Multiplizitätenvergleich unter Verwendung von Testkurven.

Autor(en): **Scheja, Günter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **44 (1969)**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-33786

Multiplizitätenvergleich unter Verwendung von Testkurven[1])

Von Günter Scheja

Einleitung

D. Mumford hat mittels Modifikationen gezeigt: Von Parametersystemen erzeugte Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ im Potenzreihenring $P=k[\![x, y]\!]$ in den Unbestimmten x, y über dem Körper k der Charakteristik 0 haben gleiche Multiplizität, wenn sie auf allen singularitätenfreien Kurven „gleich" sind, nämlich wenn für jeden Homomorphismus φ von P in den Potenzreihenring $T=k[\![t]\!]$ in einer Unbestimmten t gilt: $\varphi(\mathfrak{a})\,T=\varphi(\mathfrak{b})\,T$. Dieses Kriterium wurde verwendet, um Multiplizitäten von Idealen zu vergleichen, die von partiellen Ableitungen gewisser Funktionen erzeugt werden und bei der Untersuchung lokaler Kählerscher Differentialmoduln von Kurven im k^2 anfallen (Unveröffentlichtes Manuskript).

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß mit Mitteln der lokalen Algebra ein Kriterium der angegebenen Art für offene Ideale in lokalen Macaulayringen erhalten werden kann, wenn auf die Singularitätenfreiheit der Testkurven verzichtet wird. Bei analytischen Algebren mit algebraisch-abgeschlossenem Grundkörper ist dies freilich keine Einschränkung.

Als Anwendung ergibt sich eine einfache Aussage über algebraische Abhängigkeiten zwischen analytischen Funktionen und ihren partiellen Ableitungen, mit der eine Frage von E. Brieskorn beantwortet werden kann – auf die hin die vorliegende Arbeit entstanden ist; die Kenntnis des Manuskriptes von Mumford verdanke ich ebenfalls Herrn Brieskorn. In einem Anhang wird ein andersartiger, direkter Beweis der gerade erwähnten Anwendung beschrieben, der von E. Böger gegeben wurde.

Herrn Brieskorn, Herrn Mumford und Herrn Böger danke ich herzlich für ihre Anregungen und ihre Hilfe.

1. Vorbereitungen

Im folgenden sei mit R stets ein lokaler Ring bezeichnet und mit $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal. *Wir setzen generell voraus, daß der Restklassenkörper $R/\mathfrak{m}$ unendlich ist.*

Ist $\mathfrak{q}$ irgendein Ideal in R, dann sei mit $\lambda(\mathfrak{q})$ die Länge des R-Moduls $R/\mathfrak{q}$ bezeichnet.

Ist $\mathfrak{q}$ ein offenes Ideal in R – worunter wir ein in $\mathfrak{m}$ enthaltenes, $\mathfrak{m}$-primäres Ideal

---

[1]) Die Anfertigung dieser Arbeit wurde gefördert durch den Schweizerischen Nationalfonds, Vertrag Nr. 5123.2.

verstehen wollen –, dann ist die Multiplizität $e(\mathfrak{q})$ eine wohldefinierte natürliche Zahl ([9; VIII], [5; III]).

Wir benötigen den Begriff der *Ganz-Abhängigkeit* von Idealen, der von H. Prüfer, O. Zariski, P. Samuel, D. G. Northcott, D. Rees, M. Nagata u.a. entwickelt worden ist: Siehe [9; App. 4], [6] und [4], sowie die dort angegebenen Quellen.

Ein Element $x \in R$ heißt *ganz über dem Ideal* $\mathfrak{a} \subseteq R$ (auch: *ganz-abhängig von* $\mathfrak{a}$), wenn es eine Ganzheitsgleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \qquad a_j \in \mathfrak{a}^j \quad \text{für} \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

gibt; eine Teilmenge von R heißt ganz über $\mathfrak{a}$, wenn jedes Element der Menge ganz über $\mathfrak{a}$ ist. Die Menge aller über $\mathfrak{a}$ ganzen Elemente von R macht ein $\mathfrak{a}$ umfassendes Ideal $\mathfrak{a}'$ aus, genannt die *(ganz-abgeschlossene) Hülle* von $\mathfrak{a}$ in R; es ist $(\mathfrak{a}')' = \mathfrak{a}'$. Zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in R heißen *äquivalent*, wenn sie gleiche Hüllen haben. Offenbar gilt:

(1.1) *Zwei Ideale* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *in R sind genau dann äquivalent, wenn* $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ *ganz über* $\mathfrak{a}$ *und über* $\mathfrak{b}$ *ist.*

Ein Ideal $\mathfrak{b}$ heißt *Reduktion* des Ideals $\mathfrak{a}$ in R, wenn $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ ist und es eine natürliche Zahl r gibt, so daß $\mathfrak{b}\mathfrak{a}^r = \mathfrak{a}^{r+1}$ ist. Es gilt ([5; S. 34]):

(1.2) *Ideale* $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ *in R sind genau dann äquivalent, wenn* $\mathfrak{b}$ *Reduktion von* $\mathfrak{a}$ *ist.*

Ist $\mathfrak{b}$ Reduktion von $\mathfrak{a}$, dann ist natürlich auch jedes zwischen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ liegende Ideal Reduktion von $\mathfrak{a}$. Umgekehrt gilt:

(1.3) *Sind* $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ *Ideale in R und ist* $\mathfrak{b}+\mathfrak{m}\mathfrak{a}$ *Reduktion von* $\mathfrak{a}$, *dann ist auch* $\mathfrak{b}$ *Reduktion von* $\mathfrak{a}$.

Beweis. Aus $\mathfrak{a}^{r+1} = (\mathfrak{b}+\mathfrak{m}\mathfrak{a})\,\mathfrak{a}^r = \mathfrak{b}\mathfrak{a}^r + \mathfrak{m}\mathfrak{a}^{r+1}$ folgt $\mathfrak{a}^{r+1} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}^r$ nach Krulls Lemma.

Eine Reduktion $\mathfrak{b}$ des Ideals $\mathfrak{a}$ in R heißt *minimal*, wenn $\mathfrak{b}$ keine weiteren Reduktionen von $\mathfrak{a}$ echt umfaßt. Man kann zeigen, daß jede Reduktion von $\mathfrak{a}$ eine minimale Reduktion enthält ([6]).

Sei $s := \dim R$. Elemente $\{f_1, \ldots, f_s\}$ aus $\mathfrak{m}$ bilden ein *Parametersystem* in R, wenn sie ein offenes Ideal in R erzeugen. Von Parametersystemen erzeugte Ideale sollen hier *Parameterideale* genannt werden. Mit Hilfe der in [9; VIII] angegebenen Mittel beweist man sehr leicht:

(1.4) *Ist* $\mathfrak{a}$ *offenes Ideal in R und ist R ein Macaulayring, dann ist* $e(\mathfrak{a}) = \min\{\lambda(\mathfrak{q}) : \mathfrak{q}$ *Parameterideal in R*, $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{a}\}$.

Aus einer einfachen Abschätzung der Werte der betreffenden Hilbert-Samuel-Polynome ergibt sich ([6]):

(1.5) *Ist* $\mathfrak{b}$ *Reduktion des offenen Ideals* $\mathfrak{a}$, *dann ist* $e(\mathfrak{b}) = e(\mathfrak{a})$.

Tiefliegend ist hingegend die folgende Umkehrung:

(1.6) *Satz von Rees: Sind* $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ *offene Ideale in* R *mit* $e(\mathfrak{b}) = e(\mathfrak{a})$ *und ist* R *quasi-ungemischt, dann ist* $\mathfrak{b}$ *Reduktion von* $\mathfrak{a}$.

Dabei heißt R quasi-ungemischt, wenn alle minimalen Primideale der Komplettierung von R dieselbe Dimension haben. Jeder lokale Macaulayring ist quasi-ungemischt.

Beweis von (1.6): Siehe Rees [7]. Ein neuer, einfacher Beweis wurde von E. Böger gegeben (Dissertation Münster 1967; veröffentlicht in [2] und [3]).

2. Multiplizitätenvergleich mittels Kurven

Es sei wieder R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und *unendlichem* Restklassenkörper $R/\mathfrak{m}$.

DEFINITION. Offene Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in R heißen *kurvenäquivalent*, wenn für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ der Dimension 1 in R gilt: $e(\mathfrak{a}+\mathfrak{p}/\mathfrak{p}) = e(\mathfrak{b}+\mathfrak{p}/\mathfrak{p})$.

SATZ 1. *Äquivalente offene Ideale sind kurvenäquivalent.*

Beweis direkt mit (1.1), (1.2) und (1.5), da Reduktionen unter Homomorphismen erhalten bleiben. –

Man kann Satz 1 vor allem verwenden, um auszuschließen, daß konkret gegebene Ideale äquivalent sind. Beispiel: Seien $R := k[\![x, y]\!]$, x, y Unbestimmte über dem Körper k. Die Ideale (x, y^2) und (x^2, y) sind offenbar nicht kurvenäquivalent, also auch nicht äquivalent. – Diese Ideale haben gleiche Multiplizität; sie gehen sogar durch einen Automorphismus von R ineinander über. Offene Ideale derselben Multiplizität brauchen also nicht äquivalent zu sein. –

Die nachfolgenden Sätze 2 und 3 geben Umkehrungen von Satz 1 unter gewissen Voraussetzungen an.

SATZ 2. *Ist* R *Macaulayring, dann sind kurvenäquivalente offene Ideale* $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ *in* R *äquivalent.*

Beweis. Die offenen Ideale $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ seien kurvenäquivalent. Da alle (endlich vielen) Ideale zwischen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ ebenfalls kurvenäquivalent sind, können wir annehmen, daß $\lambda(\mathfrak{b}) - \lambda(\mathfrak{a}) \leqslant 1$ ist. Wegen (1.6) ist zu zeigen: $e(\mathfrak{b}) = e(\mathfrak{a})$. Sei $s := \dim R$. Der Fall $s = 0$ ist trivial.

Wir führen nun zuerst den Fall $s \geqslant 2$ auf den eindimensionalen Fall zurück. Nach (1.4) gibt es ein Parameterideal $\mathfrak{q}$ in R mit $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{a}$ und $\lambda(\mathfrak{q}) = e(\mathfrak{a})$. Wegen $\lambda(\mathfrak{b}) - \lambda(\mathfrak{a}) \leqslant 1$ gibt es ein Erzeugendensystem $\{f_1, \ldots, f_s\}$ von $\mathfrak{q}$, so daß $\mathfrak{c} := Rf_1 + \cdots + Rf_{s-1} \subseteq \mathfrak{b}$ ist. Unter Benutzung von (1.4) ergibt sich $e(\mathfrak{a}) = e(\mathfrak{a}/\mathfrak{c})$, da $R/\mathfrak{c}$ ein Macaulayring ist.

Ferner ist $e(\mathfrak{b}) \leqslant e(\mathfrak{b}/\mathfrak{c})$; siehe [5; S. 78]. $\mathfrak{b}/\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}/\mathfrak{c}$ sind erst recht kurvenäquivalent. Hat man $e(\mathfrak{b}/\mathfrak{c}) = e(\mathfrak{a}/\mathfrak{c})$ zur Verfügung, dann ergibt sich sofort $e(\mathfrak{b}) \leqslant e(\mathfrak{a})$ und hieraus $e(\mathfrak{b}) = e(\mathfrak{a})$, da wegen $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ trivialerweise $e(\mathfrak{b}) \geqslant e(\mathfrak{a})$ ist.

Es genügt also zu zeigen: Kurvenäquivalente offene Ideale in einem eindimensionalen lokalen Ring R haben dieselbe Multiplizität. Das folgt aber unmittelbar aus dem bekannten Satz [5; (23.5)] von Serre–Nagata: Ist M die Menge der minimalen – also hier: eindimensionalen–Primideale von R, dann gilt für jedes offene Ideal $\mathfrak{q}$ in R

$$e(\mathfrak{q}) = \sum_{\mathfrak{p} \in M} e(\mathfrak{q} + \mathfrak{p}/\mathfrak{p})\, LR_{\mathfrak{p}},$$

wobei $LR_{\mathfrak{p}}$ die Länge der Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ bezeichnet. Satz 2 ist bewiesen. –

Die Voraussetzung $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ in Satz 2 ist bei „wirklich lokalen“ Ringen überflüssig:

SATZ 3. *Ist R ein henselscher Macaulayring, dann sind kurvenäquivalente offene Ideale in R schlechtweg äquivalent.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ offene kurvenäquivalente Ideale in R. Nach (1.1) und Satz 2 bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ kurvenäquivalent zu $\mathfrak{a}$ und zu $\mathfrak{b}$ ist. Es genügt also, die eindimensionalen Restklassenringe von R nach Primidealen zu betrachten. Wir können daher o.B.d.A. annehmen, daß R ein eindimensionaler Integritätsring ist. Man hat $e(\mathfrak{a}) = e(\mathfrak{b})$. Zu zeigen ist: $e(\mathfrak{a}) = e(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = e(\mathfrak{b})$.

Sei K der Körper der Brüche von R. Die gewöhnliche ganz-abgeschlossene Hülle von R in K sei mit R' bezeichnet. Nach dem bekannten Krullschen Satz ist R' noethersch und $\dim R' \leqslant 1$. Daher ist R' ein normaler noetherscher Ring der Dimension 1. Da R' ganz über dem henselschen lokalen Ring R ist, ist R' lokal ([5; (30.5)]). Daher ist R' sogar ein diskreter Bewertungsring. Die Erweiterungsideale $\mathfrak{a}R'$ und $\mathfrak{b}R'$ stehen also in einer Enthaltenseins-Relation; sei etwa $\mathfrak{b}R' \subseteq \mathfrak{a}R'$.

Es gibt endlich viele Elemente $a_1, \ldots, a_r$ von R', so daß bereits im Ring $R'' := R[a_1, \ldots, a_r]$ gilt: $\mathfrak{b}R'' \subseteq \mathfrak{a}R''$. Dabei ist R'' ein endlicher R-Modul. Jeder Ring zwischen R und R' hat nur ein einziges maximales Ideal. Daher ist der Ring R'' lokal; sein maximales Ideal sei mit $\mathfrak{m}''$ bezeichnet.

Ist $\mathfrak{q}$ irgendein offenes Ideal in R, dann gilt nach der Erweiterungsformel [9; VIII, § 10] – die sich anwenden läßt, da R'' endlich über R ist: $e(\mathfrak{q}) = [(R''/\mathfrak{m}''):(R/\mathfrak{m})] \cdot e(\mathfrak{q}R'')$. Offene Ideale in R sind also genau dann multiplizitätengleich, wenn ihre Erweiterungsideale in R'' multiplizitätengleich sind. Nun ist aber $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})R'' = \mathfrak{a}R'' + \mathfrak{b}R'' = \mathfrak{a}R''$, so daß $e(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = e(\mathfrak{a})$ folgt, was zu zeigen war. –

Alle kompletten lokalen Ringe sind henselsch [5; (30.3)].

DEFINITION. Als *analytische k-Algebra* wird jeder nichttriviale Restklassenring eines formalen oder konvergenten Potenzreihenringes in endlich vielen Unbestimmten über einem Körper k, bzw. über einem nichtdiskret bewerteten Körper k bezeichnet.

Auch die analytischen Algebren sind henselsch; siehe [1; (20.6)] oder [5; (45.5)]. Für analytische Algebren über algebraisch-abgeschlossenem Grundkörper läßt sich das Kriterium der vorstehenden Sätze in eine geschlossene Form bringen:

SATZ 4. *Es seien R eine analytische k-Algebra und $T:=k\langle\langle t\rangle\rangle$ der Potenzreihenring in einer Unbestimmten über k (derselben Kategorie wie R); R sei ein Macaulayring, k sei algebraisch-abgeschlossen. Dann hat man:*

Offene Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in R sind genau dann äquivalent, wenn für jeden k-Algebra-homomorphismus $\varphi: R\to T$ gilt: $\varphi(\mathfrak{a})\,T=\varphi(\mathfrak{b})\,T$.

Beweis. Es genügt wegen der vorhergehenden Sätze zu zeigen, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ genau dann kurvenäquivalent sind, wenn die Bedingung von Satz 4 erfüllt ist.

Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal der Dimension 1 in R und $\bar{R}:=R/\mathfrak{p}$. Mit $\bar{R}'$ sei der ganze Abschluß von $\bar{R}$ in seinem Körper der Brüche bezeichnet. Wegen der algebraischen Abgeschlossenheit von k ist $\bar{R}'$ eine analytische k-Algebra (derselben Kategorie wie R) und endlicher $\bar{R}$-Modul (bei konvergenten analytischen Algebren entnimmt man dies [1; (46.27)]. Im Falle kompletter k-Algebren verwendet man zum Beweis [5; (32.1)] (Endlichkeit über $\bar{R}$) und die einfache Aussage, daß $\bar{R}'$ ein Potenzreihenring ist: [9; VIII, § 12, S. 307]; der Cohensche Satz wird nicht dazu herangezogen). $\bar{R}'$ ist regulär und damit isomorph zu T. Die Komposition $R\to\bar{R}\to T$ kanonischer Abbildungen sei mit φ bezeichnet. φ ist ein analytischer Homomorphismus. Gilt $\varphi(\mathfrak{a})\,T=\varphi(\mathfrak{b})\,T$, dann stimmen die Erweiterungsideale $(\mathfrak{a}+\mathfrak{p}/\mathfrak{p})\,\bar{R}'$ und $(\mathfrak{b}+\mathfrak{p}/\mathfrak{p})\,\bar{R}'$ überein. Da $\bar{R}'$ endlich über $\bar{R}$ ist, kann man die Erweiterungsformel (siehe Beweis von Satz 3) anwenden und erhält: $\mathfrak{a}+\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{b}+\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$ haben gleiche Multiplizität. Ist die Bedingung des Satzes 4 erfüllt, dann sind also $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ kurvenäquivalent.

Seien umgekehrt $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ kurvenäquivalent und sei $\varphi: R\to T$ ein analytischer Homomorphismus. Es interessiert nur der Fall, daß φ nichttrivial ist, also das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R nicht trivial abbildet. Dann ist $\mathfrak{p}:=\operatorname{Kern}\varphi$ ein eindimensionales Primideal in R; ferner ist $T/\varphi(\mathfrak{m})\,T$ endlichdimensional, so daß T nach dem Serreschen Endlichkeitssatz ein endlicher Modul über der analytischen Algebra Bild $\varphi=R/\mathfrak{p}$ ist. Wieder läßt sich die Erweiterungsformel anwenden (in einer allgemeineren Situation; denn Bild φ und T brauchen ja nicht denselben Körper der Brüche zu haben): $\varphi(\mathfrak{a})\,T$ und $\varphi(\mathfrak{b})\,T$ haben, da nach Voraussetzung $e(\mathfrak{a}+\mathfrak{p}/\mathfrak{p})=e(\mathfrak{b}+\mathfrak{p}/\mathfrak{p})$ ist, dieselbe Multiplizität. In T bedeutet das natürlich $\varphi(\mathfrak{a})\,T=\varphi(\mathfrak{b})\,T$.

3. Analytisch-abhängige Ideale in Potenzreihenringen

Es sei P ein Potenzreihenring in den Unbestimmten $x_1,\dots,x_n$ über dem Körper k. Mit ∂_j sei die partielle Differentiation in P nach x_j bezeichnet, $1\leqslant j\leqslant n$. Es seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ echte Ideale in P.

DEFINITION. $\mathfrak{a}$ heißt *analytisch-abhängig von* $\mathfrak{b}$, wenn es Elemente $f_1, \ldots, f_r \in \mathfrak{a}$ gibt, so daß gilt:

1. $\mathfrak{b}+\mathfrak{a}=\mathfrak{b}+Pf_1+\cdots+Pf_r$.
2. $\partial_j f_i \in \mathfrak{b}+\mathfrak{a}$ für alle $i=1, \ldots, r, j=1, \ldots, n$.

Der Beweis des folgenden Satzes beruht auf einem Kunstgriff, den D. Mumford in einer ähnlichen Situation benutzt hat (Vgl. die Einleitung).

SATZ 5. *Es sei P ein Potenzreihenring in den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ über einem Körper k der Charakteristik* 0. *Es seien* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *Ideale in P;* $\mathfrak{a}$ *sei analytisch-abhängig von* $\mathfrak{b}$ *und offen. Dann ist* $\mathfrak{a}$ *ganz-abhängig von* $\mathfrak{b}$.

Beweis. Wir können annehmen: $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$. Wegen (1.3) können wir außerdem $\mathfrak{b}$ als offen voraussetzen.

Übergang zur Komplettierung von P und dann Übergang zum formalen Potenzreihenring über einem Erweiterungskörper von k ist ein exakter, längentreuer Funktor. $\mathfrak{b}$ ist also genau dann Reduktion von $\mathfrak{b}+\mathfrak{a}$, wenn diese Beziehung für die Erweiterungsideale bei den Übergängen gilt. Ferner bleibt die analytische Abhängigkeit bei den Übergängen erhalten. Wir dürfen deshalb annehmen: $P=k[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ mit Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ über k, $\operatorname{char} k=0$, k algebraisch-abgeschlossen. Sei $T:=k[\![t]\!]$ mit der Unbestimmten t über k; das maximale Ideal von T sei mit $\mathfrak{n}$ bezeichnet.

Wir verwenden Satz 4. Sei $\varphi: P \rightarrow T$ ein analytischer Homomorphismus. Wir haben zu zeigen: $\varphi(\mathfrak{a})\, T=\varphi(\mathfrak{b})\, T$.

Betrachten wir irgendein $f \in \mathfrak{a}$ mit $\partial_j f \in \mathfrak{a}$ für alle $j=1, \ldots, n$. Die Ableitung eines $g \in T$ nach t werde mit g' bezeichnet. Die Kettenregel besagt nun:

$$\varphi(f)'=\sum_{j=1}^{n} \varphi(\partial_j f)\, \varphi(x_j)' .$$

φ ist lokal, so daß $\varphi(f) \in \mathfrak{n}$. Wegen $\operatorname{char} k=0$ gibt es eine Einheit ε in T, so daß $\varepsilon t \varphi(f)'=\varphi(f)$ ist. Somit ist

$$\varphi(f)=\varepsilon t \sum_{j=1}^{n} \varphi(\partial_j f)\, \varphi(x_j)' \in \mathfrak{n} \cdot \varphi(\mathfrak{a})\, T .$$

Daraus folgt nach der Voraussetzung über $\mathfrak{a}$ sofort: $\varphi(\mathfrak{b})\, T=\varphi(\mathfrak{a})\, T$. –

Die Umkehrung von Satz 5 gilt nicht. Beispiel: $P=k[\![x, y]\!]$, $\mathfrak{b}:=Px^2+Py^2$, $\mathfrak{a}:=\mathfrak{b}+Pxy$. $\mathfrak{b}$ ist Reduktion von $\mathfrak{a}$; denn es ist $(xy)^2-x^2y^2=0$. $\mathfrak{a}$ ist nicht analytisch-abhängig von $\mathfrak{b}$, wie man leicht verifiziert.

Aus Satz 5 folgt insbesondere: Ist das offene Ideal $\mathfrak{a}$ analytisch-abhängig vom Ideal $\mathfrak{b}$, dann ist auch $\mathfrak{b}$ offen. Allgemeiner läßt sich (ganz elementar) zeigen, daß beliebige voneinander analytisch-abhängige Ideale dasselbe Radikal besitzen (Siehe [8]). Ob Satz 5 auch für Ideale beliebiger Dimension gilt, bleibt offen.[2]

[2]) Zusatz bei der Korrektur: Satz 5 gilt allgemein; siehe [8].

Anwendung

Es sei P der Ring der konvergenten Potenzreihen in den Unbestimmten $x_1,\ldots,x_n$ über den komplexen Zahlen C. Es sei f ein Element von P, so daß die Hyperfläche $f(x_1,\ldots,x_n)=0$ im Nullpunkt des C^n eine isolierte Singularität besitzt. Dann ist $\mathfrak{b}:=P\,\partial_1 f+\cdots+P\,\partial_n f$ ein Parameterideal in P. Das Ideal $\mathfrak{a}:=\mathfrak{b}+Pf$ ist im Gegensatz zu $\mathfrak{b}$ unabhängig von der Wahl des erzeugenden Elementes f von Pf und unabhängig von der Wahl der Koordinaten.

Bei ihren differential-topologischen Untersuchungen isolierter Hyperflächensingularitäten benutzen E. Brieskorn und J. Milnor die durch die Funktionen $\partial_1 f,\ldots,\partial_n f$ bestimmte holomorphe Abbildung $F: C^n\to C^n$, die eine analytisch-verzweigte Überlagerung in der Umgebung des Nullpunktes definiert; die Blätterzahl b dieser Überlagerung ist bekanntlich $\lambda(\mathfrak{b})$ (Erweiterungsformel). Aus Überlegungen von Milnor folgt, daß b von der Wahl des erzeugenden Elementes f von Pf und von der Wahl der Koordinaten nicht abhängt. E. Brieskorn hat vorgeschlagen, diese Invarianz von b mit einfachen Mitteln der lokalen Algebra nachzuweisen.

Ein solcher Beweis ergibt sich nun wie folgt: Nach (1.4) ist $b=\lambda(\mathfrak{b})=e(\mathfrak{b})$. $\mathfrak{a}$ ist analytisch-abhängig von $\mathfrak{b}$, so daß $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}$ nach Satz 5 dieselbe Multiplizität haben. Also ist $b=e(\mathfrak{a})$ invariant. – Dieser Beweis benutzt nicht wirklich den Satz von Rees, wie nach den Formulierungen von Satz 4 und Satz 5 zu erwarten wäre.

Anhang (von E. Böger)

Ein direkter Beweis von Satz 5 wird gegeben, der die Heranziehung des nichttrivialen Satzes (1.6) vermeidet. Bezeichnungen wie in Satz 5 werden verwendet. Es kann angenommen werden, daß $\mathfrak{b}$ offen und in $\mathfrak{a}$ enthalten ist.

Die ganz-abgeschlossene Hülle $\mathfrak{b}'$ von $\mathfrak{b}$ ist Durchschnitt mit P von Idealen $\mathfrak{b}V_i$, wobei V_i eine gewisse (sogar endliche) Menge von P umfassenden diskreten Bewertungsringen im Körper der Brüche von P durchläuft (Siehe [4; thm. 6] und [9; App. 4, thm. 3]). Es sei V ein beliebiger dieser Bewertungsringe V_i. Es genügt zu zeigen: $\mathfrak{a}V=\mathfrak{b}V$. Es genügt, dies in der Komplettierung T von V nachzuweisen. Es gibt einen (k umfassenden) Körper K in T, so daß T nichts anderes als ein Potenzreihenring $K[[t]]$ ist. Man darf annehmen, daß $\mathfrak{b}T\neq T$ ist. Dann gilt auch $\mathfrak{m}T\neq T$ für das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von P, da $\mathfrak{m}$ das Radikal von $\mathfrak{b}$ ist. Nun ergibt sich $\mathfrak{a}T=\mathfrak{b}T$ in genau derselben Weise wie im Beweis zu Satz 5 mit Hilfe der Kettenregel.

Man hat sich nur zu überzeugen, daß die Kettenregel wirklich gilt. Die Differentiation bezüglich t auf P ergibt durch Beschränkung eine k-Derivation $\delta: P\to T$. Zu zeigen ist, daß δ mit der k-Derivation $\delta^*:=\sum_{j=1}^n \delta(x_j)\cdot\partial_j$, $\delta^*: P\to T$, übereinstimmt. Mit Hilfe der Produktregel sieht man leicht, daß δ und δ^* auf dem Polynomring $k[x_1,\ldots,x_n]$ übereinstimmen. Diese Identität setzt sich auf P fort, da $\mathfrak{m}^{r+1}$ von δ und δ^* in $\mathfrak{m}^r T$, also wegen $\mathfrak{m}T\neq T$ in $t^r T$ abgebildet wird, $r\geqslant 1$ beliebig.

LITERATUR

[1] ABHYANKAR, S. S., *Local Analytic Geometry* (Academic Press, New York 1964).
[2] BÖGER, E., *Minimalitätsbedingungen in der Theorie der Reduktionen von Idealen*, Schriftenreihe Math. Inst. Münster, Heft 40 (1968).
[3] ——, *Eine Verallgemeinerung eines Multiplizitätensatzes von* D. REES (erscheint demnächst).
[4] NAGATA, M., *Note on a Paper of Samuel Concerning Asymptotic Properties of Ideals*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto [Ser. A] *30* (1957), 165–175.
[5] ——, *Local rings* (Intersci. Publ., New York 1962).
[6] NORTHCOTT, D. G. and REES, D., *Reductions of Ideals in Local Rings*, Proc. Cambr. Phil. Soc. *50* (1954), 145–158.
[7] REES, D., *a-transforms of Local Rings and a Theorem on Multiplicities of Ideals*, Proc. Cambr. Phil. Soc. *57* (1961), 8–17.
[8] SCHEJA, G. und STORCH, U., *Über analytische Abhängigkeit von Idealen in Potenzreihenringen* (in Vorbereitung).
[9] ZARISKI, O. and SAMUEL, P., *Commutative algebra*, Vol. 2 (Van Nostrand, Princeton, N.J. 1960).

Institut de Mathématique
Bd. Pérolles
CH-1700 Fribourg

Eingegangen den 13. Nov. 1968