf{V}\cdot B\downarrow E$, on obtient $\mathscr{X}\downarrow E^{\#}$.

Soit $E=\{x\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$: il existe $m>0$ tel que $|x(n)|\leqslant m$ pour tout $n\in\mathbf{N}\}$ muni de la topologie localement convexe définie par le filtre $\mathscr{V}$ des voisinages de zéro engendré par la base $\{V_{k,\varepsilon}\}_{k\in\mathbf{N},\varepsilon>0}$, où $V_{k,\varepsilon}=\{x\in E:|x(i)|\leqslant\varepsilon$ pour $1\leqslant i\leqslant k\}$.

Soit $\delta>0$ et $B_\delta=\{x\in E:|x(k)|\leqslant\delta$ pour tout $k\in\mathbf{N}$. On vérifie facilement que

$$\varrho=\{A\subset E:\text{il existe }\delta>0\text{ tel que }A\subset B_\delta\}$$

est un système raffinant de E. Alors E_ϱ est un objet de $\mathfrak{R}$ d'après (1.7). D'après le lemme précédent et (1.7) on a: $\mathscr{X}\downarrow(E_\varrho)^{\#}\Leftrightarrow$ Il existe $\delta>0$ tel que $\mathscr{X}\leqslant\mathbf{V}\cdot B_\delta$. Or, $\mathbf{V}\cdot B_\delta=\mathbf{V}\cdot B_1$ pour tout $\delta>0$, d'où $(E_\varrho)^{\#}$ est topologique (cf. (2.4.4.)).

Considérons la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$x_n(m)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad n\neq m\\ 1 & \text{si} \quad n=m.\end{cases}$$

Alors pour le filtre $\mathscr{X}$ engendré par $X_k=\{x_n, n\geqslant k\}$, $k\in\mathbf{N}$ on a: $B_1\in\mathscr{X}$, et $\mathscr{X}\downarrow E$, d'où $\mathscr{X}\downarrow E_\varrho$. Or, $\mathscr{X}$ ne converge pas dans $(E_\varrho)^\#$, car $B_{\frac{1}{2}}\notin\mathscr{X}$. Donc $E_\varrho\neq(E_\varrho)^\#$.

c.q.f.d.

(1.18) LEMME. *Le foncteur composé* $^{\circ\times}$ *est idempotent.*

Soit E un objet de $\mathfrak{P}$. Alors $E^{\circ\times}\leqslant E^\circ$, donc $E^{\circ\times\circ}\leqslant(E^\circ)^\circ=E^\circ$, d'où $E^{\circ\times\circ\times}\leqslant E^{\circ\times}$. Inversement $E^{\circ\times}\leqslant E^{\circ\times\circ}$, d'où $E^{\circ\times}=(E^{\circ\times})^\times\leqslant E^{\circ\times\circ\times}$.

(1.19) LEMME. *Si E est raffiné, il en est de même de $E^\#$.*

$E^\#$ est admissible d'après (7.2.3). Si $\mathscr{X}\downarrow E^\#$, alors il existe un borné B de E tel que $\mathscr{X}\leqslant\mathbf{V}\cdot B$, donc $I_1\cdot B\in\mathscr{X}$. Or, tout borné de E est aussi un borné de $E^\#$, car $\mathbf{V}\cdot B=$ $=\mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot B)$. $E^\#$ est donc localement borné.

(1.20) PROPOSITION. Le diagramme ci-dessous jouit des propriétés suivantes:

(a) Toutes les inclusions (marquées par $\Rightarrow$) sont strictes.

(b) Tous les foncteurs indiqués sont surjectifs.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{P}^\circ \arrow[rr, leftarrow, "\circ"] & & \mathfrak{P}^\# \arrow[dl, "\#"] & \Leftarrow & \mathfrak{P}^\#\cap\mathfrak{A} \arrow[dr, "\circ"] & & & \\
& \mathfrak{P} \arrow[ul, "\circ"] \arrow[dl, "\circ\times"'] \arrow[dr, "\times"] & \Leftarrow & \mathfrak{A} \arrow[ur, "\#"] \arrow[rr, "\circ"] \arrow[dr, "\times"'] & & \mathfrak{A}\cap\mathfrak{P}^\circ \arrow[r, phantom, "\Leftarrow"] & \mathfrak{R}\cap\mathfrak{P}^\circ \arrow[d, "\Downarrow"] \\
\mathfrak{P}^{\circ\times} & & \mathfrak{P}^\times & \Leftarrow & \mathfrak{R} \arrow[rr, "\#"] & & \mathfrak{R}\cap\mathfrak{P}^\#
\end{tikzcd}$$

(a) Nous choisissons les exemples suivants: $E_1=C_0(\mathbf{R};\mathbf{R})$ (Espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ muni de la topologie de la convergence compacte).

$E_2=L(E_1;\mathbf{R})$ (Espace des applications linéaires ℓ: $E_1\to\mathbf{R}$ muni de la pseudo-topologie: $\mathscr{L}\downarrow E_2:\Leftrightarrow\mathbf{V}\cdot\mathscr{X}\downarrow E_1$ entraîne $\mathscr{L}(\mathscr{X})\downarrow\mathbf{R}$). $\mathbf{R}_1$ comme dans (1.13).

$E_2^{\times\#}$ est un objet de $\mathfrak{R}\cap\mathfrak{P}^\#$ d'après (7.4.6), (1.8) et (1.19). D'après (6.2.2) l'évaluation $e:L(E_1;\mathbf{R})\times E_1\to\mathbf{R}$ est continue. On a $E_2^{\times\#}\times E_1\leqslant E_2\times E_1$, d'où $e:E_2^{\times\#}\times E_1\to\mathbf{R}$ est aussi continue. E_1 n'étant pas normable, on déduit du corollaire 3 de H. H. KELLER (p. 268 de [5]) que E_2 et $E_2^{\times\#}$ ne sont pas topologiques, d'où les inclusions $\mathfrak{R}\cap\mathfrak{P}^\circ\subset\mathfrak{R}\cap\mathfrak{P}^\#$, $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P}^\circ\subset\mathfrak{A}$, $\mathfrak{P}^\circ\subset\mathfrak{P}$, $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P}^\circ\subset\mathfrak{P}^\#$ et $\mathfrak{P}^\circ\subset\mathfrak{P}^\#$ sont strictes. Il est bien connu que E_1 est localement convexe mais n'est pas localement borné, donc les inclusions $\mathfrak{R}\cap\mathfrak{P}^\circ\subset\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P}^\circ$, $\mathfrak{P}^\times\subset\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{R}\subset\mathfrak{A}$ sont strictes. De plus l'exemple (1.16) montre qu'il en est de même de $\mathfrak{R}\cap\mathfrak{P}^\#\subset\mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}^\#\cap\mathfrak{A}\subset\mathfrak{A}$, $\mathfrak{P}^\#\subset\mathfrak{P}$. Soit $\mathbf{R}_0$ l'espace vectoriel $\mathbf{R}$ muni de la topologie grossière. Nous affirmons que $(\mathbf{R}_1)^\circ=\mathbf{R}_0$. En effet, soit $U\in\mathscr{U}=$ $\bigvee_{\mathscr{X}\downarrow\mathbf{R}_1}\mathscr{X}$. Alors $U\in\mathscr{X}$ pour tout $\mathscr{X}\downarrow\mathbf{R}_1$. Donc $U\in[x]$ pour tout $x\in\mathbf{R}$ (car $I_{|x|}\in[x]$ pour tout $x\neq0$!), d'où $x\in U$ pour tout $x\in\mathbf{R}$. Cet exemple montre que $\mathfrak{R}\subset\mathfrak{P}^\times$ et $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{P}^\#$ sont strictes. $\mathbf{R}_0$ est un objet de $\mathfrak{P}^\#$, d'où $\mathfrak{P}^\#\cap\mathfrak{A}\subset\mathfrak{P}^\#$ est stricte. Enfin $\mathbf{R}_1$ est un objet de $\mathfrak{P}^\times$, mais on a $(\mathbf{R}_1)^{\circ\times}=\mathbf{R}_0\neq\mathbf{R}_1$, d'où $\mathfrak{P}^\times\subset\mathfrak{P}^{\circ\times}$ et $\mathfrak{P}^{\circ\times}\subset\mathfrak{P}$ sont strictes.

(b) Pour tout foncteur indiqué dans le diagramme on a une inclusion dans le sens inverse, d'où ces foncteurs sont bien surjectifs (cf. (1.18), (1.19), (1.12) et (7.2.3)).

(1.21) COROLLAIRE. $\mathfrak{P}^{\#} \cap \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{\#}, \mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}^{\circ} = \mathfrak{A}^{\circ}, \mathfrak{R} \cap \mathfrak{P}^{\#} = \mathfrak{R}^{\#}, \mathfrak{R} = \mathfrak{A}^{\times}$ et $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}^{\circ\times} = \mathfrak{A}^{\circ\times}$.

Les objets de $\mathfrak{P}^{\circ\times}$ jouent un rôle important pour certaines questions de complétitude (voir § 2).

1.5 *Résultats divers*

(1.22) DÉFINITION. Un espace vectoriel pseudo-topologique E est dit *complet*, si $\mathscr{X} - \mathscr{X} \downarrow E$ entraîne l'existence d'un $x \in E$ tel que $\mathscr{X} - x \downarrow E$.

(1.23) PROPOSITION. *Si E est un espace vectoriel pseudo-topologique complet et ϱ un système de sous-ensembles de E vérifiant* (1.4), *alors E_ϱ défini dans* (1.5) *est complet.*

Soit $\mathscr{X} - \mathscr{X} \downarrow E_\varrho$. Alors $\mathscr{X} - \mathscr{X} \downarrow E$. Donc il existe $x \in E$ tel que $\mathscr{X} - x \downarrow E$. $(\mathscr{X} - \mathscr{X}) \cap \varrho \neq \emptyset$, d'où il existe $B \in \mathscr{X}$ tel que $B - B \in \varrho$. Soit $a \in B$. Alors $B - x = (B - a) + (a - x) \subset (B - B) + (a - x)$, d'où $B - x \in (\mathscr{X} - x) \cap \varrho$, donc $\mathscr{X} - x \downarrow E_\varrho$.

(1.24) PROPOSITION. *Soit E un espace vectoriel, $E_1, E_2, \ldots, E_n$* des objets de $\mathfrak{P}^{\times}$, et $f_i : E \to E_i$, $i = 1, \ldots, n$ des applications linéaires. Alors E muni de la pseudo-topologie la moins fine sur E qui rend continue les f_i est un objet de $\mathfrak{P}^{\times}$.

On a par définition: $\mathscr{X} \downarrow E \Leftrightarrow f_i(\mathscr{X}) \downarrow E_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Soit $B_i \in \mathscr{X}$ tel que $\mathbf{V} \cdot f_i(B_i) \downarrow E_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors $\bigcap_{i=1}^{n} B_i = B \in \mathscr{X}$, et $\mathbf{V} \cdot B \downarrow E$, d'où E est localement borné.

(1.25) COROLLAIRE. *Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des objets de $\mathfrak{P}^{\times}$, alors $E_1 \times \cdots \times E_n$ est un objet de $\mathfrak{P}^{\times}$.*

(1.26) COROLLAIRE. *Si E_1 est un objet de $\mathfrak{P}^{\times}$, E_2 un sous-escape de E_1 muni de la pseudo-topologie induite par l'inclusion dans E_1, alors E_2 est un objet de $\mathfrak{P}^{\times}$.*

§ 2. Homéomorphismes canoniques dans la catégorie $\mathfrak{P}_0^{\times}$

(2.1) DÉFINITION. Les objets de la catégorie $\mathfrak{P}_0^{\times}$ sont les objets de $\mathfrak{P}^{\times}$, c.à.d. les espaces vectoriels pseudo-topologiques localement bornés. Les morphismes[8]) sont les applications de classe C_0 définies dans (2.8.4).

(2.2) PROPOSITION. $f : E_1 \to E_2$ est un morphisme de $\mathfrak{P}_0^{\times} \Leftrightarrow$ Pour tout borné B de E_1 et tout filtre $\mathscr{X} \downarrow E_1$ on a $\mathbf{V} \cdot f(B) \downarrow E_2$ et $\Delta f(B, \mathscr{X}) \downarrow E_2$.[9])

(2.3) LEMME. *Si E est un objet de $\mathfrak{P}^{\times}$, alors $\mathbf{V} \cdot \mathscr{X} \downarrow E \Leftrightarrow$ il existe un borné B dans E tel que $\mathscr{X} \leqslant [B]$ (c.à.d. $B \in \mathscr{X}$).*

---

[8]) Dans ce paragraphe, nous entendons par morphisme toujours un morphisme de $\mathfrak{P}_0^{\times}$.

[9]) $\Delta f(a, x) = f(a + x) - f(a)$.

Si $\mathbf{V}\cdot\mathscr{X}\downarrow E$, alors il existe $\delta>0$, $A\in\mathscr{X}$ tel que $I_\delta\cdot A$ soit borné dans E. $1/\delta(I_\delta\cdot A)= = I_1\, A\supset A$, d'où A est borné dans E (voir (1.3)). Or, $A\in\mathscr{X}$ est équivalent à $\mathscr{X}\leqslant[A]$. Inversement, si $\mathscr{X}\leqslant[B]$ et B est borné, alors $\mathbf{V}\cdot\mathscr{X}\leqslant\mathbf{V}\cdot[B]\downarrow E$. La proposition en résulte.

2.1 *L'objet* $\mathscr{C}_0(E_1;E_2)$

L'espace vectoriel des morphismes $f:E_1\to E_2$ (cf. (2.8.4)) sera muni d'une pseudo-topologie telle qu'on obtienne de nouveau un objet de $\mathfrak{P}_0^\times$ qui sera dénoté par $\mathscr{C}_0(E_1;E_2)$. En général $\mathscr{C}_0(E_1;E_2)$ sera donc différent de $C_0(E_1;E_2)$ (défini dans (2.8.4) et (6.1.3)) quant à la structure.

(2.4) Définition. Un sous-ensemble H de $\mathscr{C}_0(E_1;E_2)$ est dit de classe C_0, si
(1) $\mathbf{V}\cdot B\downarrow E_1\Rightarrow\mathbf{V}\cdot H(B)\downarrow E_2$
(2) $\mathbf{V}\cdot B\downarrow E_1, \mathscr{X}\downarrow E_1\Rightarrow\Delta\, H(B,\mathscr{X})\downarrow E_2$.

(2.5) Proposition. *La collection* ϱ *des sous-ensembles de classe* C_0 *de* $C_0(E_1;E_2)$ *vérifie* (1.4). *Si de plus* E_2 *est raffiné, alors* ϱ *est un système raffinant de* $C_0(E_1;E_2)$.

(a) Si $f\in C_0(E_1;E_2)$, alors $\{f\}\in\varrho$ par définition. Les autres propriétés on vérifie en se basant sur les relations suivantes, qui sont valables pour tout $A\subset E_1$, tout filtre $\mathscr{X}$ de E_1 et tout $H\subset C_0(E_1;E_2)$:

(b) Si $H_1\subset H_2$, alors $H_1(A)\subset H_2(A)$ et $\Delta\, H_1(A,\mathscr{X})\leqslant\Delta\, H_2(A,\mathscr{X})$.

(c) $(H_1\cup H_2)(A)\subset H_1(A)\cup H_2(A)$ et $\Delta(H_1\cup H_2)(A,\mathscr{X})\leqslant\Delta\, H_1(A,\mathscr{X})\vee \Delta\, H_2(A,\mathscr{X})$. De même on a: $(H_1+H_2)(A)\subset H_1(A)+H_2(A)$ et $\Delta(H_1+H_2)(A,\mathscr{X})\leqslant \Delta\, H_1(A,\mathscr{X})+\Delta\, H_2(A,\mathscr{X})$, car Δ est linéaire.

(d) $\Delta\,\delta\cdot H=\delta\cdot\Delta\, H$ et $\Delta\, I_1\cdot H=I_1\cdot\Delta\, H$.

(e) $H^*(A)\subset(H(A))^*$ et $\Delta\, H^*(A,\mathscr{X})\leqslant(\Delta\, H(A,\mathscr{X}))^*$

(f) D'après (7.4.3) on a $\bar{H}(A)\subset\overline{H(A)}$.

Mais l'application $f\mapsto f(x)$ de $C_0(E_1;E_2)$ dans E_2 étant continue pour tout $x\in E_1$, il en est de même de $f\mapsto\Delta f(a,x)$ pour tout a et x dans E_1, donc les arguments donnés dans (7.4.3) montrent aussi que $\Delta\,\bar{H}(A,\mathscr{X})\leqslant(\Delta\, H(A,\mathscr{X}))^-$.

(2.6) Définition. $\mathscr{C}_0(E_1;E_2):=C_0(E_1;E_2)_\varrho$. On a donc explicitement:

(2.7) $\mathscr{F}\downarrow\mathscr{C}_0(E_1;E_2)\Leftrightarrow$
(1) $\mathbf{V}\cdot B\downarrow E_1\Rightarrow\mathscr{F}(B)\downarrow E_2$
(2) Il existe $H\in\mathscr{F}$ tel que H est de classe C_0.

(2.8) Proposition. $\mathscr{C}_0(E_1;E_2)$ *est un objet de* $\mathfrak{P}^\times$. *Si de plus* E_2 *est un objet de* $\mathfrak{R}$, *il en est de même de* $\mathscr{C}_0(E_1;E_2)$.

Suit de (2.5), (1.5), (1.7) et du fait que les éléments de ϱ sont bornés dans $C_0(E_1; E_2)$.

(2.9) PROPOSITION. *Si E_1, E_2 sont des objets de $\mathfrak{P}$ et $f: E_1 \to E_2$ est de classe C_0 (voir (2.8.4)), alors $f: E_1^\times \to E_2^\times$ est un morphisme de $\mathfrak{P}_0^\times$.*

Soit $\mathbf{V}\cdot B \downarrow E_1^\times$. Alors $\mathbf{V}\cdot B \downarrow E_1$, donc $\mathbf{V}\cdot f(B) \downarrow E_2$. Or, E_2 et $E_2^\times$ ont les mêmes bornés (cf. dém. de (1.7)), donc $\mathbf{V}\cdot f(B) \downarrow E_2^\times$.

Soit $\mathscr{X} \downarrow E_1^\times$. Alors il existe $X \in \mathscr{X}$ tel que $\mathbf{V}\cdot X \downarrow E_1$. On a $\Delta f(B, X) \subset f(B+X) - f(B)$, donc $\Delta f(B, X)$ est borné dans E_2. On en déduit que $\Delta f(B, \mathscr{X}) \downarrow E_2^\times$.

Si $\mathfrak{P}_0$ est la catégorie dont les objets sont ceux de $\mathfrak{P}$ et dont les morphismes sont les applications de classe C_0, on a de nouveau un foncteur

$$^\times : \mathfrak{P}_0 \to \mathfrak{P}_0^\times \qquad \text{en définissant} \qquad f^\times = f$$

pour les morphismes (cf. 1.9).

2.2 *Le morphisme $c: \mathscr{C}_0(E_1; E_2) \times \mathscr{C}_0(E_2; E_3) \to \mathscr{C}_0(E_1; E_3)$*

(2.10) LEMME. *Si $H_1 \subset \mathscr{C}_0(E_1; E_2)$ et $H_2 \subset \mathscr{C}_0(E_2; E_3)$ sont de classe C_0, il en est de même de $H_2 \circ H_1 \subset \mathscr{C}_0(E_1; E_3)$.*

Soit $\mathbf{V}\cdot A, \mathscr{X} \downarrow E_1$. Alors $\mathbf{V}\cdot(H_2 \circ H_1)(A) = \mathbf{V}\cdot H_2(H_1(A)) \downarrow E_3$. De l'égalité $\Delta(f_2 \circ f_1)(a, x) = \Delta f_2(f_1(a), \Delta f_1(a, x))$ on déduit[10]:

$$\Delta(H_2 \circ H_1)(A, \mathscr{X}) \leqslant \Delta H_2(H_1(A), \Delta H_1(A, \mathscr{X})) \downarrow E_3.$$

(2.11) COROLLAIRE. *Si $f_1 \in \mathscr{C}_0(E_1; E_2)$ et $f_2 \in \mathscr{C}_0(E_2; E_3)$, alors $f_2 \circ f_1 \in \mathscr{C}_0(E_1; E_3)$.*

(2.12) THÉORÈME. *Soit c la loi de composition de la catégorie $\mathfrak{P}^\times$. Alors*

$$c: \mathscr{C}_0(E_1; E_2) \times \mathscr{C}_0(E_2; E_3) \to \mathscr{C}_0(E_1; E_3)$$

est un morphisme.

Soit $\mathbf{V}\cdot(H_1 \times H_2)$[11], $\mathscr{F} \times \mathscr{G} \downarrow \mathscr{C}_0(E_1; E_2) \times \mathscr{C}_0(E_2; E_3)$. Alors $\mathbf{V}\cdot c(H_1 \times H_2) = \mathbf{V}\cdot(H_2 \circ H_1) \downarrow \mathscr{C}_0(E_1; E_3)$ ce qui suit facilement de (2.10) et (2.6).

Soit $\mathbf{V}\cdot A \downarrow E_1$. Alors $(\Delta c(H_1 \times H_2, \mathscr{F} \times \mathscr{G}))(A) \leqslant \Delta H_2(H_1(A), \mathscr{F}(A)) + \mathscr{G}(H_1(A) + \mathscr{F}(A)) \downarrow E_3$, car $\mathscr{F}(A) \downarrow E_1$ et contient un élément borné.

L'inégalité résulte de (11.1.5) et (1.5.2). De plus nous pouvons choisir un élément $F \times G \in \mathscr{F} \times \mathscr{G}$ tel que F et G soit de classe C_0.

Alors $\Delta c(H_1 \times H_2, F \times G)$ est de classe C_0, car c'est un sous-ensemble de $(H_2 + G) \circ (H_1 + F) - H_2 \circ H_1$ qui est de classe C_0 d'après (2.10) et (2.6). On a donc $\Delta c(H_1 \times H_2, \mathscr{F} \times \mathscr{G}) \downarrow \mathscr{C}_0(E_1; E_3)$.

---

[10]) Les conclusions de ce genre se basent toujours sur (1.5.2).

[11]) Comme dans (1.7) on constate aisément que les bornés de $\mathscr{C}_0(E_1; E_2)$ sont exactement les sous-ensembles de classe C_0.

2.3 *Les morphismes $f \mapsto f^*$ et $g \mapsto g_*$*

Soit $\mathfrak{K}$ une catégorie ayant comme objets des ensembles munis d'une structure[12]) et comme morphismes des applications. Soit $\mathfrak{E}$ la catégorie ayant les mêmes objets et comme morphismes toutes les applications. Supposons que dans $\mathfrak{K}$ on ait:

1. une loi qui associe à tout couple d'objet E_1, E_2 un nouvel objet (que nous dénotons par $\mathscr{C}(E_1, E_2)$) tel que l'ensemble sous-jacents contienne exactement les morphismes $f: E_1 \to E_2$ de $\mathfrak{K}$,

2. une loi qui associe à tout couple d'objets un nouvel objet (dénoté par $E_1 \times E_2$) tel que l'ensemble sous-jacent soit le produit cartésien des ensembles sous-jacent de E_1 et E_2 et tel que pour n'importe quel objet E une application $f: E \to E_1 \times E_2$ soit un morphisme de $\mathfrak{K}$ si et seulement si $\pi_1 \circ f$ et $\pi_2 \circ f$ le sont, où $\pi_i: E_1 \times E_2 \to E_i$, $i=1$, 2, sont les projections.[13])

3. Les applications constantes sont des morphismes de $\mathfrak{K}$.

(2.13) PROPOSITION. *Supposons que les applications*

$$c: \mathscr{C}(E_1, E_2) \times \mathscr{C}(E_2, E_3) \to \mathscr{C}(E_1, E_3)$$

définie par $c(f, g) = g \circ f$,

$$\alpha: \mathscr{C}(E, E_1) \times \mathscr{C}(E, E_2) \to \mathscr{C}(E, E_1 \times E_2)$$

définie par $\alpha(f, g) = [f, g]$, *où* $[f, g](x) = (f(x), g(x))$, *et*

$$\gamma: E_2 \to \mathscr{C}(E_1, E_2), \quad \text{où} \quad \gamma(y) = y^\circ$$

est l'application constante $x \mapsto y$, soient des morphismes de $\mathfrak{K}$.

Alors l'équation $\mathscr{C}(f, g).\ \varphi = g \circ \varphi \circ f$ *définit une application*

$$\mathscr{C}: \mathscr{C}(E_3, E_1) \times \mathscr{C}(E_2, E_4) \to \mathscr{C}(\mathscr{C}(E_1, E_2), \mathscr{C}(E_3, E_4))$$

qui est un morphisme de $\mathfrak{K}$. *De plus cette affirmation est équivalente à la suivante: les applications ci-dessous sont des morphismes de* $\mathfrak{K}$:

$$f^*: \mathscr{C}(E_1, E_4) \to \mathscr{C}(E_3, E_4), \quad \text{où} \quad f^*(\psi) = \psi \circ f,$$

$$g_*: \mathscr{C}(E_1, E_2) \to \mathscr{C}(E_1, E_4), \quad \text{où} \quad g_*(\varphi) = g \circ \varphi,$$

$$c_1: \mathscr{C}(E_3, E_1) \to \mathscr{C}(\mathscr{C}(E_1, E_4), \mathscr{C}(E_3, E_4))$$

---

[12]) La structure peut consister en plusieurs structures, p.e. une structure topologique et une structure de groupe. Quant à la notion de structure voir N. BOURBAKI: Théorie des ensembles, *R.* § 8.

[13]) On notera que le triple $(E_1 \times E_2, \pi_1, \pi_2)$ est un produit de E_1 et E_2. En particulier π_1 et π_2 sont des morphismes de $\mathfrak{K}$.

définie par $c_1(f)=f^*$, *et*

$$c_2:\mathscr{C}(E_2;E_4)\to\mathscr{C}(\mathscr{C}(E_1,E_2),\mathscr{C}(E_1,E_4))$$

définie par $c_2(g)=g_*$.

On a

$$f^*=c\circ[f^\circ,\mathrm{id}],\ g_*=c\circ[\mathrm{id},g^\circ],$$

donc on a bien

$$\mathscr{C}(f,g)=f^*\circ g_*\in\mathscr{C}(\mathscr{C}(E_1,E_2),\mathscr{C}(E_3,E_4))$$

De plus

$$c_1=c_*\circ\alpha\circ[\gamma,\mathrm{id}^\circ]$$

et

$$c_2=c_*\circ\alpha\circ[\mathrm{id}^\circ,\gamma],$$

d'où

$$\mathscr{C}=c\circ[c_1\circ\pi_1,c_2\circ\pi_2]$$

est un morphisme de $\mathfrak{K}$.

Pour finir on utilise:

$$f^*=\mathscr{C}(\mathrm{id},f),\qquad g_*=\mathscr{C}(g,\mathrm{id}),$$
$$c_1=\mathscr{C}\circ[\mathrm{id}^\circ,\mathrm{id}]\quad\text{et}\quad c_2=\mathscr{C}\circ[\mathrm{id},\mathrm{id}^\circ]$$

où il est évident de quelles identités et projections il s'agit.

(2.14) Exemple. $\mathfrak{K}=\mathfrak{P}_0^\times$ et $\mathscr{C}=\mathscr{C}_0$ *définis dans la section* 2.1 *vérifient les hypothèses de la proposition précédente.*

On utilise (2.12) pour c et (6.4.13) pour α. Finalement γ est linéaire, donc d'après (2.8.7) il suffit de montrer que γ est continue au point $0\in E_2$. Soit donc $\mathscr{Y}\downarrow E_2,\mathscr{X}$, $\mathbf{V}\cdot A\downarrow E_1$. On a $\gamma(\mathscr{Y})\cdot A=\mathscr{Y}\downarrow E_2$. De plus pour tout $B\in\mathscr{Y}$ tel que $\mathbf{V}\cdot B\downarrow E_2$, $\gamma(B)$ est de classe C_0, d'où le résultat.

En particulier $\mathscr{C}$ définie pour les objets dans la condition 1, et pour les morphismes dans (2.13) peut donc être considéré comme foncteur: $\mathfrak{K}\times\mathfrak{K}\to\mathfrak{K}$.

2.4 *L'homéomorphisme* $\Psi:\mathscr{C}_0(E_1\times E_2;E_3)\to\mathscr{C}_0(E_1;\mathscr{C}_0(E_2,E_3))$

(2.15) Proposition. *Soit* $\mathfrak{K}$ *une catégorie vérifiant les conditions* 1. *et* 2. *de* 2.3, *et supposons que* c *et* α *définis dans* (2.13) *soient des morphismes de* $\mathfrak{K}$.

(I) *Soit* $x\in E_1$, $g\in\mathscr{C}(E_1\times E_2,E_3)$. *Alors l'application* $(\Psi g)(x):E_2\to E_3$ *définie par* $(\Psi g)(x)\cdot y=g(x,y)$ *est un morphisme de* $\mathfrak{K}$ *si et seulement si les applications constantes sont des morphismes de* $\mathfrak{K}$. *De plus l'équation ci-dessus définit un morphisme* Ψ: $\mathscr{C}(E_1\times E_2,E_3)\to\mathscr{C}(E_1,\mathscr{C}(E_2,E_3))$ *si et seulement si* γ (*voir* (2.13)) *est un morphisme.*

(II) *Soit* $f\in\mathscr{C}(E_1,\mathscr{C}(E_2,E_3))$. *Alors l'application* $\Phi f:E_1\times E_2\to E_3$ *définie par* $(\Phi f)(x,y)=f(x)\cdot y$ *est un morphisme si et seulement si l'application d'évaluation*

$e:\mathscr{C}(E_2, E_3)\times E_2\to E_3$ l'est. Si de plus les applications constantes sont des morphismes, alors il en est de même de

$$\Phi:\mathscr{C}(E_1, \mathscr{C}(E_2, E_3))\to\mathscr{C}(E_1\times E_2, E_3).$$

(III) *En particulier, Ψ est un isomorphisme de la catégorie si et seulement si e et γ sont des morphismes.*

Démonstration. On a $(\Psi g)(x)=g\circ[x^\circ, \mathrm{id}_{E_2}]$.

Inversément $\pi_1\in\mathscr{C}(E_1\times E_2, E_1)$, d'où $(\Psi\pi_1)(x)=x^\circ$ est un morphisme.

Soit γ un morphisme de $\mathfrak{K}$. Alors $\mathfrak{K}$ vérifie les hypothèses de (2.13), donc

$$\Psi g = g_*\circ\alpha\circ[\gamma, \mathrm{id}^\circ]$$

est bien un élément de

$$\mathscr{C}(E_1, \mathscr{C}(E_2, E_3)), \qquad \text{et} \qquad \Psi = (\alpha\circ[\gamma, \mathrm{id}^\circ])^*\circ c_2$$

est un morphisme. Inversément, s'il en est ainsi, alors $\gamma=\Psi\pi_1$.

Analoguement on a $\Phi f=e\circ[f\circ\pi_1, \pi_2]$ et $\Phi=e_*\circ\alpha\circ[\pi_1^*, \pi_2^\circ]$, où $e_*=c\circ[\mathrm{id}, e^\circ]$ et $\pi_1^*=c\circ[\pi_1^\circ, \mathrm{id}]$. $e=\Phi(\mathrm{id})$, où id est l'identité sur $\mathscr{C}(E_2, E_3)$.

Finalement il est bien connu que $\Phi\circ\Psi$ et $\Psi\circ\Phi$ sont des identités.

(2.16) LEMME. *L'application d'évaluation*

$$e:\mathscr{C}_0(E_1; E_2)\times E_1\to E_2$$

est un morphisme de $\mathfrak{P}_0^\times$.

On vérifie facilement que l'application $v_0:\mathscr{C}(E_1; E_2)\to E_2$ définie par $v_0(f)=f(0)$ est un morphisme de $\mathfrak{P}_0^\times$. Donc il en est de même de $e=v_0\circ c\,[\gamma\circ\pi_2, \pi_1]$ d'après (2.14).

(2.17) THÉORÈME. *L'application linéaire*

$$\Psi:\mathscr{C}_0(E_1\times E_2; E_3)\to\mathscr{C}_0(E_1; \mathscr{C}_0(E_2; E_3))$$

définie par $(\Psi g)(x)\cdot y=g(x, y)$ est un homéomorphisme.

Découle de (2.16), (2.15) et (2.14).

2.5 *Sous-espaces de $\mathscr{C}_0(E_1; E_2)$*

Nous désignons par $\mathscr{L}(E_1, E_2; E_3)$ l'objet de $\mathfrak{P}_0^\times$ dont les éléments sont les morphismes bilinéaires et dont la structure est induite par l'inclusion dans $\mathscr{C}_0(E_1\times E_2; E_3)$ (cf. 1.26). De même par $\mathscr{L}_p(E_1; E_2)$ l'objet ayant comme éléments les morphismes p-linéaires de $E_1\times\cdots\times E_1$ dans E_2. Pour $p=1$, l'objet est dénoté par $\mathscr{L}(E_1; E_2)$.

On a donc explicitement:

(2.18) $\mathscr{F}\downarrow\mathscr{L}(E_1;E_2)\Leftrightarrow$

(1) $\mathbf{V}\cdot A\downarrow E_1 \Rightarrow \mathscr{F}(A)\downarrow E_2$

(2) Il existe $H\in\mathscr{F}$ tel que $H(\mathscr{X})\downarrow E_2$ pour tout $\mathscr{X}\downarrow E_1$.

En effet, si $H\subset\mathscr{L}(E_1;E_2)$, alors $\Delta H(A,\mathscr{X})=H(\mathscr{X})$ et $\mathbf{V}\cdot H(A)=H(\mathbf{V}\cdot A)$.

(2.19) REMARQUE. *Si E_1 est un objet de $\mathfrak{P}^\times$ et de $\mathfrak{P}^\#$, alors $\mathscr{L}(E_1;E_2)=L^\times(E_1;E_2)$, où $L(E_1;E_2)$ est muni de la structure définie dans* [4]. *En particulier on retrouve sur $\mathscr{L}(E_1;E_2)$ la topologie induite par la norme $\|\ell\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|\ell(x)\|$, si E_1 et E_2 sont normés.*

En vue de (6.1.10) nous n'avons qu'à démontrer la première affirmation, car si E_1, E_2 sont normés, on a:

$$L^\times(E_1;E_2)=L(E_1;E_2).$$

Par construction $\mathscr{L}(E_1;E_2)\leqslant L(E_1;E_2)$.

De plus, $\mathscr{L}(E_1;E_2)$ étant un objet de $\mathfrak{P}^\times$, on a:

$$\mathscr{L}(E_1;E_2)=\mathscr{L}^\times(E_1;E_2)\leqslant L^\times(E_1;E_2).$$

Soit $\mathscr{F}\downarrow L^\times(E_1;E_2)$, $\mathbf{V}\cdot A\downarrow E_1$. Alors $\mathscr{F}(A)\downarrow E_2$, car $L^\times(E_1;E_2)\leqslant L(E_1;E_2)$. Soit $H\in\mathscr{F}$ tel que $\mathbf{V}\cdot H\downarrow L(E_1;E_2)$, et soit $\mathscr{X}\downarrow E_1$ tel que $\mathscr{X}=\mathbf{V}\cdot\mathscr{X}$ (E_1 est supposé être un objet de $\mathfrak{P}^\#$). Alors $H(\mathscr{X})=H(\mathbf{V}\cdot\mathscr{X})=\mathbf{V}\cdot H(\mathscr{X})\downarrow E_2$, car $\mathscr{X}$ possède un élément borné de E_1. Donc:

$$L^\times(E_1;E_2)\leqslant\mathscr{L}(E_1;E_2).$$

(2.20) REMARQUE. *Une application bilinéaire $b:E_1\times E_2\to E_3$ qui est continue partout n'est pas nécessairement un élément de $\mathscr{L}(E_1,E_2;E_3)$.*

On définit sur l'espace vectoriel $\mathbf{R}$ la pseudo-topologie suivante:

(2.21) $\mathscr{X}\downarrow\mathbf{R}_2:\Leftrightarrow$ Il existe $x_1, x_2, \ldots, x_n\in\mathbf{R}$ ($n\in\mathbf{N}$ arbitraire) tels que $\mathscr{X}\leqslant\bigvee_{i=1}^{n}(x_i+\mathbf{V})$.[14]

On vérifie facilement que $\mathbf{R}_2$ est un objet de $\mathfrak{P}^\times$. En particulier la multiplication $b:\mathbf{R}\times\mathbf{R}_2\to\mathbf{R}_2$ est continue partout.

De (2.8.8) et (2.3) on déduit:

(2.22) $b\in\mathscr{L}(E_1,E_2;E_3)\Leftrightarrow\big(\mathbf{V}(A\times B),\mathscr{X}\times\mathscr{Y}\downarrow E_1\times E_2$ entraîne $b(A,\mathscr{Y}),b(\mathscr{X},B)\downarrow E_3\big)$.

On a $[1]\downarrow\mathbf{R}_2$, $\mathbf{V}\cdot I_1\downarrow\mathbf{R}$, mais $b([I_1]\times[1])=[I_1]$ ne converge pas dans $\mathbf{R}_2$.

(2.23) REMARQUE. Soit E un objet de $\mathfrak{A}^\circ$, c.à.d. une space vectoriel localement convexe. Alors en prenant (2.18) comme définition[15] et en utilisant les arguments de

---

[14] Exemple communiqué par S. COURANT, Berne.

[15] En effet, la définition n'était donnée que pour des objets de $\mathfrak{P}^\times$.

(2.19), on trouve $\mathscr{L}(\mathbf{R}; E) = L^{\times}(\mathbf{R}; E)$. D'autre part on a $L(\mathbf{R}; E) \approx E$ d'après (6.4.1), donc $\mathscr{L}(\mathbf{R}; E) \approx E^{\times}$. On voit donc que dans un certain sens les objets de $\mathfrak{P}$ qui ne sont pas localement bornés, ne sont pas «compatibles» avec notre théorie.

(2.24) LEMME. *Soit E_2 un sous-espace de E_3 muni de la pseudo-topologie induite par l'inclusion $i: E_2 \to E_3$, et soit $f: E_1 \to E_2$ une application. Alors*

$$f \in \mathscr{C}_0(E_1; E_2) \Leftrightarrow i \circ f \in \mathscr{C}_0(E_1; E_3).$$

La démonstration se base sur (2.3.4) et (2.11). On en déduit facilement les corollaires suivants de (2.17):

(2.25) COROLLAIRE. *L'application linéaire*

$$\Psi: \mathscr{L}(E_1, E_2; E_3) \to \mathscr{L}(E_1; \mathscr{L}(E_2; E_3))$$

définie par $(\Psi u)(x_1) \cdot x_2 = u(x_1, x_2)$ est un homéomorphisme.

(2.26) COROLLAIRE. *L'application linéaire*

$$\Psi: \mathscr{L}_{p+q}(E_1; E_2) \to \mathscr{L}_p(E_1; \mathscr{L}_q(E_1; E_2))$$

défini par

$$(\Psi u)(x_1, x_2, \ldots, x_p) \cdot (y_1, \ldots, y_q) = u(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$$

est un homéomorphisme.

Comme conséquence de (2.12) on a:

(2.27) COROLLAIRE. *L'application bilinéaire*

$$b: \mathscr{L}_p(E_1; E_2) \times \mathscr{L}(E_2; E_3) \to \mathscr{L}_p(E_1; E_3)$$

définie par $b(u, v) = v \circ u$ est un morphisme.

De (2.14) on obtient ($\alpha^{-1} = \alpha(\pi_{1*}, \pi_{2*})$!):

(2.28) COROLLAIRE. *L'application linéaire*

$$\alpha: \mathscr{L}_p(E; E_1) \times \mathscr{L}_p(E; E_2) \to \mathscr{L}_p(E; E_1 \times E_2)$$

définie par $\alpha(u, v) \cdot (x_1, \ldots, x_p) = (u(x_1, \ldots, x_p), v(x_1, \ldots, x_p))$ est un homéomorphisme.

(2.29) PROPOSITION. *Soit E un objet de $\mathfrak{P}^{\times}$ vérifiant:*

$$\mathscr{X} \downarrow E \Rightarrow I_1 \cdot \mathscr{X} \downarrow E.$$

Alors l'application $v_1: \mathscr{L}(\mathbf{R}; E) \to E$ définie par $v_1(\ell) = \ell(1)$ est un homéomorphisme (voir aussi (2.23)!).

$\mathbf{V}[1] \downarrow \mathbf{R}$, donc $\mathscr{F} \downarrow \mathscr{L}(\mathbf{R}; E)$ entraîne $\mathscr{F}(1) \downarrow E$, d'où v_1 est continue. Soit $u: E \to \mathscr{L}(\mathbf{R}; E)$ définie par $(u(x))(\lambda) = \lambda \cdot x$, et soit $\mathscr{X} \downarrow E$, $\mathbf{V} \cdot A \downarrow \mathbf{R}$. Alors il existe $\delta > 0$

tel que $A \subset I_\delta$. On a $(u(\mathscr{X}))\,(I_\delta) = I_\delta \cdot \mathscr{X} = \delta(I_1 \cdot \mathscr{X}) \downarrow E$ d'après l'hypothèse. Soit $B \in \mathscr{X}$ borné. Alors $(u(B))\,(\mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot B \downarrow E$, d'où $u(\mathscr{X}) \downarrow \mathscr{L}(\mathbf{R}; E)$. Il est bien connu que $u^{-1} = v_1$, d'où le résultat.

(2.30) Remarque, La condition supplémentaire de (2.29) n'est pas vérifiée par tous les objets de $\mathfrak{P}^\times$, comme l'exemple $\mathbf{R}_2$ défini dans (2.21) le montre. Par contre elle est vérifiée par les objets de $\mathfrak{R}$, car $I_1 \cdot \mathscr{X} \leqslant \mathscr{X}^*$.

(2.31) Remarque. *Si E_2 est topologique, alors les suites normales convergentes sont les mêmes pour $C_0(E_1; E_2)$ et $\mathscr{C}_0(E_1; E_2)$.*

On a $C_0(E_1; E_2) \geqslant \mathscr{C}_0(E_1; E_2)$, donc chaque suite convergente à droite converge aussi à gauche. Soit maintenant $H = \{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ une suite convergente vers zéro à gauche. Pour qu'elle converge à droite il suffit de vérifier que H est de classe C_0. Soit $\mathscr{U}$ le filtre des voisinages de zéro dans E_2, $\mathbf{V} \cdot A$, $\mathscr{X} \downarrow E_1$, $B \in \mathscr{X} \vee [0]$ borné, $U \in \mathscr{U}$, U borné. Alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $f_n(A+B) \subset U$ pour tout $n \geqslant n_0$, d'où $\Delta f_n(A, B) \subset U - U$ pour tout $n \geqslant n_0$. De plus il existe $B' \in \mathscr{X}$ tel que $\Delta f_n(A, B') \subset U$ pour $n < n_0$, donc $\Delta\, H(A, B' \cap B) \subset U - U$, d'où $\Delta\, H(A, \mathscr{X}) \downarrow E_2$. De plus on a $\mathbf{V} \cdot H(A) \leqslant \mathbf{V} \cdot U \downarrow E_2$.

2.6 *Complétitude de $\mathscr{C}_0(E_1; E_2)$*

(2.32) Proposition. *Si E_2 est un objet séparé et complet de $\mathfrak{P}^{\circ\times}$, alors $\mathscr{C}_0(E_1; E_2)$ est complet. De même $\mathscr{C}_0(E; \mathscr{C}_0(E_1; E_2))$, $\mathscr{L}_p(E_1; E_2)$ et $\mathscr{C}_0(E; \mathscr{L}_p(E_1; E_2))$.*

Soit $\mathscr{F} - \mathscr{F} \downarrow \mathscr{C}_0(E_1; E_2)$. Pour tout $x \in E_1$ on a: $(\mathscr{F} - \mathscr{F})(x) = \mathscr{F}(x) - \mathscr{F}(x) \downarrow E_2$. E_2 étant complet, il existe $y_x \in E_2$ tel que $\mathscr{F}(x) - y_x \downarrow E_2$. E_2 étant séparé[16]), y_x est unique. Dénotons par f l'application $x \mapsto y_x$. Alors

(a) $(\mathscr{F} - f)(x) \downarrow E_2$ pour tout $x \in E_1$.

Soit $\mathscr{V}$ le filtre des voisinages de $0 \in E_2^\circ$, $\mathbf{V} \cdot A \downarrow E_1$. Alors $(\mathscr{F} - \mathscr{F})(A) \leqslant \mathscr{V}$ car $E_2 \leqslant E_2^\circ$.

Soit $V \in \mathscr{V}$. Il existe $F_1 \in \mathscr{F}$ tel que $(F_1 - F_1)(A) \subset V$. Soit $a \in A$. Alors il existe $F_2 \in \mathscr{F}$ tel que $(F_2 - f)(a) \subset V$.

Soit $\varphi \in F_1$ et $\psi \in F_1 \cap F_2$. Alors $(\varphi - f)(a) = (\varphi - \psi)(a) + (\psi - f)(a) \in V + V$, d'où $(f - F_1)(A) \subset V$, donc

(b) $(f - \mathscr{F})(A) \leqslant \mathscr{V} + \mathscr{V} \downarrow E_2^\circ$.

Soit $H - H \in \mathscr{F} - \mathscr{F}$ de classe C_0. Alors

(c) H est de classe C_0, car si $h \in H$, on a

$$H = (H - h) + h \subset (H - H) + h.$$

Soit $\mathbf{V} \cdot A \downarrow E_1$. Il existe $I_\delta \in \mathbf{V}$ tel que $I_\delta \cdot H(A) \subset V$. Soit $a \in A$, $U \subset V$ tel que U est

---

[16]) Voir (3.1.4) ou [3].

équilibré. Alors il existe $F' \in \mathscr{F}$ tel que $(f-F')(a) \subset (1/\delta)\cdot U$, d'où $I_\delta \cdot (f-F') \subset V$. Pour $F = H \cap F'$ on obtient donc:

$$I_\delta \cdot f(a) \subset I_\delta \cdot (f - F)(a) + I_\delta \cdot H(A) \subset V + V.$$

d'où on déduit que $\mathbf{V} \cdot f(A) \leqslant \mathscr{V} + \mathscr{V} \downarrow E_2^\circ$. Analoguement on montre que $\mathscr{X} \downarrow E_1$ entraîne $\Delta f(A, \mathscr{X}) \downarrow E_2^\circ$, en se basant sur l'égalité

$$\Delta f(a, x) = \Delta(f - \psi)(a, x) + \Delta \psi(a, x).$$

On a $E_1^\times = E_1$ et $E_2^{\circ\times} = E_2$, donc d'après (2.9) $f \in \mathscr{C}_0(E_1; E_2)$. Il suit que $(f-H)(A) \in (f-\mathscr{F})(A)$ est borné, donc d'après (b) $(f-\mathscr{F})(A) \downarrow E_2^{\circ\times} = E_2$, d'où $\mathscr{C}_0(E_1, E_2)$ est complet. De même $\mathscr{C}_0(E; \mathscr{C}_0(E_1; E_2))$, car cet objet est linéairement homéomorphe à $\mathscr{C}_0(E \times E_1; E_2)$. Soit manitenant $\mathscr{F} - \mathscr{F} \downarrow \mathscr{L}(E_1; E_2)$. Alors $i(\mathscr{F} - \mathscr{F}) = i(\mathscr{F}) - i(\mathscr{F}) \downarrow \mathscr{C}_0(E_1; E_2)$. Il existe $f \in \mathscr{C}_0(E_1; E_2)$ tel que $i(\mathscr{F}) - f \downarrow \mathscr{C}_0(E_1; E_2)$. Soit $\mathscr{G} = i(\mathscr{F})$. On a $(\mathscr{G} - f)(x+y) = \mathscr{G}(x+y) - f(x+y) \downarrow E_2$. De même $\mathscr{G}(x) - f(x) \downarrow E_2$ et $\mathscr{G}(y) - f(y) \downarrow E_2$, d'où

$$\mathscr{G}(x) + \mathscr{G}(y) - (f(x) + f(y)) \downarrow E_2.$$

Or, $\mathscr{G}(x+y) \leqslant \mathscr{G}(x) + \mathscr{G}(y)$, car $\mathscr{L}(E_1; E_2) \in \mathscr{G}$, donc, E_2 étant séparé, on obtient $f(x+y) = f(x) + f(y)$. De manière analogue on obtient $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. On a donc:

$$\mathscr{G} - f = i(\mathscr{F}) - i(f) = i(\mathscr{F} - f) \downarrow \mathscr{C}_0(E_1; E_2),$$

donc $\mathscr{F} - f \downarrow \mathscr{L}(E_1; E_2)$.

Soit $\mathscr{F} - \mathscr{F} \downarrow \mathscr{C}_0(E; \mathscr{L}(E_1; E_2))$. Alors $i \circ (\mathscr{F} - \mathscr{F}) \downarrow \mathscr{C}_0(E; \mathscr{C}_0(E_1; E_2))$, où i: $\mathscr{L}(E_1; E_2) \to \mathscr{C}_0(E_1; E_2)$ est l'inclusion. On a $i_*(\mathscr{F} - \mathscr{F}) = i_*(\mathscr{F}) - i_*(\mathscr{F})$ donc il existe $f \in \mathscr{C}_0(E; \mathscr{C}_0(E_1; E_2))$ tel que $i_*(\mathscr{F}) - f$ converge. Soit $\mathscr{G} = i_*(\mathscr{F})$.

Alors $\mathscr{G}(x) - f(x) \downarrow \mathscr{C}_0(E_1; E_2)$, et $\mathscr{L}(E_1; E_2) \in \mathscr{G}(x)$ pour tout $x \in E$. Donc par les mêmes arguments comme avant, $f(x) \in \mathscr{L}(E_1; E_2)$ pour tout $x \in E$, d'où $f \in \mathscr{C}_0(E; \mathscr{L}(E_1; E_2))$. On a donc $\mathscr{G}(x) - f(x) = \mathscr{G}(x) - i(f(x)) = i_*(\mathscr{F} - f)$ d'où $\mathscr{F} - f \downarrow \mathscr{C}_0(E; \mathscr{L}(E_1; E_2))$.

Par récurrence on trouve le résultat général.

(2.33) Remarque. Nous ne savons pas si l'énoncé du théorème 1.3 chap. II de [1] est vrai, étant donné que la démonstration se base sur l'égalité $(\mathscr{F} - \mathscr{F})(\mathscr{X}) = \mathscr{F}(\mathscr{X}) - \mathscr{F}(\mathscr{X})$ qui en général n'est qu'une inégalité pourvu que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{X}$ soient des filtres.

§ 3. Calcul différentiel dans les objets de $\mathfrak{R}$

Nous examinons dans ce paragraphe les applications différentiables au sens de [4] dans le cas où les espaces vectoriels pseudo-topologiques sont raffinés (voir 1.1), c.à.d. des objets de $\mathfrak{R}$.

3.1 *Différentiabilité*

Soient $E_1, E_2, \ldots$ toujours des objets de $\mathfrak{R}$. Soit $r: E_1 \to E_2$ une application. Nous désignons par $\Theta r: \mathbf{R} \times E_1 \to E_2$ l'application définie par

$$(3.1) \quad \Theta r(\lambda, x) = \begin{cases} \dfrac{r(\lambda x)}{\lambda} & \text{pour} \quad \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{pour} \quad \lambda = 0 \end{cases}$$

D'après (3.2.2) et (2.3) on a:

(3.2) Une application $f: E_1 \to E_2$ est *différentiable* au point $a \in E_1$, s'il existe $\ell \in \mathscr{L}(E_1; E_2)$ tel que $r: E_1 \to E_2$ définie par $r(x) = f(a+x) - f(a) - \ell(x)$ vérifie:

(3.3) Pour tout borné B de E_1 on a:

$$\Theta r(\mathbf{V}, B) \downarrow E_2 .^{17})$$

La différentiabilité d'une application en un point est une condition locale d'après (3.4.1). Il suffit donc que f soit définie sur un ouvert contenant a pour que $f'(a)$ soit unique. De plus, il suffit de considérer les bornés B contenus dans un voisinage de zéro, car les voisinages de zéro sont absorbants, et $\Theta r(\mathbf{V}, \delta \cdot B) = \delta \cdot \Theta r(\mathbf{V}, B)$ pour tout $\delta \neq 0$.

(3.4) A est ouvert dans E_1, si $A \in x + \mathscr{U}$ pour tout $x \in A$, où $\mathscr{U} = \bigvee_{\mathscr{X} \downarrow E_1} \mathscr{X}$ (cf. 3.4 de [4]).

Ayant gardé la définition de différentiabilité introduite dans [4], nous pouvons appliquer tous les résultats obtenus là. Or, nous changeons la notion de «dérivée d'ordre supérieur», car l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E_1; E_2)$ est muni d'une autre structure (voir (6.1.4)). De plus dans la définition suivante nous renonçons à la condition que E_1 et E_2 soient des objets de $\mathfrak{P}^{\#}$ (cf. (9.1.2)).

(3.5) Définition. Une application $f: E_1 \to E_2$ est $(n+1)$-fois différentiable au point $a \in E_1$, s'il existe un ouvert A de E_1 contenant le point a, tel que $f^{(n)}: A \to \mathscr{L}_n(E_1; E_2)$ existe et est différentiable au point a, où $f^{(p+1)}(x) \in \mathscr{L}_{p+1}(E_1; E_2)$ est l'élément correspondant à $f^{(p)\prime}(x) \in \mathscr{L}(E_1; \mathscr{L}_p(E_1; E_2))$ en vertu de (2.26).

(3.6) Définition. Soit A un ouvert de E_1. Alors $f: A \to E_2$ est dit n-fois continuement différentiable dans A, si f est n-fois différentiable dans chaque point de A et $f^{(n)}: A \to \mathscr{L}_n(E_1; E_2)$ est continue. f est dit indéfiniment différentiable dans A, si cette condition est vérifiée pour tout $n \in \mathbf{N}$.

---

[17]) Nous désignons ℓ par $f'(a)$ ou $Df(a)$, et r par $f^{\times}(a)$ ou $Rf(a)$.

3.2 *Inégalité fondamentale et applications*

L'inégalité figurant dans le lemme suivant (inégalité analogue à (5.3.4)) est utilisée pour la plupart des démonstrations dans la suite. En effet, les conditions (R_1) à (R_3) d'un espace vectoriel raffiné (cf. (1.1)) ont été imposées à cause de cette inégalité.

(3.7) LEMME. *Soit A un ouvert de E_1 contenant l'origine, $\mathscr{X}$ un filtre sur E_1, $\mathscr{V}$ un filtre sur* **R** *tels que $A \in \mathscr{V}[0, 1] \cdot \mathscr{X}$, $\mathscr{F}$ un filtre sur $\mathfrak{K}(A; E_2) = \{f \in E_2^{E_1} : f$ est différentiable dans A et $f(0) = 0\}$. Alors $\Theta\, \mathscr{F}(\mathscr{V}, \mathscr{X}) \leqslant (\mathscr{F}'(\mathscr{V}[0, 1]\mathscr{X}) \cdot \mathscr{X})^{*-}$, où Θ et $*^-$ sont définis dans* (3.1) *et* 1.1.

Pour la démonstration voir (5.3.4).

(3.8) PROPOSITION. *Soit $A \subset E_1$ ouvert. $f : A \to E_2$ est continuement différentiable dans A si et seulement si: Pour tout $a \in A$ et tout $h \in E_1$ il existe un élément $\ell_a(h) \in E_2$ tel que:*

(1) $\lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{f(a + \lambda h) - f(a)}{\lambda} = \ell_a(h)$

(2) $h \mapsto \ell_a(h)$ est un élément de $\mathscr{L}(E_1; E_2)$.

(3) $x \mapsto \ell_x$ est continue dans A.

($\Rightarrow$) On a $\Theta f^{\times}(a)(\mathbf{V}, [h]) \downarrow E_2$ pour tout $a \in A$, $h \in E_1$, d'où

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(a + \lambda h) - f(a) - f'(a) \cdot \lambda h}{\lambda} = 0,$$

donc $\ell_a(h) = f'(a) \cdot h$, où $f'(a) \in \mathscr{L}(E_1; E_2)$ et $f' : A \to \mathscr{L}(E_1; E_2)$ est continue par définition.

($\Leftarrow$) Soit $a \in A$, $h \in E_1$ et $\delta > 0$ tel que $a + \lambda \cdot h \in A$ pour tout $|\lambda| \leqslant \delta$. Alors l'application $\varphi_{(a,h)} :]-\delta, \delta[\to E_2$ définie par $\varphi_{(a,h)}(\lambda) = f(a + \lambda h)$ est différentiable car

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\varphi_{(a,h)}(\alpha + \lambda) - \varphi_{(a,h)}(\alpha)}{\lambda} =$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(a + \alpha h + \lambda h) - f(a + \alpha h)}{\lambda} = \ell_{(a+\alpha h))}(h)$$

pour tout $\alpha \in]-\delta, \delta[$ (cf. (4.3.3)).

On a donc $\varphi'_{(a,h)}(\alpha) \cdot 1 = \ell_{(a+\alpha h)}(h)$ pour tout $\alpha \in]-\delta, \delta[$.

Soit $f_{(a,h)}(\alpha) = f(a + \alpha \cdot h) - f(a) - \ell_a(\alpha \cdot h)$. Alors $f'_{(a,h)}(\alpha) \cdot 1 = \ell_{(a+\alpha \cdot h)}(h) - \ell_a(h)$, car ℓ_a est continue, donc différentiable d'après (4.2.1). Soit maintenant U un voisinage équilibré de $0 \in E_1$ tel que $a + U \subset A$, et soit $B \subset U$ borné. Alors $f_{(a,B)}$ est un sous-ensemble de $N(]-\delta, \delta[, E_2)$ (voir (3.6)), et $]-\delta, \delta[\in \mathbf{V}[1] = \mathbf{V}[0, 1] \cdot [1]$, donc

$$\Theta f_{(a,B)}(\mathbf{V}, [1]) \leqslant (f'_{(a,B)}(\mathbf{V} \cdot [1]) \cdot [1])^{*-} \leqslant ((\ell_{a+\mathbf{V} \cdot B} - \ell_a) \cdot B)^{*-} \downarrow E_2,$$

car E_2 est raffiné et $x \mapsto \ell_x$ est continue. Or

$$\Theta f_{(a,B)}(\mathrm{V}, [1]) = \Theta f^{\times}(\mathrm{V}, B), \qquad \text{où} \qquad f'(a) = \ell_a.$$

f est donc continuement différentiable dans A.

(3.9) Remarque. La proposition précédente est aussi valable, si E_1, E_2 sont des objets de $\mathfrak{A}$ et si on suppose la continuité par rapport à $L(E_1; E_2)$ défini dans [4].

(3.10) Proposition. *Soit $A \subset E_1$ ouvert, et $f: A \to E_2$ continuement différentiable. Alors $f: A \to E_2$ vérifie la condition suivante:*

Pour tout $a \in A$ et $\mathscr{X}, \mathscr{Y} \downarrow E_1$ il existe $X \in \mathscr{X}$ tel que

$$\Delta f(a + X, \mathscr{Y}) \downarrow E_2.$$

D'après l'hypothèse on a:

$$\Delta f'(a + \mathscr{X}, \mathscr{Y}) \downarrow \mathscr{L}(E_1; E_2),$$

car

$$\Delta f'(a + \mathscr{X}, \mathscr{Y}) \leqslant \Delta f'(a, \mathscr{X} + \mathscr{Y}) - \Delta f'(a, \mathscr{X})$$

on en déduit qu'il existe $X_1 \in \mathscr{X}$ tel que $\Delta f'(a+X_1, \mathscr{Y}^*)\cdot\mathscr{Y}^* \downarrow E_2$, car $\Delta f'(a+\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ contient un élément de classe C_0. De même il existe $X_2 \in \mathscr{X}$ tel que $f'(a+X_2)$ est de classe C_0, car $f'(a+\mathscr{X}) \leqslant \Delta f'(a, \mathscr{X}) + f'(a)$. Soit $X_3 \in \mathscr{X}$ tel que $A \in [a] + [X_3] + \mathscr{Y}^*$, et soit $X = X_1 \cap X_2 \cap X_3$. Alors $\Delta f(a+X, \mathscr{Y}) \leqslant f'(a+X)\cdot\mathscr{Y} + f^{\times}(a+X)\cdot\mathscr{Y} \downarrow E_2$, car $(f^{\times}(b))'(y) = \Delta f'(b, y)$, donc en appliquant (3.7) pour $\mathscr{V} = [1]$, on obtient

$$f^{\times}(a + X)\cdot\mathscr{Y} \leqslant (\Delta f'(a + X, [1]\cdot[0, 1]\cdot\mathscr{Y}^*)\,\mathscr{Y}^*)^{*-} = \\ = (\Delta f'(a + X, \mathscr{Y}^*)\cdot\mathscr{Y}^*)^{*-} \downarrow E_2.$$

(3.11) Corollaire. *Si $f: A \to E_2$ est continuement différentiable, alors $f: A \to E_2$ est continue.*

(3.12) Corollaire. *Si E_1 est normé, $A \subset E_1$ ouvert et $f: A \to E_2$ continuement différentiable, alors $f: A \to E_2$ est localement uniformément continu.*

Par récurrence on obtient:

(3.13) Proposition. *Si $f: A \to E_2$ est n-fois continuement différentiable, alors $f^{(k)}: A \to \mathscr{L}_k(E_1; E_2)$ est continue pour $0 \leqslant k \leqslant n$.*

Etant donné que la structure sur $\mathscr{L}(E_1; E_2)$ et plus fine que celle considérée dans [4] (cf. (6.1.4)), nous avons immédiatement le résultat analogue de (8.2.1):

(3.14) Théoréme. *Soit $A \subset E_1 \times E_2$ ouvert, $(a_1, a_2) \in A$, $f: A \to E_3$ partiellement différentiable au point (a_1, a_2), et $D_2 f: A \to \mathscr{L}(E_2; E_3)$ continus en ce point. Alors f est différentiable au point (a_1, a_2), et*

$$f'(a_1, a_2)(t_1, t_2) = D_2 f(a_1, a_2)\cdot t_2 + D_1 f(a_1, a_2)\cdot t_1.$$

Nous démontrons en détail le résultat correspondant à (9.1.3):

(3.15) PROPOSITION. *Si $A \subset E_1$ est un ouvert et si $f: A \to E_2$ est deux fois différentiable au point $a \in A$, alors $f''(a)$ est symétrique, c.à.d. $f''(a)\cdot(s, t) = f''(a)\cdot(t, s)$ pour tout $s, t \in E_1$.*

Soit $\xi \in I = [0, 1]$, et

$$g_\lambda(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}(f(a + \lambda\cdot\xi\cdot s + \lambda\cdot t) - f(a + \lambda\cdot\xi\cdot s)) - ((f')'(a)\cdot t)\cdot\xi\cdot s$$

pour $\lambda \neq 0$, et $g_0(\xi) = 0$. Alors[18])

$$\dot{g_\lambda}(\xi) = (\Theta(f')^\times(a)\cdot(\lambda, \xi s + t))\cdot s - (\Theta(f')^\times(a)\cdot(\lambda, \xi\cdot s))\cdot s,$$

d'où par hypothèse $\dot{g_{\mathbf{v}}}(I) \downarrow E_2$. De même pour

$$h_\lambda(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}(f(a + \lambda\cdot\xi\cdot t + \lambda\cdot s) - f(a + \lambda\cdot\xi\cdot t)) - ((f')'(a)\cdot s)\cdot\xi t$$

on obtient $\dot{h_{\mathbf{v}}}(I) \downarrow E_2$.

Soit $f_\lambda(\xi) = \Delta g_\lambda(0, \xi) - \Delta h_\lambda(0, \xi)$.

Alors $f_\lambda(0) = 0$, donc en utilisant (3.7):

$$f_{\mathbf{v}}([1]) \leqslant (\dot{f_{\mathbf{v}}}(I))^{*-} \leqslant (\dot{g_{\mathbf{v}}}(I) - \dot{h_{\mathbf{v}}}(I))^{*-} \downarrow E_2.$$

Or

$$f_{\mathbf{v}}([1]) = [((f')'(a)\cdot t)\cdot s - ((f')'(a)\cdot s)\cdot t]$$

ce qui achève la démonstration.

3.3 *Dérivée d'ordre supérieure d'une application composée*

(3.16) LEMME. *Soit $A \subset E_1$ ouvert.*

Si $f: A \to E_2$ est p-fois différentiable et $f^{(p)}: A \to \mathscr{L}_p(E_1; E_2)$ q-fois différentiable, alors $f: A \to E_2$ est $(p+q)$-fois différentiable, et inversement.

Même démonstration que pour (9.2.3), en utilisant (2.26).

(3.17) LEMME. *Tout $u \in \mathscr{L}(E_1, E_2; E_3)$ est indéfiniment différentiable.*

D'après (4.2.3) u est différentiable, et

$$u'(a_1, a_2)(x_1, x_2) = u(a_1, x_2) + u(x_1, a_2).$$

Soient $u_1 \in \mathscr{L}(E_1; \mathscr{L}(E_2; E_3))$ et $u_2 \in \mathscr{L}(E_2; \mathscr{L}(E_1; E_3))$ les applications qui correspondent à u d'après (2.25). Alors $u' = \pi_2^* \circ u_1 \circ \pi_1 + \pi_1^* \circ u_2 \circ \pi_2$ est la composée d'appli-

---

[18]) $g\cdot_\lambda(\xi) := (g'_\lambda(\xi))(1)$.

cations linéaires et continues, donc indéfiniment différentiable. Le résultat découle maintenant du lemme précédent.

(3.18) LEMME. *Si $A \subset E$ est ouvert, et si $f_i: A \to E_i$ est p-fois différentiable au point $a \in A$, alors il en est de même de $[f_1, f_2]: A \to E_1 \times E_2$.*

On utilise (2.14) et (9.2.5).

(3.19) THÉORÈME. *Soient $f: A_1 \to E_2$ et $g: A_2 \to E_3$ p-fois différentiables au point $a \in A_1$ resp. $f(a) \in A_2$, A_1, A_2 ouverts, $f(A_1) \subset A_2$. Alors $g \circ f: A_1 \to E_3$ est p-fois différentiable au point a, et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a).$$

Pour $p=1$ c'est (3.3.1). Supposons (3.19) pour p, et soient f et g $(p+1)$-fois différentiables aux points correspondants. On a $(g \circ f)' = b \circ [f', g' \circ f]$, où $b: \mathscr{L}(E_1; E_2) \times = \mathscr{L}(E_2; E_3) \to \mathscr{L}(E_1; E_3)$ est de classe C_0, donc p-fois différentiable d'après (3.17) et (2.27). Donc $(g \circ f)'$ est p-fois différentiable d'après l'hypothèse de récurrence et (3.18), d'où en vertu de (3.16) $g \circ f$ est $(p+1)$-fois différentiable au point a.

§ 4. La catégorie $\mathfrak{C}_k$

(4.1) DÉFINITION. Les objets de la catégorie $\mathfrak{C}_k$ sont les objets de $\mathfrak{R}$, c.à.d. les espaces vectoriels raffinés (cf. 1.1). $f: E_1 \to E_2$ est un morphisme de la catégorie $\mathfrak{C}_k$, si f est k-fois différentiable dans E_1 et si $f^{(k)} \in \mathscr{C}_0(E_1; \mathscr{L}_k(E_1; E_2))$ (cf. § 2). Pour $k=0$ nous posons $f^{(0)} = f$ et $\mathscr{L}_0(E_1; E_2) = E_2$.

4.1 *L'objet $\mathscr{C}_k(E_1; E_2)$, $0 \leqslant k < \infty$*

Sauf mention expresse du contraire, E, E_1, E_2 sont supposés être des objets de $\mathfrak{R}$ dans la suite. L'espace vectoriel $\mathscr{C}_k(E_1; E_2)$ est formé des morphismes $f: E_1 \to E_2$ de $\mathfrak{C}_k$. Pour que $\mathscr{C}_k(E_1; E_2)$ soit un objet de $\mathfrak{R}$, il suffit de définir:

(4.2) $\mathscr{F} \downarrow \mathscr{C}_k(E_1; E_2) :\Leftrightarrow \mathscr{F}^{(n)} \downarrow \mathscr{C}_0(E_1, \mathscr{L}_n(E_1; E_2))$ pour $0 \leqslant n \leqslant k$.

En effet, la pseudo-topologie de $\mathscr{C}_k(E_1; E_2)$ est induite par les applications linéaires $f \mapsto f^{(n)}$, $0 \leqslant n \leqslant k$. Ces applications sont bien définies car on a:

(4.3) PROPOSITION. *Si $f \in \mathscr{C}_k(E_1; E_2)$, alors $f^{(n)} \in \mathscr{C}_0(E_1; \mathscr{L}_n(E_1; E_2))$ pour $0 \leqslant n \leqslant k$.*

Soit $k=1$. Alors $f' \in \mathscr{C}_0(E_1; \mathscr{L}(E_1; E_2))$. On a $\Delta f(a, x) = f'(a) \cdot x + f^{\times}(a) \cdot x$, d'où $\Delta f(A, \mathscr{X}) \leqslant f'(A) \cdot \mathscr{X} + f^{\times}(A) \mathscr{X}$. Donc si $\mathrm{V} \cdot A$, $\mathscr{X} \downarrow E_1$, alors $f'(A) \cdot \mathscr{X} \downarrow E_2$ d'après (2.16) et (2.22). Le reste se démontre comme dans (10.1.3).

En utilisant (1.24), (2.8) et (7.3.1) on obtient donc:

(4.4) PROPOSITION. *$\mathscr{C}_k(E_1; E_2)$ est un objet de $\mathfrak{R}$.*

De (4.3) on déduit:

(4.5) COROLLAIRE. *Chaque morphisme de* $\mathfrak{C}_{k+p}$ *est un morphisme de* $\mathfrak{C}_k$.

(4.6) PROPOSITION. *Soit* $f: E_1 \to E_2$ *p-fois différentiable. Alors on a:*
$f^{(p)}$ *est un morphisme de* $\mathfrak{C}_q \Leftrightarrow$
f *est un morphisme de* $\mathfrak{C}_{p+q}$.
On a

$$(f^{(p)})^{(q)} \in \mathscr{C}_0(E_1; \mathscr{L}_q(E_1; \mathscr{L}_p(E_1; E_2))) \Leftrightarrow f^{(p+q)} \in \mathscr{C}_0(E_1; \mathscr{L}_{p+q}(E_1; E_2))$$

d'après (2.26). Le reste suit de (3.16) et (4.3).

4.2 *L'objet* $\mathscr{C}_\infty(E_1; E_2)$

$f: E_1 \to E_2$ est dit un morphisme de $\mathfrak{C}_\infty$, si $f \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathscr{C}_k(E_1; E_2)$. On obtient de nouveau un objet de $\mathfrak{R}$ en définissant:

(4.7) $\mathscr{F} \downarrow \mathscr{C}_\infty(E_1; E_2): \Leftrightarrow$
(a) $\mathscr{F} \downarrow \mathscr{C}_k(E_1; E_2)$ pour $0 \leqslant k < \infty$
(b) Il existe $H \in \mathscr{F}$ tel que $\mathbf{V} \cdot H$ vérifie (a).

Soit E l'espace vectoriel admissible défini par la condition (a) (cf. (7.3.2)). Alors $\mathscr{C}_\infty(E_1; E_2) = E^\times$.[19]) D'après (1.8) on obtient donc:

(4.8) PROPOSITION. $\mathscr{C}_\infty(E_1; E_2)$ *est un objet de* $\mathfrak{R}$.

4.3 *Morphismes élémentaires de* $\mathfrak{C}_\infty$

(4.9) PROPOSITION. *Tout* $\ell \in \mathscr{L}(E_1; E_2)$ *est un morphisme de* $\mathfrak{C}_\infty$, *et* $\ell'(x) = \ell$ *pour tout* $x \in E_1$.

(4.10) PROPOSITION. *Soit* $x \in E_2$, *et* $x^\circ: E_1 \to E_2$ *l'application constante* $y \mapsto x$. *Alors* x° *est un morphisme de* $\mathfrak{C}_\infty$. *Il en est de même de* $\gamma: E_2 \to \mathscr{C}_k(E_1; E_2)$ *défini par* $\gamma(x) = x^\circ$, *pour* $0 \leqslant k \leqslant \infty$.

γ étant linéaire, il suffit de montrer la continuité. Pour $k=0$ voir (2.13). On a $(\gamma(\mathscr{X}))^{(n)} = [0]$ pour tout $n \geqslant 1$, d'où le résultat.

(4.11) PROPOSITION. *Tout* $u \in \mathscr{L}(E_1, E_2; E_3)$ *est un morphisme de* $\mathfrak{C}_\infty$.

D'après (3.17) u est indéfiniment différentiable, et u' est linéaire et continue, d'où le résultat en utilisant (4.6).

(4.12) REMARQUE. Si $E_1 = \mathbf{R}^m$, alors toute application $f: E_1 \to E_2$ qui est k-fois continuement différentiable dans E_1, est un morphisme de $\mathfrak{C}_k$.

---

[19]) En effet, il s'agit de la limite projective dans $\mathfrak{P}^\times$.

Il suffit de montrer qu'une application continue $f:\mathbf{R}^m \to E_2$ est un morphisme de $\mathfrak{C}_0$. Soit $\mathbf{V}\cdot A \downarrow \mathbf{R}^m$. Alors $\bar{A}$ est compact.

Soit $\mathscr{U}$ le filtre des voisinages de $0 \in \mathbf{R}^m$, $x \in \bar{A}$. Alors $\mathbf{V}\cdot f(x+\mathscr{U}) \leqslant \mathbf{V}\cdot \Delta f(x,\mathscr{U}) + \mathbf{V}\cdot f(x) \downarrow E_2$ par la continuité de f. Choisissons pour tout $x \in A$ un voisinage ouvert $U_x \in \mathscr{U}$ tel que $\mathbf{V}\cdot f(x+U_x) \downarrow E_2$. Il existe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U_{x_i})$. Donc

$$\mathbf{V}\cdot f(A) \leqslant \mathbf{V}\cdot f\left(\bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U_{x_i})\right) = \bigvee_{i=1}^{n} (\mathbf{V}\cdot f(x_i + U_{x_i})) \downarrow E_2 .$$

Analoguement on déduit de l'inégalité $\Delta f(x+\mathscr{U},\mathscr{U}) \leqslant \Delta f(x,\mathscr{U}+\mathscr{U}) - \Delta f(x,\mathscr{U})$ que $\Delta f(A,\mathscr{U}) \downarrow E_2$.

4.4 *La loi de composition de* $\mathfrak{C}_k$

(4.13) LEMME. *L'inclusion* $\mathscr{C}_{k+p}(E_1; E_2) \subset \mathscr{C}_k(E_1; E_2)$ *(cf. (4.5)) est continue.*[20]
Suit immédiatement des définitions (4.2) et (4.7).

(4.14) LEMME. *Soit* $\mathscr{F}$ *un filtre sur* $\mathscr{C}_{k+1}(E_1; E_2)$.
Alors on a:

$$\mathscr{F} \downarrow \mathscr{C}_{k+1}(E_1; E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathscr{F} \downarrow \mathscr{C}_0(E_1; E_2) & \text{et} \\ \mathscr{F}' \downarrow \mathscr{C}_k(E_1; \mathscr{L}(E_1; E_2)) . \end{cases}$$ [21]

Pour la démonstration on utilise (2.26) et (4.13).

(4.15) COROLLAIRE. *L'application linéaire*

$$D: \mathscr{C}_{k+1}(E_1; E_2) \to \mathscr{C}_k(E_1; \mathscr{L}(E_1; E_2))$$

définie par $Df = f'$ *est continu.*

(4.16) LEMME. *Si* $\mathbf{V}\cdot H_1 \downarrow \mathscr{C}_k(E_1; E_2)$ *et* $\mathbf{V}\cdot H_2 \downarrow \mathscr{C}_k(E_2; E_3)$, *alors* $\mathbf{V}(H_2 \circ H_1) \downarrow \mathscr{C}_k(E_1; E_3)$.

Pour $k=0$ voir (2.10), (2.6) et (1.7).

Supposons (4.13) pour k, et soient H_1, H_2 bornés dans $\mathscr{C}_{k+1}(E_1; E_2)$ resp. $\mathscr{C}_{k+1}(E_2; E_3)$. On a $(H_2 \circ H_1)' \subset b \circ [H_1', H_2' \circ H_1]$, où $b: \mathscr{L}(E_1; E_2) \times \mathscr{L}(E_2; E_3) \to \mathscr{L}(E_1; E_3)$ est un morphisme de $\mathfrak{C}_\infty$ d'après (2.27) et (4.11). $\mathbf{V}\cdot H_1' = (\mathbf{V}\cdot H_1)' \downarrow \mathscr{C}_k(E_1; \mathscr{L}(E_1; E_2))$ d'après (4.14). $\mathbf{V}\cdot H_1 \downarrow \mathscr{C}_k(E_1; E_2)$ d'après (4.13). Supposant le lemme pour $k < \infty$, on obtient: $\mathbf{V} H_1 \downarrow \mathscr{C}_{k+1}(E_1; E_2), \mathbf{V} H_2 \downarrow \mathscr{C}_{k+1}(E_2; E_3) \Rightarrow \mathbf{V}[H_1', H_2' \circ H_1] \leqslant [\mathbf{V} H_1', \mathbf{V} H_2' \circ H_1] \downarrow \mathscr{C}_k(E_1; \mathscr{L}(E_1; E_2) \times \mathscr{L}(E_2; E_3))$.

---

[20]) Si rien n'est précisé sur n et p, on admet $0 \leqslant n \leqslant \infty$, $0 \leqslant p \leqslant \infty$. La démonstration pour $k = \infty$ ou $p = \infty$ en général va de soi.

[21]) Pour être exact, il faudrait écrire $i(\mathscr{F}) \downarrow \mathscr{C}_0(E_1; E_2)$ ou $i: \mathscr{C}_{k+1}(E_1; E_2) \to \mathscr{C}_0(E_1; E_2)$ est l'inclusion.

Appliquant le même argument à b et $[H_1', H_2' \circ H_1]$, on obtient: $\mathbf{V}(H_2 \circ H_1)' \downarrow \mathscr{C}_k(E_1; \mathscr{L}(E_1; E_3))$. Le reste découle maintenant de (4.14) et (4.13).

(4.17) COROLLAIRE. *Si* $f \in \mathscr{C}_k(E_1; E_2)$, $g \in \mathscr{C}_k(E_2; E_3)$, *alors* $g \circ f \in \mathscr{C}_k(E_1; E_3)$.

On a donc bien la composition naturelle dans la catégorie $\mathfrak{C}_k$.

4.5 *La composition comme morphisme de* $\mathfrak{C}_k$

(4.18) PROPOSITION. *Soit* $\ell \in \mathscr{L}(E_1; E_2)$. *Alors l'application linéaire*

$$\ell_*: \mathscr{C}_k(E; E_1) \to \mathscr{C}_k(E; E_2)$$

est continue.

Pour $k=0$ c'est une conséquence de (2.14). Supposons (4.18) pour $k<\infty$, et soit $\mathscr{F} \downarrow \mathscr{C}_{k+1}(E; E_1)$. Alors $\ell*(\mathscr{F}) \downarrow \mathscr{C}_0(E; E_2)$ d'après (2.14) et (4.13). De (2.14) et (2.24) on déduit que $\ell*: \mathscr{L}(E; E_1) \to \mathscr{L}(E; E_2)$ est continue. De plus $\mathscr{F}' \downarrow \mathscr{C}_k(E; E_1)$ d'après (4.14), donc utilisant l'hypothèse de récurrence: $(\ell*)*(\mathscr{F}') \downarrow \mathscr{C}_k(E; \mathscr{L}(E; E_2))$. Or, $(\ell*)*(\mathscr{F}') = (\ell*(\mathscr{F}))'$, donc $\ell*(\mathscr{F}) \downarrow \mathscr{C}_{k+1}(E, E_2)$ d'après (4.14). Pour $k=\infty$ on utilise encore (4.16).

(4.19) COROLLAIRE. *Si* $\ell: E_1 \to E_2$ *est un homéomorphisme linéaire, il en est de même de* $\ell_*: \mathscr{C}_k(E; E_1) \to \mathscr{C}_k(E; E_2)$.

(4.20) PROPOSITION. $\alpha: \mathscr{C}_k(E; E_1) \times \mathscr{C}_k(E; E_2) \to \mathscr{C}_k(E; E_1 \times E_2)$ (*cf.* (2.13)) *est un homéomorphisme linéaire.*

Soit $\mathscr{F} \times \mathscr{G} \downarrow \mathscr{C}_k(E; E_1) \times \mathscr{C}_k(E; E_2)$. On a $[\mathscr{F}^{(n)}, \mathscr{G}^{(n)}] \downarrow \mathscr{C}_0(E; \mathscr{L}_n(E; E_1) \times \times \mathscr{L}_n(E; E_2))$ pour $0 \leqslant n \leqslant k$ (resp. $<\infty$) d'après (2.14) et (4.2). D'après (2.28) on a: $\mathscr{L}_n(E; E_1) \times \mathscr{L}_n(E; E_2)$ est linéairement homéomorphe à $\mathscr{L}_n(E; E_1 \times E_2)$, d'où $[\mathscr{F}, \mathscr{G}]^{(n)} \downarrow \mathscr{C}_0(E; \mathscr{L}_n(E; E_1 \times E_2))$ d'après le lemme précédent. Inversement on a

$$\alpha^{-1}(f) = (\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f) = (\pi_{1*}(f), \pi_{2*}(f)) = [\pi_{1*}, \pi_{2*}](f).$$

Donc $\alpha^{-1} = \alpha(\pi_{1*}, \pi_{2*})$ est bien continue d'après ce qui précède et (4.18).

(4.21) PROPOSITION. *Soit* $u \in \mathscr{L}(E_1, E_2; E_3)$. *Alors l'application bilinéaire* $\tilde{u}: \mathscr{C}_k(E; E_1) \times \mathscr{C}_k(E; E_2) \to \mathscr{C}_k(E; E_3)$ *définie par* $\tilde{u}(f, g) = u \circ [f, g]$ *est un morphisme de* $\mathfrak{C}_\infty$.

Il suffit de montrer que u est un morphisme de $\mathfrak{C}_0$ d'après (4.11). La démonstration est analogue à celle de (11.1.1). On utilise (4.20), (4.17), (4.11), (4.13), (2.25), (2.27), (4.14) et (4.18). Pour $k=\infty$ on applique (4.16).

(4.22) PROPOSITION. *L'application de composition*

$$c: \mathscr{C}_k(E_1; E_2) \times \mathscr{C}_k(E_2; E_3) \to \mathscr{C}_k(E_1; E_3)$$

définie par $c(f, g) = g \circ f$ *est un morphisme de* $\mathfrak{C}_0$.

Pour $k=0$ voir (2.12). Supposons (4.22) pour $k<\infty$, et soient $\mathbf{V} \cdot (H_1 \times H_2)$,

$\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2 \downarrow \mathscr{C}_{k+1}(E_1; E_2) \times \mathscr{C}_{k+1}(E_2; E_3)$. Alors $\mathscr{F} = \Delta c(H_1 \times H_2, \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2) \downarrow \mathscr{C}_0(E_1; E_3)$ d'après (2.12) et (4.15). De l'inégalité (cf. (11.1.17))

$$\mathscr{F}' = (\Delta c(H_1 \times H_2, \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2))' \leqslant \tilde{b}(H_1', \Delta c(H_1 \times H_2', \mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2')) + \\ + \tilde{b}(\mathscr{F}_1', (H_2' + \mathscr{F}_2') \circ (H_1 + \mathscr{F}_1))$$

ainsi que de (2.27), (4.21), (4.14), (4.16) et de l'hypothèse de récurrence on obtient $\mathscr{F}' \downarrow \mathscr{C}_k(E_1; \mathscr{L}(E_1; E_3))$, d'où $\mathscr{F} \downarrow \mathscr{C}_{k+1}(E_1; E_3)$ d'après (4.14). Le cas $k = \infty$ en résulte (on applique (4.16)).

(4.23) LEMME. *Soit* $g \in \mathscr{C}_{k+1}(E_2; E_3)$. *Alors* $g_*: \mathscr{C}_k(E_1; E_2) \to \mathscr{C}_k(E_1; E_3)$ *est différentiable, et* $(g_*)'(f) \cdot \varphi = e \circ [(g')_*(f), \varphi]$.

Soient $f, \varphi \in \mathscr{C}_k(E_1; E_2)$, et considérons l'application r_g définie par:

$$r_g(\varphi) = g \circ (f + \varphi) - g \circ f - e \circ [g' \circ f, \varphi]$$

où $e: \mathscr{L}(E_2; E_3) \times E_2 \to E_3$ est l'évaluation (cf. 2.16).

Nous affirmons:

(4.24) Pour tout $g \in \mathscr{C}_{k+1}(E_2; E_3)$ on a:

$$\mathbf{V} \cdot H \downarrow \mathscr{C}_k(E_1; E_2) \Rightarrow \Theta\, r_g(\mathbf{V}, H) \downarrow \mathscr{C}_k(E_1; E_3).$$

Soit $k = 0$. On a à démontrer:

(a) $\mathbf{V}\, A \downarrow E_1 \Rightarrow \Theta\, r_g(\mathbf{V}, H) \cdot A \downarrow E_3$

(b) Il existe $G \in \Theta\, r_g(\mathbf{V}, H)$ tel que G est de classe C_0.

En utilisant (3.7) on obtient comme dans la démonstration de (11.2.1):

$$\Theta\, r_g(\mathbf{V}, H) \cdot A \leqslant (\Delta g'(f(A), \mathbf{V} \cdot H(A)) \cdot H(A))^{*-} \downarrow E_3.$$

Nous affirmons que $G = \Theta\, r_g(I_1, H)$ est de classe C_0.

En effet (3.7) donne

$$\Theta\, r_g(I_1, H) \cdot A \subset (\Delta g'(f(A), I_1 \cdot H(A)) \cdot H(A))^{*-}.$$

A droite on a un sous-ensemble borné de E_2, car g' est un morphisme de $\mathfrak{C}_0$ et E_2 est raffiné, donc $\mathbf{V} \cdot (\Theta\, r_g(I_1, H))(A) \downarrow E_3$. Soit $\mathscr{X} \downarrow E_1$. Il reste à montrer que

$$\Delta(\Theta\, r_g(I_1, H))(A, \mathscr{X}) \downarrow E_3. \tag{4.25}$$

On a l'égalité suivante:

$$\Delta(\Theta\, r_g(\lambda, \varphi))(a, x) = \Theta(\Delta(g^\times \circ f)(a, x)) \cdot (\lambda, \varphi(a + x)) + \\ + \Theta(\Delta g^\times(f(a))) \cdot (\lambda, (\varphi(a), \Delta \varphi(a, x))), \quad \text{où} \tag{4.26}$$

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta(g^\times \circ f)(a, x))(0) = 0 \quad \text{et} \\ (\Delta(g^\times \circ f)(a, x))'(y) = \Delta g'(f(a) + y, \Delta f(a, x)) - \Delta(g' \circ f)(a, x). \end{cases}$$

De même:

$$(2)\quad \begin{cases} (\Delta g^{\times}(f(a)))(0,0) = 0 \quad \text{et} \\ (\Delta g^{\times}(f(a)))'(x,y)(\xi,\eta) = \Delta g'(f(a)+x,y)\cdot\xi + \Delta g'(f(a),x+y)\cdot\eta. \end{cases}$$

Soit

$$\mathscr{Y}_1 = (\Delta(g^{\times}\circ f)(A,\mathscr{X}))'(I_1\cdot H(A+\mathscr{X}))\cdot H(A+\mathscr{X})$$

et

$$\mathscr{Y}_2 = (\Delta g^{\times}(f(A)))'(I_1\cdot H(A)\times I_1\cdot\Delta H(A,\mathscr{X}))\cdot(H(A)\times\Delta H(A,\mathscr{X})).$$

De (3.7) on déduit:

$$\Theta(\Delta(g^{\times}\circ f)(A,\mathscr{X}))\cdot(I_1, H(A+\mathscr{X})) \leqslant \mathscr{Y}_1^{*-} \quad \text{et}$$
$$\Theta(\Delta g^{\times}(f(A)))\cdot(I_1, H(A)\times\Delta H(A,\mathscr{X})) \leqslant \mathscr{Y}_2^{*-}.$$

Les identités de (1) et (2) nous conduisent aux inégalités suivantes:

$$\mathscr{Y}_1 \leqslant (\Delta g'(f(A)+I_1\cdot H(A+\mathscr{X}), \Delta f(A,\mathscr{X})) - \Delta(g'\circ f)(A,\mathscr{X}))\cdot H(A+\mathscr{X}) \quad \text{et}$$
$$\mathscr{Y}_2 \leqslant \Delta g'(f(A)+I_1 H(A), I_1\Delta H(A,\mathscr{X}))\cdot H(A) + \\ + \Delta g'(f(A), I_1\cdot H(A)+I_1\cdot\Delta H(A,\mathscr{X}))\cdot\Delta H(A,\mathscr{X}).$$

Utilisant que g', f sont des morphismes de $\mathfrak{C}_0$ et H de classe C_0, on constate aisément que $\mathscr{Y}_1, \mathscr{Y}_2 \downarrow E_3$. Avec (4.26) on obtient: $\Delta(\Theta\, r_g(I_1,H))\,(A,\mathscr{X}) \leqslant \mathscr{Y}_1^{*-} + \mathscr{Y}_2^{*-} \downarrow E_3$, E_3 étant raffiné (cf. (1.1)). Donc (4.24) est démontré pour $k=0$. Supposons (4.24) pour $k<\infty$, et soit $g\in\mathscr{C}_{k+2}(E_2;E_3)$, $\mathbf{V}\cdot H\downarrow\mathscr{C}_{k+1}(E_1;E_2)$. D'après la démonstration pour $k=0$ et (4.13) on a:

$$\Theta\, r_g(\mathbf{V},H)\downarrow\mathscr{C}_0(E_1;E_3).$$

Utilisant l'identité:

$$(3)\quad (\Theta\, r_g(\lambda,\varphi))' = \tilde{b}(f', \Theta\, r_{(g')}(\lambda,\varphi)) + \tilde{b}(\varphi', \Delta(g')_*(f,\lambda\varphi))$$

qui est vérifiée en détail avant (11.2.5), et appliquant l'hypothèse de récurrence, (4.22), (4.21), et (4.19), on obtient

$$(\Theta\, r_g(\mathbf{V},H))'\downarrow\mathscr{C}_k(E_1;\mathscr{L}(E_1;E_3)),$$

donc $\Theta\, r_g(\mathbf{V},H)\downarrow\mathscr{C}_{k+1}(E_1;E_3)$ d'après (4.14). Soit $k=\infty$, $\mathbf{V}\cdot H\downarrow\mathscr{C}_\infty(E_1;E_2)$, $g\in\mathscr{C}_\infty(E_2;E_3)$.

Alors d'après (4.24) et (4.13) on obtient $\Theta\, r_g(\mathbf{V},H)\downarrow\mathscr{C}_k(E_1;E_3)$ pour $0\leqslant k<\infty$. Il reste à montrer que $\mathbf{V}\cdot\Theta\, r_g(I_1,H)\downarrow\mathscr{C}_k(E_1;E_3)$ pour $0\leqslant k<\infty$. Pour $k=0$ c'est démontré sous (a) et (b). Pour la démonstration par récurrence on utilise l'égalité (3).

Or, (4.24) démontre (4.23), car

$$\varphi\mapsto e\circ[g'\circ f,\varphi] = \tilde{e}(g'\circ f,\varphi)$$

est continue d'après (2.16) et (4.21).

(4.27) THÉORÈME. *L'application de composition*

$$c: \mathscr{C}_k(E_1; E_2) \times \mathscr{C}_{k+p}(E_2; E_3) \to \mathscr{C}_k(E_1; E_3)$$

est un morphisme de $\mathfrak{C}_p$ *pour* $0 \leqslant p < \infty$, $0 \leqslant k < \infty$.

Pour $p=0$ voir (4.22). Supposons (4.28) pour $p<\infty$, et considérons:

$$c: \mathscr{C}_k(E_1; E_2) \times \mathscr{C}_{k+p+1}(E_2; E_3) \to \mathscr{C}_k(E_1; E_3).$$

Nous affirmons que c est un morphisme de $\mathfrak{C}_{p+1}$.

(1) c est dans $\mathfrak{C}_0$ d'après (4.22) et (4.13). $D_1 c(f, g) \cdot \varphi = e \circ [(g')_*(f), \varphi]$ d'après le lemme (4.23). $f^*: \mathscr{C}_{k+p}(E_2; E_3) \to \mathscr{C}_k(E_1; E_3)$ est linéaire et continue, car $f^* = c \circ [f^\circ, \mathrm{id}]$, donc on a:

$$D_2 c(f, g) = f^* \circ \pi_1 \quad \text{et} \quad D_2 c = \pi_1^* \circ c_1, \quad \text{où}$$
$$c_1 = c_* \circ \alpha \circ [\gamma, \mathrm{id}^\circ], \; c_* = c \circ [\mathrm{id}, c^\circ].$$

c est dans $\mathfrak{C}_p$ d'après l'hypothèse de récurrence, donc c_1 est dans $\mathfrak{C}_p$ d'après (4.10), (4.20) et (4.17). En particulier $D_2 c$ est continue. De (3.14) on obtient donc l'existence de c':

$$c'(f, g)(\varphi, \psi) = \tilde{e}(g' \circ f, \varphi) + \psi \circ f,$$

car $\mathscr{C}_k(E_1; E_3)$ est raffiné d'après (4.4). Soit $(\tilde{e})_1$ défini par $(\tilde{e})_1(\chi) \cdot \varphi = \tilde{e}(\chi, \varphi)$. Alors $(\tilde{e})_1$ est linéaire et continu d'après (2.25), (2.16) et (4.21). On a donc:

$$c' = \pi_1^* \circ (\tilde{e})_1 \circ c \circ (\mathrm{id} \times D) + \pi_2^* \circ c_1 \circ \pi_1$$

où à droite $c: \mathscr{C}_k(E_1; E_2) \times \mathscr{C}_{k+p}(E_2; \mathscr{L}(E_2; E_3)) \to \mathscr{C}_k(E_1; \mathscr{L}(E_2; E_3))$ est dans $\mathfrak{C}_p$ d'après l'hypothèse de récurrence. Nous venons de voir qu'il en est de même de c_1. Les autres applications figurant dans l'expression pour c' sont toutes linéaires et continues. Donc c' est dans $\mathfrak{C}_p$. Le théorème est maintenant une conséquence de (4.6).

(4.28) COROLLAIRE. $c: \mathscr{C}_\infty(E_1; E_2) \times \mathscr{C}_\infty(E_2; E_3) \to \mathscr{C}_\infty(E_1; E_3)$ *est un morphisme de* $\mathfrak{C}_\infty$.

En effet, c' existe d'après (4.23), (3.14), (4.8) et les mêmes arguments qu'avant. c est un morphisme de $\mathfrak{C}_0$ d'après (4.22). La démonstration par récurrence est l'habituelle, se basant sur l'expression de c'.

4.6 *L'homéomorphisme* $\Psi: \mathscr{C}_\infty(E_1; \mathscr{C}_\infty(E_2; E_3)) \to \mathscr{C}_\infty(E_1 \times E_2; E_3)$

(4.29) LEMME. *L'évaluation* $e: \mathscr{C}_k(E_1; E_2) \times E_1 \to E_2$ *est un morphisme de* $\mathfrak{C}_k$.

Exactement même démonstration que dans (2.16), utilisant (4.28), (4.20) et (4.10).

(4.30) LEMME. *Si* $g \in \mathscr{C}_{k+p}(E_2; E_3)$, *alors* $g_*: \mathscr{C}_k(E_1; E_2) \to \mathscr{C}_k(E_1; E_3)$ *est dans* $\mathfrak{C}_p$.

$g_* = c \circ [\mathrm{id}, g^\circ]$, d'où le résultat en vertu de (4.27), (4.10) et (4.20).

(4.31) LEMME. *L'application linéaire*

$$c_2 : \mathscr{C}_{k+p}(E_2; E_3) \to \mathscr{C}_p(\mathscr{C}_k(E_1; E_2); \mathscr{C}_k(E_1; E_3))$$

définie par $c_2(g) = g_*$ *est continue.*

En effet $c_2 = c_* \circ \alpha \circ [\mathrm{id}^\circ, \gamma]$ est dans $\mathfrak{C}_0$ d'après (4.27), (4.10), (4.20), (4.11) et (4.30), où

$$\gamma : \mathscr{C}_{k+p}(E_2; E_3) \to \mathscr{C}_p(\mathscr{C}_k(E_1; E_2); \mathscr{C}_{k+p}(E_2; E_3)),$$
$$\mathrm{id}^\circ : \mathscr{C}_{k+p}(E_2; E_3) \to \mathscr{C}_p(\mathscr{C}_k(E_1; E_2); \mathscr{C}_k(E_1; E_2)),$$

et

$$c \in \mathscr{C}_p(\mathscr{C}_k(E_1; E_2) \times \mathscr{C}_{k+p}(E_2; E_3); \mathscr{C}_k(E_1; E_3)),$$

donc

$$c_* : \mathscr{C}_p(\mathscr{C}_k(E_1; E_2); \mathscr{C}_k(E_1; E_2) \times \mathscr{C}_{k+p}(E_2; E_3)) \to \mathscr{C}_p(\mathscr{C}_k(E_1; E_2); \mathscr{C}_k(E_1; E_3))$$

est dans $\mathfrak{C}_0$.

(4.32) LEMME. *Soit* $f \in \mathscr{C}_k(E_1; E_2)$. *Alors l'application linéaire* $f^* : \mathscr{C}_k(E_2; E_3) \to \mathscr{C}_k(E_1; E_3)$ *est continue.*

On a $f^* = c \circ [f^\circ, \mathrm{id}]$, où

$$[f^\circ, \mathrm{id}] \in \mathscr{C}_0(\mathscr{C}_k(E_2; E_3); \mathscr{C}_k(E_1; E_2) \times \mathscr{C}_k(E_2; E_3))$$

d'après (4.10) et (4.20), d'où le résultat avec (4.22).

(4.33) THÉORÈME. *L'application linéaire*

$$\Phi : \mathscr{C}_k(E_1; \mathscr{C}_k(E_2; E_3)) \to \mathscr{C}_k(E_1 \times E_2; E_3)$$

définie par $(\Phi f)(x, y) = f(x) \cdot y$ *est continue.*

On a $\Phi f = e \circ [f \circ \pi_1, \pi_2]$, d'où Φf est bien un élément de $\mathscr{C}_k(E_1 \times E_2; E_3)$ d'après (4.20) et (4.29). $\Phi = e_* \circ \alpha \circ [\pi_*^1, \pi_2^\circ]$ est donc le composé de morphismes de $\mathfrak{C}_0$ d'après (4.29), (4.30), (4.32), (4.10) et (4.20).

(4.34) THÉORÈME. *L'application linéaire*

$$\Psi : \mathscr{C}_{k+p}(E_1 \times E_2; E_3) \to \mathscr{C}_k(E_1; \mathscr{C}_p(E_2; E_3))$$

définie par $(\Psi g)(x) \cdot y = g(x, y)$ *est continue.*

On a $(\Psi g)(x) = g \circ [x^\circ, \mathrm{id}]$, donc on a bien $(\Psi g)(x) \in \mathscr{C}_p(E_2; E_3)$ d'après (4.10), (4.20), (4.13) et (4.17). Montrons que $\Psi g = g_* \circ \alpha \circ [\gamma, \mathrm{id}^\circ]$ est un élément de $\mathscr{C}_k(E_1; \mathscr{C}_p(E_2; E_3))$. On a:

$$[\gamma, \mathrm{id}^\circ] : E_1 \to \mathscr{C}_p(E_2; E_1) \times \mathscr{C}_p(E_2; E_2)$$

et

$$\alpha : \mathscr{C}_p(E_2; E_1) \times \mathscr{C}_p(E_2; E_2) \to \mathscr{C}_p(E_2; E_1 \times E_2)$$

sont des morphismes de $\mathfrak{C}_k$ d'après (4.10) et (4.20). Il en est de même de $g_*:\mathscr{C}_p(E_2;E_1\times E_2)\to\mathscr{C}_p(E_2;E_3)$ d'après (4.30). Du reste $\Psi=(\alpha\circ[\gamma,\mathrm{id}^\circ])^*\circ c_2$, où $\alpha\circ[\gamma,\mathrm{id}^\circ]\in\mathscr{C}_k(E_1;\mathscr{C}_p(E_2;E_1\times E_2))$, donc $(\alpha\circ[\gamma,\mathrm{id}^\circ])^*:\mathscr{C}_k(\mathscr{C}_p(E_2;E_1\times E_2);\mathscr{C}_p(E_2;E_3))\to\mathscr{C}_k(E_1,\mathscr{C}_p(E_2;E_3))$ est continue d'après (4.32), et

$$c_2:\mathscr{C}_{k+p}(E_1\times E_2;E_3)\to\mathscr{C}_k(\mathscr{C}_p(E_2;E_1\times E_2);\mathscr{C}_p(E_2;E_3))$$

est continue d'après (4.31).

(4.35) THÉORÈME. *L'application linéaire*

$$\Psi:\mathscr{C}_\infty(E_1\times E_2;E_3)\to\mathscr{C}_\infty(E_1;\mathscr{C}_\infty(E_2;E_3))$$

définie par $(\Psi g)(x)\cdot y=g(x,y)$ *est un homéomorphisme.*

Pour la démonstration on se base ou bien sur (4.34) et (4.33) ou bien sur (2.15) en appliquant (4.28), (4.20) et (4.10).

De nouveau $\mathscr{C}_\infty$ peut être considéré comme foncteur de deux variables (cf. 2.14).

4.7 *Complétitude de* $\mathscr{C}_k(E_1;E_2)$

(4.36) PROPOSITION. *Si* $E_2=E_2^{\circ\times}$ *et* E_2 *est complet, alors* $\mathscr{C}_k(E_1;E_2)$ *est complet.*

Pour $k=0$ c'est déjà démontré dans (2.32). Supposons la proposition pour $k<\infty$, et soit $\mathscr{F}-\mathscr{F}\downarrow\mathscr{C}_{k+1}(E_1;E_2)$. D'après (4.13) on a $\mathscr{F}-\mathscr{F}\downarrow\mathscr{C}_k(E_1;E_2)$, et en vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe $f\in\mathscr{C}_k(E_1;E_2)$ tel que $\mathscr{F}-f\downarrow\mathscr{C}_k(E_1;E_2)$, donc en particulier $\mathscr{F}^{(k)}-f^{(k)}\downarrow\mathscr{C}_0(E_1;\mathscr{L}_k(E_1;E_2))$. D'autre part $\mathscr{F}^{(k+1)}-\mathscr{F}^{(k+1)}\downarrow\mathscr{C}_0(E_1;\mathscr{L}_{k+1}(E_1;E_2))$.

D'après (2.32) il existe $g\in\mathscr{C}_0(E_1;\mathscr{L}_{k+1}(E_1;E_2))$ tel que $\mathscr{F}^{(k+1)}-g\downarrow\mathscr{C}_0(E_1;\mathscr{L}_{k+1}(E_1;E_2))$, donc $\mathscr{F}^{(k)'}-\tilde{g}\downarrow\mathscr{C}_0(E_1;\mathscr{L}(E_1;\mathscr{L}_k(E_1;E_2)))$ selon (4.19) et (2.26), où $\tilde{g}=\Psi_*(g)$.

Soit $\mathscr{F}^{(k)}=\mathscr{H}$, $f^{(k)}=h$, $\mathscr{L}_k(E_1;E_2)=E_3$, $a\in E_1$, et r_ψ, φ_a définies par $r_\psi(x)=\psi(a+x)-\psi(a)-\tilde{g}(a)\cdot x$ et $\varphi_a(x)=\varphi(a+x)-\varphi(a)$. Alors

(1) $r_h(x)=(h_a-\varphi_a)(x)+r_\varphi(x)$. Nous affirmons

(4.37) $\mathbf{V}\cdot A\downarrow E_1\Rightarrow\Theta\, r_h(\mathbf{V},A)\downarrow E_3$ ce qui achèvera la démonstration car alors $h'(a)=\tilde{g}(a)$ pour tout $a\in E_1$, donc $f^{(k+1)}=g$.

Si φ, ψ sont différentiables au point a, alors

$$(\varphi_a-\psi_a)'(x)=(\varphi'-\psi')(a+x).$$

On a

$$(\varphi_a-\psi_a)(0)=0$$

donc en vertu de (3.7):

(2) $\Theta(\mathscr{H}_a-\mathscr{H}_a)(\mathbf{V},A)\leqslant((\mathscr{H}'-\mathscr{H}')(a+\mathbf{V}\cdot A)\cdot A)^*\downarrow E_3$ puisque $\mathscr{H}'-\mathscr{H}'\downarrow\mathscr{C}_0\times\times(E_1;\mathscr{L}(E_1;E_3))$, et puisque E_3 est raffiné.

Soit $\mathscr{U}$ le filtre des voisinages de zéro dans E_3°, $U \in \mathscr{U}$. Alors il existe $V \in \mathbf{V}$, $H \in \mathscr{H}$ tels que $\Theta(H_a - H_a)(V, A) \subset U$.

Soient $\lambda \in V$, $x \in A$. Alors il existe $\psi \in H$ tel que $\Theta(h_a - \psi_a)(\lambda, x) \in U$, d'où $\Theta(h_a - \varphi_a)(\lambda, x) = \Theta(h_a - \psi_a)(\lambda, x) + \Theta(\psi_a - \varphi_a)(\lambda, x) \in U + U$ pour tout $\varphi \in H$, $\lambda \in V$, $x \in A$, c.à.d.

(3) $\Theta(h_a - \mathscr{H}_a)(\mathbf{V}, A) \leqslant \mathscr{U} + \mathscr{U} \downarrow E_3^\circ$.

De (1) à (3) on déduit:

$$\Theta\, r_h(\mathbf{V}, A) \leqslant \Theta(\mathscr{H}_a - \mathscr{H}_a)(\mathbf{V}, A) + \Theta(h_a - \mathscr{H})(\mathbf{V}, A) \downarrow E_3^\circ,$$

donc $h\colon E_1 \to E_3^\circ$ est différentiable au point a au sens de (3.2.2), car $\tilde{g}(a) \in \mathscr{L}(E_1; E_3)$ entraîne $\tilde{g}(a) \in \mathscr{L}(E_1; E_3^\circ)$ et en vertu de (1.9). Donc appliquant (5.3.5) et observant que

$$r_h(0) = 0 \quad \text{et} \quad r_h'(0) = \tilde{g}(a + x) - \tilde{g}(a)$$

on obtient

$$\Theta\, r_h(\mathbf{V}, A) \leqslant (\Delta\, \tilde{g}(a, \mathbf{V} \cdot A) \cdot A)^\circ \downarrow E_3$$

puisque $\tilde{g} \in \mathscr{C}_0(E_1; \mathscr{L}(E_1; E_3))$ et $\mathscr{Y}^\circ \leqslant \mathscr{Y}^*$ pour tout filtre sur E_3, ce qui achève la démonstration de (4.36).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bastiani, A., *Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie*, Journal d'Analyse Mathématique *XIII* (1964), 1–114.

[2] Dieudonné, J., *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, 1960.

[3] Fischer, H. R., *Limesräume*, Math. Annalen *137* (1959), 269–303.

[4] Frölicher, A., et Bucher, W., *Calculus in Vector Spaces without Norm*, Lecture Notes in Mathematics *30* (1966).

[5] Keller, H. H., *Räume stetiger multilinearer Abbildungen als Limesräume*, Math. Annalen *159* (1965) 259–270.

[6] Köthe, G., *Topologische lineare Räume*, Springer, 1960.

Reçu le 8 septembre 1967