Zur Berechnung endlicher euklidischer Defekte in quadratischen Räumen.

Autor(en): **Hafner, Paul**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **45 (1970)**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-34648

Zur Berechnung endlicher euklidischer Defekte in quadratischen Räumen

PAUL HAFNER (Zürich)

Einleitung

Als zentraler Begriff für die Theorie quadratischer Räume erweist sich in [4] der euklidische Defekt. Die vorliegende Arbeit schliesst sich an Satz IV.1. von [4] an: wir führen einen Teil der dort angedeuteten Erweiterungsmöglichkeiten des Isomorphiesatzes durch (Satz 5). Damit erhalten wir eine Klassifikation von Räumen endlichen Defekts über speziellen Körpern (Korollar 5). Diese Resultate erlauben dann die Berechnung endlicher Defekte von Räumen über beliebigen Körpern (Satz 7). Schliesslich beweisen wir in leichter Verallgemeinerung von Satz 5 einen Isomorphiesatz für Unterräume endlicher Codimension in euklidischen Räumen über speziellen Körpern (Satz 9).

Herrn Professor Dr. H. Gross danke ich für viele anregende Diskussionen.

I. Bezeichnungen und Resultate

Wir betrachten Vektorräume über einem kommutativen Körper k, $\operatorname{char} k \neq 2$. Unter einem quadratischen Raum über k verstehen wir ein Paar (E, Φ), wobei E ein k-Vektorraum und Φ eine symmetrische Bilinearform $\Phi: E \times E \to k$ ist. Die Bezeichnungen unserer Arbeit sind die allgemein gebräuchlichen (man siehe z.B. Gross [4]). Ist U ein Unterraum, so bezeichnen wir $U \cap U^{\perp} = \operatorname{rad} U$ als das Radikal von U. Ein Teilraum V eines quadratischen Raumes E heisst dicht (in E), falls $V^{\perp\perp} = E$ ist; $W \subset E$ heisst (orthogonal) abgeschlossen, falls $W^{\perp\perp} = W$ gilt. Halbeinfache Räume (E, Φ), die eine bezüglich Φ orthogonale Basis besitzen, werden euklidische Räume genannt. Der euklidische Defekt $d(E)$ eines halbeinfachen Raumes E ist das Minimum von $\dim E/F$, wo F sämtliche euklidischen Unterräume von E durchläuft. Folgende Sätze werden wir immer wieder benützen:

1. Räume abzählbarer Dimension besitzen eine Orthogonalbasis.

2. ([4], Satz III.2.) Ist (E, Φ) halbeinfach und F eine euklidische Hyperebene in E, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) F besitzt eine Orthogonalbasis $(f_\tau)_{\tau \in I}$ und ein algebraisches Komplement l in E derart, dass $\Phi(f_\tau, l) \neq 0$ ist für überabzählbar viele $\tau \in I$.

(ii) Für jede Orthogonalbasis $(f_\tau)_{\tau \in I}$ von F und jedes Komplement l von F gilt $\Phi(f_\tau, l) \neq 0$ für überabzählbar viele $\tau \in I$.

(iii) $d(E) \neq 0$.

Wir werden in Satz 1 sehen, dass card$\{\tau \mid \Phi(f_\tau, l)\neq 0\}$ eine Invariante von F ist.

3. ([4], Satz III.4.) Sei (F, Φ) halbeinfach und von endlichem Defekt. Ist V ein euklidischer Teilraum der Codimension $d(F)$, so ist $V^\perp=(0)$.

4. ([4], Satz III.12.) $E=\oplus_I E_i$ sei die (äussere) orthogonale Summe einer höchstens abzählbaren Familie von Räumen (E_i, Φ_i) vom Defekt 1. Es ist $d(E)=\operatorname{card} I$.

5. ([4], Korollar III.1.) (E, Φ) sei euklidisch; F sei ein Teilraum mit $\dim[E/(F+ +F^\perp)]\leqslant\aleph_0$ und F besitze eine für Φ orthogonale Basis. Jeder Teilraum V von E, der $F+F^\perp$ umfasst, besitzt eine für Φ orthogonale Basis; V ist also euklidisch genau dann, wenn V halbeinfach ist.

6. Sehr nützlich ist folgender Satz von E. Ogg: (E, Φ) sei euklidisch. Jeder orthogonal abgeschlossene Teilraum $F\subset E$ lässt ebenfalls eine für Φ orthogonale Basis zu.

7. ([5], Satz 7.13.) (E, Φ) sei halbeinfach und von abzählbarer Dimension, V ein halbeinfacher Unterraum mit der Orthogonalbasis $(v_i)_{i\in N}$. V ist genau dann dicht, wenn es zu jedem $x\notin V$ eine unendliche Menge $I_x\subset \mathrm{N}$ gibt, sodass $\Phi(x, v_i)\neq 0$ für alle $i\in I_x$.

Besonders einfache Verhältnisse findet man bei unendlich dimensionalen Räumen dann vor, wenn der Grundkörper k folgende Eigenschaft besitzt:

(S) char $k\neq 2$, und es gibt eine nur von k abhängige natürliche Zahl n mit der Eigenschaft, dass jede quadratische Form in $n+1$ Variabeln über k die Null nicht trivial darstellt.

Wir werden der Kürze halber von S-Körpern sprechen. Halbeinfache Räume von abzählbar unendlicher Dimension über S-Körpern besitzen immer eine orthonormierte Basis. Dies ist gleichbedeutend damit, dass ein solcher Raum orthogonale Summe von hyperbolischen Ebenen ist (s. [6]); es gibt also „viele" isotrope Vektoren in diesen Räumen.

8. ([1], Satz 1) Über S-Körpern gilt der folgende Isomorphiesatz: Seien (E, Φ), $(\bar{E}, \Psi)$ halbeinfach und von abzählbarer Dimension; sind $V\subset E$, $\bar{V}\subset\bar{E}$ dichte Unterräume gleicher Codimension, so gibt es eine orthogonale Abbildung $\varphi: E\to\bar{E}$, die V in $\bar{V}$ überführt. Ist die Codimension von V endlich, so gibt es sogar zu jeder Isometrie $\varphi': G\to\bar{G}$ (G, $\bar{G}$ beliebige isometrische Komplemente von V bzw. $\bar{V}$) eine Fortsetzung $\varphi: E\to\bar{E}$ mit dieser Eigenschaft.

9. Allgemeiner gilt für S-Körper der folgende Satz: ([2], Scholion): E sei einhalbeinfacher Raum abzählbarer Dimension über einem S-Körper, V, $\bar{V}$ isometrische Unterräume, für die folgende Bedingungen erfüllt sind:

(C)
(i) $V^\perp\cong\bar{V}^\perp$,
(ii) $\dim[(\operatorname{rad} V)^{\perp\perp}/\operatorname{rad} V]=\dim[(\operatorname{rad}\bar{V})^{\perp\perp}/\operatorname{rad}\bar{V}]$,
(iii) $\dim[\operatorname{rad}(V^\perp)/(\operatorname{rad} V)^{\perp\perp}]=\dim[\operatorname{rad}(\bar{V}^\perp)/(\operatorname{rad}\bar{V})^{\perp\perp}]$,
(iv) $\dim[V^{\perp\perp}/(V+\operatorname{rad}(V^\perp))]=\dim[\bar{V}^{\perp\perp}/(\bar{V}+\operatorname{rad}(\bar{V}^\perp))]$,
(v) $\dim[(\operatorname{rad}(V^\perp))^\perp/(V^\perp+V^{\perp\perp})]=\dim[(\operatorname{rad}(\bar{V}^\perp))^\perp/(\bar{V}^\perp+\bar{V}^{\perp\perp})]$.

Dann gibt es eine Isometrie $\varphi: E \to E$, die V in $\bar{V}$ überführt.

Dieser Satz lässt sich übertragen auf den Fall, dass E euklidisch und von beliebiger überabzählbarer Dimension ist, sofern man für die Teilräume V, $\bar{V}$ mit den Eigenschaften (C) höchstens abzählbar unendliche Dimension beibehält. Dem Beweis schicken wir folgendes Lemma voraus:

LEMMA. *$B = A \oplus C$ sei ein Unterraum eines euklidischen Raumes E und A sei orthogonal abgeschlossen. Dann gilt*

$$\dim(A^{\perp}/B^{\perp}) = \dim B/A .$$

KOROLLAR 1. *Unter den Voraussetzungen des Lemmas gilt*

$$\dim(B^{\perp\perp}/B) \leqslant \dim B/A .$$

KOROLLAR 2. *Für Unterräume B von euklidischen Räumen gilt*

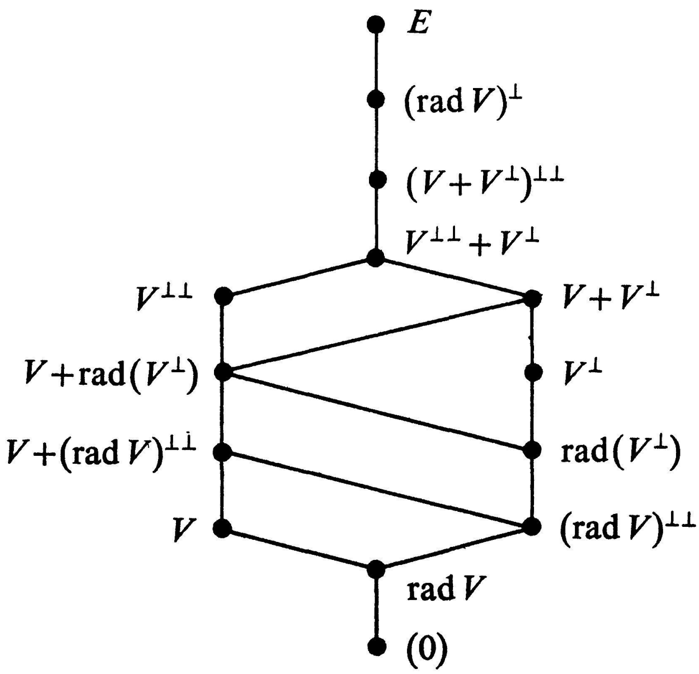
$$\dim B^{\perp\perp} = \dim B .$$

Beweis des Lemmas. $B^{\perp} = A^{\perp} \cap C^{\perp}$; da wir in einem euklidischen Raum E sind, gilt $\operatorname{codim}_E C^{\perp} = \dim C$, also $A^{\perp} = B^{\perp} \oplus D$ mit $\dim D \leqslant \dim C$. Damit haben wir das Teilresultat: ist $A \subset B \subset E$ und E euklidisch, so gilt

$$\dim(A^{\perp}/B^{\perp}) \leqslant \dim B/A .$$

Auf $A^{\perp}$ und $B^{\perp}$ treffen diese Voraussetzungen aber auch zu; also

$$\dim(B^{\perp\perp}/A^{\perp\perp}) \leqslant \dim(A^{\perp}/B^{\perp}) \leqslant \dim B/A .$$



Setzt man nun voraus, A sei orthogonal abgeschlossen, so sieht man

$$\dim(A^{\perp}/B^{\perp}) = \dim(B/A).$$

Nun betrachten wir den Verband von V (erzeugt von V unter den Operationen $\perp$, $\cap$ und $+$ in E; vgl. [2]) (s. Diagramm auf Seite 137).

Nach Korollar 1 ($V^{\perp}+V^{\perp\perp}$ und $V^{\perp}$ anstelle von B bzw. A) ist $\dim[(\operatorname{rad} V^{\perp})^{\perp}/ /(V^{\perp}+V^{\perp\perp})] \leqslant \dim V^{\perp\perp} = \dim V \leqslant \aleph_0$. Ausserdem gilt $\operatorname{codim}_E(\operatorname{rad} V^{\perp})^{\perp} \leqslant \aleph_0$; das bedeutet, dass ein Komplement Y von $V^{\perp}+V^{\perp\perp}$ in E höchstens abzählbare Dimension hat. Wir zerlegen: $E = V^{\perp\perp} \oplus V' \oplus Y$, wo V' ein Komplement von $\operatorname{rad} V^{\perp}$ in $V^{\perp}$ ist. V_0' sei ein abzählbar dimensionaler Unterraum von V'. Dann ist $\dim(V^{\perp\perp} \oplus V_0' \oplus Y) = \aleph_0$. Das gleiche tut man mit $\bar{V}$: es wird $\dim(\bar{V}^{\perp\perp} \oplus \bar{V}_0' \oplus \bar{Y}) = \aleph_0$, und wir finden einen halbeinfachen, abzählbar dimensionalen Unterraum U von E mit

(j) $E = U \oplus U^{\perp}$,
(jj) $V^{\perp\perp} + V_0' + Y + \bar{V}^{\perp\perp} + \bar{V}_0' + \bar{Y} \subset U$.

In U kann man den Satz für abzählbar dimensionale Räume anwenden, und wegen (j) liefert das auch einen orthogonalen Automorphismus von E.

II. Räume mit dichten euklidischen Unterräumen endlicher Codimension

1. *Vorbereitungen*

(E, Φ) sei ein halbeinfacher Raum vom Defekt 1, F eine euklidische Hyperebene, $E = F \oplus k(e)$, $B = (f_\tau)_{\tau \in I}$ eine Orthogonalbasis von F. Wir definieren:

DEFINITION 1.

$$S(B) = \{f_\tau \mid \Phi(f_\tau, e) \neq 0\},$$
$$T(B) = \{f_\tau \mid \Phi(f_\tau, e) = 0\}.$$

SATZ 1. $\operatorname{card} S(B)$ *ist eine Invariante von F, also unabhängig von der Wahl der Orthogonalbasis B und der Wahl des Komplementes e.*

Beweis. Aufgrund von I.2. ist jedenfalls $\operatorname{card} S(B) > \aleph_0$. Beim Übergang zu einem andern Komplement $e' = \sum \lambda_\tau f_\tau + \mu e$ ergeben sich daher keine Änderungen. Sei $B' = (f_\tau')_{\tau \in I}$ eine andere Orthogonalbasis von F und

$$f_\tau' = \sum \alpha_{\tau\kappa} f_\kappa,$$
$$f_\sigma = \sum \beta_{\sigma\mu} f_\mu'.$$

Die Matrizen $(\alpha_{\tau\kappa})$ und $(\beta_{\sigma\mu})$ sind beide zeilenfinit.

Nun ist $\Phi(f_\tau', f_\sigma) = \alpha_{\tau\sigma} \|f_\sigma\| = \beta_{\sigma\tau} \|f_\tau'\|$, und wegen $\|f_\sigma\| \neq 0 \neq \|f_\tau'\|$ sieht man, dass der Übergang von B zu B' durch eine zeilen- und spaltenfinite Matrix vermittelt wird.

Das ergibt die Abschätzung

$$\operatorname{card} S(B') \leqslant \aleph_0 \operatorname{card} S(B) = \operatorname{card} S(B),$$

und die Argumentation ist symmetrisch in B und B'. Also

$$\operatorname{card} S(B) = \operatorname{card} S(B').$$

Eine analoge Invariante lässt sich auch für den Fall $d(E)=0$ und $F^{\perp}=(0)$ definieren. Wir behaupten nämlich, dass dann $\operatorname{card} S(B)=\aleph_0$. Dies folgt aus I.7. und dem folgenden

LEMMA. *Sei* $\dim E>\aleph_0$, $F\subset E$ *eine euklidische Hyperebene mit* $F^{\perp}=(0)$, $E=F\oplus k(e)$. *Dann gibt es eine orthogonale Zerlegung* $F=F_1\oplus^{\perp} F_2$ *mit* $\dim F_1=\aleph_0$ *und* $F_1^{\perp}=F_2$. *Ist* $d(E)=1$, *so gilt dabei stets* $F_2^{\perp}=F_1$; *ist* $d(E)=0$, *so hat man* $F_2^{\perp}\subset F_1\oplus k(e)$ *und es gibt eine Zerlegung mit* $F_2^{\perp}=F_1\oplus k(e)$.

Beweis. 1) $d(E)=1$; $(f_\tau)_{\tau\in I}$ sei eine Orthogonalbasis von F. Nach I.2. gibt es $I_1\subset I_2\subset I$, $\operatorname{card} I_2>\operatorname{card} I_1=\aleph_0$, mit $\Phi(f_\tau, e)\neq 0$ für $\tau\in I_2$. Nun setzt man $F_1=k(f_\tau)_{\tau\in I_1}$, $F_2=k(f_\tau)_{\tau\in I-I_1}$.

Ist eine Zerlegung $F=F_1\oplus F_2$ mit $\dim F_1=\aleph_0$ und $F_1^{\perp}=F_2$ gegeben, so erhält man eine Orthogonalbasis von F als Vereinigung einer Orthogonalbasis von F_1 und einer von F_2. Aufgrund von I.2. folgt nun, dass $F_2^{\perp}=F_1$.

2) $d(E)=0$; $(f_\tau)_{\tau\in I}$ sei eine Orthogonalbasis von F. Die Menge I_3 aller τ mit $\Phi(f_\tau, e)\neq 0$ ist höchstens abzählbar. Wir bezeichnen mit I_4 eine abzählbare Teilmenge von I, welche I_3 enthält. Nun setzen wir $F_1=k(f_\tau)_{\tau\in I_4}$, $F_2=k(f_\tau)_{\tau\in I-I_4}$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
F_1^{\perp} &= F_1^{\perp}\cap F_2 + F_1^{\perp}\cap(F_1\oplus k(e)),\\
F_2^{\perp} &= F_1\oplus k(e),\\
F^{\perp} &= F_1^{\perp}\cap F_2^{\perp},
\end{aligned}$$

und dies letztere ist genau dann Null, wenn $F_1^{\perp}\cap\{F_1+k(e)\}=(0)$.

Wir fassen zusammen:

DEFINITION 2. F sei eine euklidische Hyperebene von (E, Φ), $F^{\perp}=(0)$, B eine Orthogonalbasis von F. Die Invariante

$$\operatorname{card} S(B) = \operatorname{card}\{f_\tau \mid f_\tau\in B, \Phi(f_\tau, x\} \neq 0, E = F\oplus k(x)\}$$

werden wir mit $S(F, E)$ bezeichnen.

Es ist $S(F, E)=\aleph_0$ genau dann wenn E euklidisch, $S(F, E)>\aleph_0$ genau dann wenn $d(E)=1$ ist. Wie wir sehen werden, bestimmt $S(F, E)$ die „Lage" von F in E bis auf einen metrischen Automorphismus von E eindeutig, wenn wir uns auf S-Körper beschränken.

Verhalten von $\operatorname{card} T(B)$

1) Ist $S(F, E) < \dim E$, so ist natürlich $\operatorname{card} T(B) = \dim E$ für alle Orthogonalbasen von F.

2) Sei also $S(F, E) = \dim E$; B sei eine feste Orthogonalbasis von F. Wir werden zeigen, dass man zu jeder unendlichen Kardinalzahl $\mathfrak{a}$ mit $\operatorname{card} T(B) \leqslant \mathfrak{a} \leqslant \dim E$ eine Orthogonalbasis B' mit $\operatorname{card} T(B') = \mathfrak{a}$ angeben kann.

Beweis. Sei $B = S(B) \cup T(B)$, $S(B) = (f_\tau)_{\tau \in I_1}$, $T(B) = (f_\tau)_{\tau \in I_2}$, $\operatorname{card} I_1 = \dim E$, $\Phi(f_\tau, e) = 1$ für $\tau \in I_1$; ferner sei $j' \subset I_1$, $\operatorname{card} j' = \mathfrak{a}$. Wir bilden Mengen $\mathfrak{M}$ von Paaren $(\tau, \tau') \in j' \times j'$ mit $\tau \neq \tau'$, $(\tau, \tau') \cap (\mu, \mu') = \emptyset$ für je zwei Paare aus einer Menge $\mathfrak{M}$, und $\|f_\tau\| + \|f_{\tau'}\| \neq 0$. Nach dem Lemma von Zorn gibt es eine maximale solche Menge $\mathfrak{M}_0$ und man verifiziert, dass für $\mathfrak{M}_0$ gilt:

$$\operatorname{card} \{\mathbf{C}_{j'}(\operatorname{pr}_1 \mathfrak{M}_0 \cup \operatorname{pr}_2 \mathfrak{M}_0)\} \leqslant 2 .$$

Setzen wir $j = \operatorname{pr}_1 \mathfrak{M}_0 \cup \operatorname{pr}_2 \mathfrak{M}_0$, so ist also $\operatorname{card} j = \mathfrak{a}$ und wir haben eine Bijektion $\alpha : \operatorname{pr}_1 \mathfrak{M}_0 \to \operatorname{pr}_2 \mathfrak{M}_0$ vermöge $\tau \mapsto \tau'$, wenn $(\tau, \tau') \in \mathfrak{M}_0$. Die Paare $(f_\tau, f_{\alpha(\tau)})$ spannen Ebenen $E_\tau (\tau \in \operatorname{pr}_1 \mathfrak{M}_0)$ auf. Nun bezeichnen wir

$$\begin{aligned} B_1 &= \{f_\tau - f_{\alpha(\tau)} \mid \tau \in \operatorname{pr}_1 \mathfrak{M}_0\}, \\ B_2 &= \{h_\tau \mid h_\tau \perp (f_\tau - f_{\alpha(\tau)}),\ h_\tau \in E_\tau,\ \tau \in \operatorname{pr}_1 \mathfrak{M}_0\}, \\ B_3 &= \{f_\tau \mid \tau \notin j\}. \end{aligned}$$

Dann ist $B' = T(B) \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3$ wieder eine Orthogonalbasis von F und

$$T(B) \cup B_1 \subset T(B') \subset T(B) \cup B_1 \cup B_2,\ B_3 \cap T(B') = \emptyset .$$

Hieraus folgt die Behauptung.

$\operatorname{card} T(B)$ lässt sich aber nicht nur willkürlich vergrössern sondern auch verkleinern. Wir zeigen hier nur die Konstruktion einer Basis B' mit $T(B') = 0$; das allgemeine Prinzip wird dadurch völlig klar. B sei eine Orthogonalbasis, $S(B) = (f_\tau)_{\tau \in I_1}$, $T(B) = (e_\tau)_{\tau \in I_2}$, $j \subset I_1$, $\operatorname{card} j = \operatorname{card} I_2$, $\alpha : j \to I_2$ eine Bijektion. Wir definieren

$$\begin{aligned} B_1 &= \{f_\tau \mid \tau \in I_1, \tau \notin j\}, \qquad B_2 = \{f_\tau + \beta_\tau e_{\alpha(\tau)} \mid \tau \in j\}, \\ B_3 &= \left\{f_\tau - \frac{\|f_\tau\|}{\beta_\tau \|e_{\alpha(\tau)}\|}\, e_{\alpha(\tau)} \;\middle|\; \tau \in j\right\}, \end{aligned}$$

wobei β_τ so gewählt wird, dass $\beta_\tau \neq 0$ und $\|f_\tau\| + \beta_\tau^2 \|e_{\alpha(\tau)}\| \neq 0$ ist. So ein β_τ findet man aber für jedes τ, ausser wenn der Körper k nur 3 Elemente hat. Ist aber $k = F_3$, dann können wir B orthonormiert voraussetzen und $\beta_\tau = 1$ nehmen. Nun ist $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = B'$ eine Orthogonalbasis von F mit $\operatorname{card} T(B') = 0$.

2. *Der Fall* $\operatorname{codim}_E F = 1$

SATZ 2. *E, $\bar{E}$ seien halbeinfache Räume gleicher überabzählbarer Dimension über einem S-Körper; $F \subset E$, $\bar{F} \subset \bar{E}$ seien euklidische Hyperebenen mit $F^\perp = (0)$, $\bar{F}^\perp = (0)$ und $S(F, E) = S(\bar{F}, \bar{E})$; dann gibt es eine orthogonale Abbildung $\varphi: E \to \bar{E}$ mit $\varphi(F) = \bar{F}$, $\varphi(e) = \bar{e}$, wobei $E = F \oplus k(e)$, $\bar{E} = \bar{F} \oplus k(\bar{e})$ und $\|e\| = \|\bar{e}\|$.*

Beweis. 1) Sei $S(F, E) = \dim E$. Wir können also eine Orthogonalbasis $B = (f_\tau)_{\tau \in I}$ von F so wählen, dass $T(B) = \emptyset$ wird. Jede Partition $I = \bigcup I_\sigma$ mit $\operatorname{card} I_\sigma = \aleph_0$ gibt Anlass zu einer Zerlegung $F = \oplus^\perp F_\sigma$ mit $F_\sigma = k(f_\tau)_{\tau \in I_\sigma}$ und $\dim F_\sigma = \aleph_0$. Dabei ist $F_\sigma^\perp \cap \{F_\sigma \oplus k(e)\} = (0)$. In gleicher Weise bilde man $\bar{F}_\sigma \subset \bar{F}$ mit der entsprechenden Eigenschaft. Nun kann man nach I.8. Isometrien $\varphi_\sigma: F_\sigma \oplus k(e) \to \bar{F}_\sigma \oplus k(\bar{e})$ finden mit $\varphi_\sigma(F_\sigma) = \bar{F}_\sigma$ und $\varphi_\sigma(e) = \bar{e}$. Diese φ_σ setzt man zusammen zu φ.

2) Ist $S(F, E) < \dim E$ und B eine Orthogonalbasis von F, so gibt es eine Zerlegung

$$E = \{F' \oplus k(e)\} \overset{\perp}{\oplus} F'', \tag{1}$$

wobei F' von $S(B)$ erzeugt wird, F'' von $T(B)$. Ebenso:

$$\bar{E} = \{\bar{F}' \oplus k(\bar{e})\} \overset{\perp}{\oplus} \bar{F}''. \tag{2}$$

Auf die ersten Summanden der orthogonalen Summe in (1) und (2) treffen die Voraussetzungen von 1) zu. F'' und $\bar{F}''$ sind von gleicher unendlicher Dimension und orthonormiert (S-Körper!), also isometrisch.

Es ergibt sich sogleich das folgende

KOROLLAR 1. *Zwei halbeinfache Räume E, $\bar{E}$ über einem S-Körper mit $d(E) \leqslant 1$, $d(\bar{E}) \leqslant 1$ sind isometrisch genau dann, wenn es euklidische Hyperebenen $V \subset E$, $\bar{V} \subset \bar{E}$ gibt mit $V^\perp = (0)$, $\bar{V}^\perp = (0)$, $S(V, E) = S(\bar{V}, \bar{E})$* und $\dim E = \dim \bar{E}$.

Definiert man für Räume E mit $d(E) \leqslant 1$ eine Invariante $m(E)$ als $\min S(V, E)$, wo V alle euklidischen Hyperebenen durchläuft, so sagt das Korollar offenbar, dass solche Räume E durch $\dim E$ und $m(E)$ bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt sind.

Als Ergänzung zu Satz 2 kann man noch zu gegebenen Paaren $S(F, E) \leqslant \dim E$ Standardräume angeben. Sei $\operatorname{card} I_1 = S(F, E)$, $I_2 = \emptyset$ wenn $S(F, E) = \dim E$, $\operatorname{card} I_2 = \dim E$ sonst. F werde aufgespannt von einer orthonormierten Basis $(f_\tau)_{\tau \in I_1 \cup I_2}$, $E = F \oplus k(e)$, wobei $\Phi(f_\tau, e) = 1$ für $\tau \in I_1$, $\Phi(f_\tau, e) = 0$ für $\tau \in I_2$ und $\|e\| = \alpha$ (beliebig).

DEFINITION 3. Den soeben definierten Raum E bezeichnen wir als „α-normierten Standardraum zu den Invarianten $\operatorname{codim} F = 1$, $S(F, E)$, $\dim E$“.

3. *Der Fall* $\operatorname{codim}_E F = n < \infty$

DEFINITION 4. Sei E halbeinfach, F ein euklidischer Unterraum von E mit

$F^{\perp}=(0)$, $u \notin F$. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$S(F, u) := S(F, F \oplus k(u)) \qquad m(F) := \min_{u \notin F} S(F, u) \qquad M(F) := \max_{u \notin F} S(F, u)$$

$m(F)$ und $M(F)$ sind offensichtlich Invarianten von F.

SATZ 3. *E und F seien wie in der Definition 4, ferner sei* $\operatorname{codim}_E F = n$. *Dann gibt es höchstens n verschiedene Werte für $S(F, u)$.*

Beweis. Angenommen es gäbe $u_1, \ldots, u_{n+1} \notin F$ mit $S(F, u_1) < S(F, u_2) < \cdots < S(F, u_{n+1})$. Dann ist

$$u_{n+1} = f + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \quad (f \in F).$$

Hieraus folgt der Widerspruch $S(F, u_{n+1}) < S(F, u_{n+1})$. Diese höchstens n Werte ordnen wir der Grösse nach und bezeichnen sie mit $m(F) = m_1(F) < m_2(F) < \cdots < m_r(F) = M(F)$ $(r \leqslant n)$. Man überlegt sich auch sofort, dass in jedem algebraischen Komplement von F Vektoren x_i liegen mit $S(F, x_i) = m_i(F)$ für *alle* $i \leqslant r$.

DEFINITION 5. E und F seien wie in Satz 3.

$$K_i(F) := \{x \mid x \in E, x \notin F, S(F, x) \leqslant m_i(F)\}$$
$$\delta_1(F) := n - \operatorname{codim}_E E_1$$
$$\delta_i(F) := n - \operatorname{codim}_E E_i - \sum_{\nu=1}^{i-1} \delta_\nu$$

Dabei verstehen wir unter E_i die lineare Hülle von $F \cup K_i(F)$.

Dieser Aufwand an Definitionen erlaubt uns eine gewisse Normalisierung eines Komplements von F: unter einer *normalisierten Basis* eines algebraischen Komplements G von F in E verstehen wir eine Basis $x_1, \ldots, x_{\delta_1}, \ldots, x_{\delta_1+\delta_2}, \ldots, x_n$ von G mit $x_1, \ldots, x_{\delta_1} \in K_1(F)$, $x_{\delta_1+1}, \ldots, x_{\delta_1+\delta_2} \in K_2(F) - K_1(F)$ etc. Man verifiziert nun ohne Mühe, dass $S(F, x) \geqslant m_i(F)$ für alle $x \in F \oplus k(x_{\delta_1+\cdots+\delta_{i-1}+1}, \ldots, x_n)$, $x \notin F$.

Beispiel. Sei $F = k(f_\tau)$, wo τ alle Elemente (d.h. alle kleineren Ordnungszahlen) der Ordnungszahl ω_ν durchläuft, $\nu \geqslant 1$ fest, (f_τ) eine orthonormierte Basis, $E = F \oplus k(x, y)$,

$$\begin{array}{ll} \Phi(f_\tau, x) = \Phi(f_\tau, y) = 1 & \text{für} \quad \tau \geqslant \omega_0 \\ \Phi(f_\tau, x) = 0 & \text{für} \quad \tau \in \omega_0 \\ \Phi(f_\tau, y) = 1 & \text{für} \quad \tau \in \omega_0 \end{array}$$

Dann ist $S(F, x) = S(F, y) = \dim E$. $\{x, y\}$ ist aber keine normalisierte Basis eines Komplementes von F, denn $m(F) = S(F, x-y) = \aleph_0$; $\{x-y, y\}$ ist eine normalisierte Basis.

SATZ 4. *Seien E, $\bar{E}$ halbeinfache Räume über einem S-Körper,* $\dim E = \dim \bar{E} \geqslant \aleph_0$, *$F \subset E$, $\bar{F} \subset \bar{E}$ euklidische dichte Unterräume gleicher Codimension n, $m(F) = M(F) = m(\bar{F}) = M(\bar{F})$. Dann gibt es eine orthogonale Abbildung $\varphi : E \to \bar{E}$ mit $\varphi(F) = \bar{F}$. Dabei kann man ein beliebiges Komplement von F in ein dazu isometrisches Komplement von $\bar{F}$ überführen.*

Beweis. Aufgrund inzwischen bekannter Argumente (s. den Beweis zu Satz 2) können wir uns auf den Fall $\dim E = m(F)$ beschränken; für $\dim E = \aleph_0$ steht der Satz bei Gross [1], also setzen wir $m(F) = \dim E > \aleph_0$ voraus. Der Beweis verläuft dann wörtlich wie bei Gross [4], Satz IV.1. Sei $(f_\tau)_{\tau \in I}$ eine Orthogonalbasis von F, $x_1, \ldots, x_n$ Basis eines Komplementes von F in E. Wir werden zeigen, dass es eine Partition $I = \bigcup I_\sigma$ gibt mit

(i) $\operatorname{card} I_\sigma = \aleph_0$,
(ii) $F_\sigma^\perp \cap \{F_\sigma \oplus k(x_1, \ldots, x_n)\} = (0)$, $F_\sigma = k(f_\tau)_{\tau \in I_\sigma}$.

Für $n = 1$ steht das im Beweis von Satz 2. Sei die Behauptung also richtig für $\operatorname{codim} F = n - 1$; d.h. es gibt eine Partition $(\bar{I}_\sigma)$ von I mit den Eigenschaften

(i)′ $\operatorname{card} \bar{I}_\sigma = \aleph_0$,
(ii)′ $\bar{F}_\sigma^\perp \cap \{\bar{F}_\sigma \oplus k(x_1, \ldots, x_{n-1})\} = (0)$, $\bar{F}_\sigma = k(f_\tau)_{\tau \in \bar{I}_\sigma}$.

Als Indices der Partition $(\bar{I}_\sigma)$ nehmen wir alle Ordnungszahlen des Abschnittes $[\![0, \alpha[\![$, α eine Anfangszahl (also $\operatorname{card} \alpha = m(F)$). Die zu konstruierende Partition (I_σ) indizieren wir ebenfalls mit Ordnungszahlen aus besagtem Abschnitt. Wir setzen

$$D_\sigma = \bar{F}_\sigma^\perp \cap \{\bar{F}_\sigma \oplus k(x_1, \ldots, x_n)\};$$

wegen (ii)′ gilt also $\dim D_\sigma \leqslant 1$.

Falls $D_0 = (0)$, definieren wir $I_0 = \bar{I}_0$; andernfalls ist $D_0 = k(x)$, und es gibt immer noch $m(F)$ Vektoren f_τ ausserhalb von $\bar{F}_0$, welche auf x nicht senkrecht stehen. Einer davon liege in $\bar{I}_\mu$; dann definieren wir $I_0 = \bar{I}_0 \cup \bar{I}_\mu$. Nun sei I_ι schon erklärt (als Vereinigung von höchstens 2 Elementen der Partition $(\bar{I}_\sigma)$) für alle $\iota < \kappa$. Dabei sei ν^* die grösste Zahl mit

$$\bar{I}_\nu \subset \bigcup_{\iota < \kappa} I_\iota \quad \text{für alle} \quad \nu < \nu^* \leqslant \alpha .$$

Ist $\nu^* = \alpha$, so sind wir fertig. Ist $\nu^* < \alpha$, so ist $\operatorname{card} \bigcup_{\iota < \kappa} I_\iota \leqslant 2 \operatorname{card} \bigcup_{\nu < \nu^*} \bar{I}_\nu \leqslant \aleph_0 \operatorname{card} \nu^* < m$. Ist $D_{\nu^*} = (0)$, so setzen wir $I_\kappa = \bar{I}_{\nu^*}$. Andernfalls ist $D_{\nu^*} = k(y)$, und es gibt unter den $f_\tau \notin \bigoplus_{\sigma < \kappa} F_\sigma$ immer noch $m(F)$, welche nicht senkrecht auf y stehen. Eines davon sei in $\bar{I}_\varepsilon$; dann setzen wir $I_\kappa = \bar{I}_{\nu^*} \cup \bar{I}_\varepsilon$. Diese rekursive Definition beendigt den Schluss von $n-1$ auf n. Um hieraus schliesslich Satz 4 zu folgern, wendet man analog wie im Beweis von Satz 2 den „Wittschen Satz“ im abzählbaren Falle (I.8.) auf die Räume $F_\sigma \oplus k(x_1, \ldots, x_n)$ an, wobei man die Isometrie auf $k(x_1, \ldots, x_n)$ fest vorschreiben kann.

DEFINITION 6. Unter dem $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$-normierten Standardraum S zu den Invarianten $\operatorname{codim} F = n$, $m(F) = M(F)$, $\dim S$ verstehen wir die orthogonale Summe $S = \oplus_{i=1}^{n} S_i$, wo S_i für $i < n$ ein α_i-normierter Standardraum zu den Invarianten $\operatorname{codim} F' = 1$, $S(F', E) = m(F)$, $\dim E = m(F)$ ist und S_n ein α_n-normierter Standardraum zu den Invarianten $\operatorname{codim} F' = 1$, $S(F', E) = m(F)$, $\dim E = \dim S$.

KOROLLAR 2. *Jeder halbeinfache Raum E über einem S-Körper, der einen euklidischen dichten Teilraum F mit $m(F) = M(F)$ und von endlicher Codimension n enthält, ist zu jedem $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$-normierten Standardraum zu den Invarianten $n, m, \dim E$ isometrisch. Umgekehrt gibt es zu jedem Tripel (n, m, d) mit den Restriktionen $n < \aleph_0 \leqslant \leqslant m \leqslant d$ einen halbeinfachen Raum S, der einen dichten euklidischen Unterraum F der Codimension n enthält mit $m(F) = M(F) = m$.*

Beweis. Klar.

SATZ 5. *Seien $E, \bar{E}$ halbeinfache Räume über einem S-Körper, $\dim E = \dim \bar{E}$, $F \subset E$, $\bar{F} \subset \bar{E}$ euklidische Unterräume gleicher endlicher Codimension n, $F^{\perp} = (0)$, $\bar{F}^{\perp} = (0)$, $m_1(F) = m_1(\bar{F}), \ldots, m_r(F) = m_r(\bar{F})$, $\delta_1(F) = \delta_1(\bar{F}), \ldots, \delta_r(F) = \delta_r(\bar{F})$, $(\sum \delta_i = n)$. Dann gibt es einen orthogonalen Isomorphismus $\varphi : E \to \bar{E}$ mit $\varphi(F) = \bar{F}$. Man kann überdies φ auf einem Komplement G von F so vorschreiben, dass eine normalisierte Basis von G in eine normalisierte Basis eines isometrischen Komplementes $\bar{G}$ von $\bar{F}$ übergeht.*

Beweis. Wieder beschränken wir uns auf den Fall $\dim E = m_r(F)$. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach r. Für $r = 1$ haben wir Satz 4. Um den Gedankengang klar werden zu lassen, beweisen wir auf der Grundlage von Satz 4 unseren Satz zunächst nur für $r = 2$. In F haben wir eine Orthogonalbasis $(f_\tau)_{\tau \in I}$, $k(x_1, \ldots, x_{\delta_1}, y_1, \ldots, y_{\delta_2})$ sei ein Komplement von F mit $S(F, x_1) = \cdots = S(F, x_{\delta_1}) = m_1$, $S(F, y_1) = \cdots = S(F, y_{\delta_2}) = m_2(F)$, ferner seien die y_i paarweise orthogonal (o.B.d.A.). Wir werden zeigen, dass $F = F_1 \oplus^{\perp} F_2$, wobei $F_1 = \oplus^{\perp} F_{1\nu}$ mit

(i) $\dim F_1 = m_1(F)$, also $\dim F_2 = m_2(F)$,
(ii) $F_2 \perp k(x_1, \ldots, x_{\delta_1})$,
(iii) $\dim F_{1\nu} = \aleph_0$,
(iv) $F_{1\nu}^{\perp} \cap \{F_{1\nu} \oplus k(x_1, \ldots, x_{\delta_1}, y_1, \ldots, y_{\delta_2})\} = (0)$.

Bezeichnen wir mit F_1' zunächst den Raum, der von allen f_τ aufgespannt wird, die auf einem der Vektoren $x_1, \ldots, x_{\delta_1}$ nicht senkrecht stehen, mit F_2' den von den restlichen f_τ aufgespannten Raum. Dann haben wir (i) und (ii) und vermöge Satz 4 (angewandt auf $F_1' \oplus k(x_1, \ldots, x_{\delta_1})$) eine Zerlegung $F_1' = \oplus^{\perp} F_{1\nu}'$ mit

(iii)′ $\dim F_{1\nu}' = \aleph_0$,
(iv)′ $F_{1\nu}'^{\perp} \cap \{F_{1\nu}' \oplus k(x_1, \ldots, x_{\delta_1})\} = (0)$.

$F_2' \oplus k(y_1, \ldots, y_{\delta_2})$ können wir uns als Standardraum $\oplus_1^{\delta_2}\{V_i \oplus k(y_i)\}$ vorstellen (zu den Invarianten δ_2, m_2, m_2), wobei $V_i = k(v_{i\nu})_{\nu \in j}$ und $(v_{i\nu})$ die in der Definition der Standardräume auftretende orthonormierte Basis ist. Schliesslich wollen wir annehmen, die Zerlegung $F_1' = \oplus^\perp F_{1\nu}'$ sei mit $\nu \in [\![0, \alpha[\![$, α die Anfangszahl mit $\operatorname{card} \alpha = m_1(F)$, indiziert; j sei ebenfalls ein Anfangsabschnitt der Ordinalzahlen. Setzen wir nun

$$F_1 = F_1' \oplus \bigoplus_{i=1}^{\delta_2} k(v_{i\nu})_{\nu \in [0, \alpha]},$$

$$F_2 = \bigoplus_{i=1}^{\delta_2} k(v_{i\nu})_{\nu \geqslant \alpha},$$

$$F_{1\nu} = F_{1\nu}' \oplus k(v_{1\nu}, \ldots, v_{\delta_2 \nu}),$$

so verifiziert man (i), (ii), (iii) und (iv). Der Rest des Beweises für $r=2$ scheint nun klar: Er ist ein einfaches Zusammenspiel des Wittschen Satzes im abzählbaren Fall (für die $F_{1\nu} \oplus k(x_1, \ldots, y_{\delta_2})$) mit Satz 4 (für $F_2 \oplus k(y_1, \ldots, y_{\delta_2})$).

Der allgemeine Schluss von $r-1$ auf r erfordert lediglich mehr Schreibarbeit. Man behauptet zunächst: es gibt eine Zerlegung $F = F_1 \oplus^\perp \cdots \oplus^\perp F_r$ und Zerlegungen $F_i = \oplus^\perp F_{i\nu}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\dim F_i = m_i(F)$,

(ii) $F_2 \oplus \cdots \oplus F_r \perp k(x_1, \ldots, x_{\delta_1})$,
$F_3 \oplus \cdots \oplus F_r \perp k(x_1, \ldots, x_{\delta_1}, \ldots, x_{\delta_1+\delta_2})$,
$\vdots$
$F_r \perp k(x_1, \ldots, x_{\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{r-1}})$,

(iii) $\dim F_{i\nu} = \aleph_0$,

(iv) $F_{i\nu}^\perp \cap \{F_{i\nu} \oplus k(x_{\delta_1+\cdots+\delta_{i-1}+1}, \ldots, x_n)\} = (0)$.

Beim Induktionsschritt zum Beweis dieser Behauptungen hat man nichts anderes zu tun als das, was im vorigen Spezialfall durchgespielt wurde. Der Beweis des Satzes vollzieht sich dann ganz genau gleich.

DEFINITION 7. Unter dem $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$-normierten Standardraum zu den Invarianten $\operatorname{codim} F = n$, $m_1(F), \ldots, m_r(F)$, $\delta_1(F), \ldots, \delta_r(F)$, $\dim E$ ($\sum \delta_i = n$) verstehen wir die orthogonale Summe $S = \oplus_{i=1}^r S_i$, wobei S_i für $i<r$ ein $(\alpha_{\delta_1+\cdots+\delta_{i-1}+1}, \ldots \alpha_{\delta_1+\cdots+\delta_i})$-normierter Standardraum zu den Invarianten $\operatorname{codim} F' = \delta_i$, $m(F') = M(F') = m_i(F)$, $\dim S_i = m_i$ ist und S_r ein $(\alpha_{\delta_1+\cdots+\delta_{r-1}+1}, \ldots, \alpha_n)$-normierter Standardraum zu den Invarianten $\operatorname{codim} F' = \delta_r$, $m(F') = M(F') = m_r(F)$, $\dim S_r = \dim S$. Es sei

$$\underbrace{\{V_1 \oplus k(e_1)\} \overset{\perp}{\oplus} \{V_2 \oplus k(e_2)\} \overset{\perp}{\oplus} \cdots}_{\delta_1} \quad \underbrace{\cdots \overset{\perp}{\oplus} \{V_n \oplus k(e_n)\}}_{\delta_r}$$

ein solcher Standardraum, $V_1 \oplus^\perp V_2 \oplus^\perp \cdots \oplus^\perp V_n = F$. Dann sind die m_i und δ_i aus der

Definition des Standardraumes genau die zu F gehörigen Invarianten; ist nämlich $x=\sum \lambda_i e_i$ und $\lambda_i=0$ für $i>i_0$, $\lambda_{i_0}\neq 0$, so gilt $S(F, x)=S(F, e_{i_0})$. Aufgrund von I.4. hat ein solcher Standardraum den Defekt n, falls $m_1>\aleph_0$, andernfalls den Defekt $n-\delta_1$.

KOROLLAR 3. *Sei* $\dim E\geqslant\aleph_0$, $F\subset E$ *ein dichter euklidischer Unterraum der Codimension n.*

(i) $d(E)=n \quad \Leftrightarrow m(F)>\aleph_0$,
(ii) $d(E)=n-p\Leftrightarrow m(F)=\aleph_0$ *und* $\delta_1(F)=p$.

Beweis. Aufgrund von Satz 5 ist E zu einem Standardraum aus Definition 7 isometrisch. Also folgt die Behauptung aus obiger Bemerkung.

KOROLLAR 4. *Sei E halbeinfach,* $\dim E\geqslant\aleph_0$, $F\subset E$ *ein euklidischer Unterraum der Codimension n (also* $d(E)\leqslant n$*). Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $F^{\perp}=(0)$ *und F ist maximaler euklidischer Unterraum von E,*
(ii) $d(E)=n$.

Beweis. (ii)$\Rightarrow$(i) ist klar aufgrund von I.3. Sei also (i) erfüllt und $d(E)<n$. Dann kann man nach Satz 5 den Raum E auf einen Standardraum abbilden, wobei man F auf den ausgezeichneten Unterraum $\oplus^{\perp} V_i$ abbildet. Dieses Bild von F ist aber genau dann maximal euklidisch, wenn der Defekt des betreffenden Standardraumes n ist. Widerspruch.

Wohl die bedeutendste Konsequenz aus Satz 5 ist die folgende Klassifikation der Räume von endlichem Defekt über einem S-Körper.

KOROLLAR 5. *Jeder Raum von endlichem Defekt über einem S-Körper ist isometrisch zu einem der Standardräume aus Definition 7. Insbesondere ist jeder Raum E mit* $d(E)=n$ *eine orthogonale Summe von Räumen des Defekts* 1.

Beweis. Ist E halbeinfach und $d(E)=n$, so enthält E einen dichten euklidischen Unterraum F der Codimension n. Also bestimme man $m_i(F)$, $\delta_i(F)$ und bilde auf den entsprechenden Standardraum ab.

4. *Anwendung auf Räume über beliebigen Körpern*

SATZ 6. *V sei ein dichter Unterraum der Codimension* $n<\infty$ *des k-Raumes* (E, Φ), $\dim E\geqslant\aleph_0$, V', E', Φ' *die entsprechenden Objekte nach Erweiterung des Skalarbereiches zu* $k'\supset k$. *Dann gilt*

$$\left.\begin{aligned} m_i(V) &= m_i(V') \\ \delta_i(V) &= \delta_i(V') \end{aligned}\right\} \quad (1\leqslant i\leqslant r)$$

Beweis. Durch Induktion nach r.

SATZ 7. *V sei ein dichter euklidischer Unterraum der endlichen Codimension n in einem (halbeinfachen) k-Raum E (k beliebig,* $\operatorname{char} k \neq 2$). *Dann gilt:*

(i) $d(E)=n \quad \Leftrightarrow m(V)>\aleph_0$

(ii) $d(E)=n-p \Leftrightarrow m(V)=\aleph_0$ und $\delta_1(V)=p$

(iii) *V ist maximaler euklidischer Unterraum von E genau dann wenn $n=d(E)$.*

Beweis. (i) ist klar, (iii) folgt aus (ii). Um (ii) zu beweisen, bezeichnen wir mit $\bar{V}, \bar{E}$ die Räume $\bar{k}\oplus_k V$, $\bar{k}\oplus_k E$, wobei $\bar{k}\supset k$ der algebraische Abschluss von k sei (also ein S-Körper). Ist also $d(E)=n-p$, so ist

$$d(\bar{E})=n-p-q\leqslant n-p \quad \text{und} \quad \delta_1(\bar{V})=n-p-q=\delta_1(V),$$

aufgrund von Satz 6 und Korollar 3; wählen wir eine Orthogonalbasis (v_τ) in V, so gibt es demnach linear unabhängige Vektoren $x_1,\dots,x_{n-p-q}\notin V$, die je auf genau abzählbar vielen v_τ nicht senkrecht stehen. Das liefert eine orthogonale Zerlegung

$$V\oplus k(x_1,\dots,x_{n-p-q})=V_1 \overset{\perp}{\oplus} \{V_2\oplus k(x_1,\dots,x_{n-p-q})\}$$

mit $\dim V_2=\aleph_0$. In $V_2\oplus k(x_1,\dots,x_{n-p-q})$ können wir eine Orthogonalbasis einführen und sehen somit, dass $d(E)\leqslant n-p-q$, woraus folgt: $q=0$.

KOROLLAR. *Endlicher Defekt ist invariant gegenüber Erweiterungen des Grundkörpers:*

$d(E)=d(k'\oplus_k E)$ *falls* $d(E)<\infty$.

Die Aussage des Korollars ist falsch für überabzählbare Defekte, wie das Beispiel in [4] vor Satz III.14. zeigt, in dem ein überabzählbarer Defekt durch Körpererweiterung zu 1 wird. Das Interesse konzentriert sich daher auf Räume E mit dichten euklidischen Unterräumen V von abzählbarer Codimension; denn in diesem Falle versagen die Methoden sowohl des Beispiels in [4] wie auch unserer Arbeit. Wir stossen damit in den Bereich eines Problems, welches schon in [4] VIII.3. formuliert ist: gilt die Implikation „$d(E')=0\Rightarrow d(E)=0$", wenn E' aus E durch Erweitern des Grundkörpers entsteht?

III. Unterräume endlicher Codimension in euklidischen Räumen über S-Körpern

1. *Resultate von Gross* [4]

Durch eine explizite Konstruktion (und unabhängig vom Grundkörper) zeigt man, dass jeder Raum F von endlichem Defekt stets in einen euklidischen Raum E eingebettet werden kann, in dem $F^\perp=(0)$, $V^\perp$ totalisotrop und $\dim V^\perp=d(F)$ ist (V ein maximaler euklidischer Unterraum kleinster Codimension in F), ferner $E=F+V^\perp$. Beschränken wir uns auf S-Körper, dann ist der Beweis besonders einfach: wir können uns in Anbetracht der Ergebnisse des vorigen Abschnitts damit begnügen, die Konstruktion für einen 0-normierten Standardraum zu den Invarianten $\operatorname{codim} V = 1$ und $S(V, F) = \dim F$ zu zeigen. Man setze

$$E = F \oplus k(x), \quad F = k(v_\tau) \oplus k(y), \Phi(v_\tau, v_\sigma) = \delta_{\tau\sigma}, \quad \Phi(v_\tau, y) = 1 .$$

Nun definiert man eine Fortsetzung von Φ auf $E \times E$ durch

$$\Phi(v_\tau, x) = 0, \quad \Phi(x, x) = 0, \quad \Phi(x, y) = 1 .$$

Dann sieht man, dass $(v_\tau - x) \cup (x + y) \cup (x - y)$ eine Orthogonalbasis von E bildet und dass E halbeinfach ist. Einbettungen von Räumen mit beliebigen endlichem Defekt erhält man als orthogonale Summen der hier beschriebenen (vgl. Korollar 3). Räume F von endlichem Defekt können nur so in euklidische Räume E eingebettet werden, dass $\operatorname{codim}_E F \geqslant d(F)$ ist. Bettet man so ein, dass $\operatorname{codim}_E F = d(F)$, so ist immer $V^\perp$ totalisotrop und $E = F \oplus V^\perp$ ([4], Korollar III.4.).

2. *Einige Hilfsbetrachtungen*

SATZ 8. *Sei E euklidisch, $F \subset E$ ein dichter Unterraum endlicher Codimension, $V \subset F$ ein maximaler euklidischer Teilraum,* $\operatorname{codim}_F V < \infty$. *Dann gilt*

$$\dim V^\perp = \dim \operatorname{rad} V^\perp = d(F).$$

Beweis. a) Sei $F = V \oplus G$, $E = V \oplus G \oplus V^\perp \oplus X$. $F^\perp = V^\perp \cap G^\perp = (0)$; da $\operatorname{codim}_E G^\perp = \dim G = d(F)$, ist dies nur möglich, wenn $\dim V^\perp \leqslant d(F)$.

b) $F \oplus V^\perp$ ist euklidisch, denn es enthält $V \oplus V^\perp$ und ist halbeinfach (I.5.); daher ist $\dim V^\perp \geqslant d(F)$.

c) Den Rest beweist die Bemerkung am Schluss von 1. Nun ist also unter den Voraussetzungen von Satz 8: $E = V \oplus G \oplus V^\perp \oplus X$ mit $F = V \oplus G$, $V^\perp$ totalisotrop, $\dim G = \dim V^\perp$. Wir sehen sofort, dass X durch $V'' \subset V^{\perp\perp}$ ersetzt werden kann: es muss ja $\operatorname{codim}_E V^{\perp\perp} = \dim V^\perp$ gelten, aber wie man sieht ist bereits

$$\operatorname{codim}_{F+V^\perp} \{ V^{\perp\perp} \cap (F \oplus V^\perp) \} = \dim G = \dim V^\perp.$$

Ist der Grundkörper ein S-Körper, so kann man darüberhinaus $V'' \in V^{\perp\perp}$ totalisotrop und senkrecht auf G wählen.

$V^{\perp\perp} = \{ V \oplus V'' \} \oplus^\perp V^\perp$ hat eine Orthogonalbasis (was man mit Hilfe eines Satzes von Ogg (I.6.) oder aufgrund der Inklusion $V \oplus V^\perp \subset V^{\perp\perp}$ einsieht), also ist $V \oplus V''$ euklidisch und V ist dicht in $V \oplus V''$. Jeder Vektor aus V'' steht also auf genau $\aleph_0$ Vektoren einer Orthogonalbasis von V nicht senkrecht.

Die bisherigen Überlegungen zeigen nebenbei, wie eine Einbettung $F \subset E$ beschaffen ist, wenn F halbeinfach und von endlichem Defekt $d(F)$, E euklidisch und $\operatorname{codim}_E F$ endlich ist: es sei $F^{\perp\perp} = F \oplus \operatorname{rad} F^\perp \oplus F''$, $F^\perp = \operatorname{rad} F^\perp \oplus F'$, $V \subset F$ ein euklidischer Teilraum mit $\operatorname{codim}_F V = d(F)$; $F^{\perp\perp}$ ist abgeschlossen, besitzt also nach Ogg eine Orthogonalbasis; demnach ist $F_{00}=F\oplus F''$ euklidisch. Dann haben wir folgende Zerlegung für E:

$$E=(F_{00}\overset{\perp}{\oplus}F^{\perp})\oplus Z,$$

wobei $F\oplus\{V^{\perp}\cap F_{00}\}\subset F_{00}$ euklidisch ist (nach I.5.). Aus Satz 8 folgt nun $\dim\{V^{\perp}\cap F_{00}\}=d(F)$. Insbesondere sieht man, dass es schon einen euklidischen Unterraum F_0 von E gibt (nämlich $F\oplus\{V^{\perp}\cap F_{00}\}$), in dem F minimale Codimension hat (nämlich $d(F)$).

3. *Ein Isomorphiesatz*

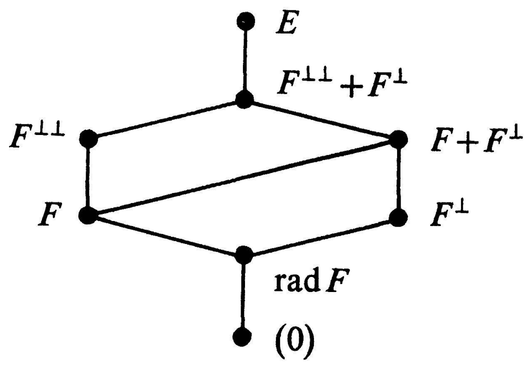
SATZ 9. *E, $\bar{E}$ seien euklidische Räume gleicher überabzählbarer Dimension über einem S-Körper. $F\subset E$, $\bar{F}\subset\bar{E}$ seien Unterräume mit*

(i) $\operatorname{codim}_E F=\operatorname{codim}_{\bar{E}}\bar{F}<\infty$,
(ii) $F\cong\bar{F}$ *(Isometrie)*,
(iii) $F^{\perp}\cong\bar{F}^{\perp}$ *(Isometrie)*,
(iv) $\operatorname{rad}F^{\perp}=\operatorname{rad}F$.

Dann gibt es eine Isometrie $\varphi: E\ \bar{E}$, die F in $\bar{F}$ überführt.

Bemerkung. Voraussetzung (iv) kann man in speziellen Fällen (z.B. F halbeinfach, $F^{\perp}$ totalisotrop, $F\oplus F^{\perp}$ orthogonal abgeschlossen) fallen lassen; man muss dann noch Gleichheit gewisser Invarianten von F und $\bar{F}$ fordern. Der allgemeine Fall mit $\operatorname{rad}F^{\perp}\neq\operatorname{rad}F$ bereitet erhebliche Schwierigkeiten.

Beweis. a) Zunächst betrachten wir den Kaplansky-Verband, der zu F (bzw. $\bar{F}$) gehört:



Man beachte, dass $F^{\perp}$ und $\bar{F}^{\perp}$, also auch $\operatorname{rad}F$ und $\operatorname{rad}\bar{F}$ endlich-dimensional sind (wegen (i)). Es gibt eine Witt-Zerlegung

$$E=(\operatorname{rad}F\oplus X)\overset{\perp}{\oplus}E_0, \tag{*}$$

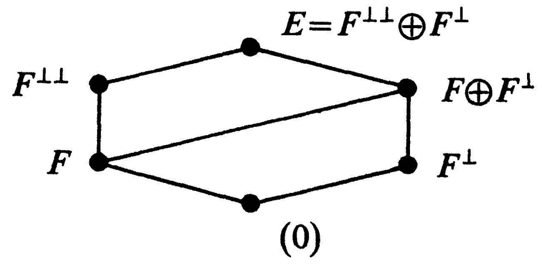
wobei $\operatorname{rad}F\oplus X$ eine orthogonale Summe von $\dim\operatorname{rad}F$ hyperbolischen Ebenen ist;

E_0 enthält ein Komplement F_0 von $\operatorname{rad} F$ in F sowie ein Komplement F_1 von $\operatorname{rad} F$ in $F^\perp$. Dasselbe gilt für $\bar{E}$ (mit Querstrichen). Auf die halbeinfachen Räume $F_0, \bar{F}_0$ (statt $F, \bar{F}$), $F_1, \bar{F}_1$ (statt $F^\perp, \bar{F}^\perp$) und E_0, $\bar{E}_0$ (statt $E, \bar{E}$) treffen wieder die Voraussetzungen unseres Satzes zu. Die Zerlegung (*) zeigt nun, dass es genügt, den Satz unter der Voraussetzung

(iv)′ $\operatorname{rad} F^\perp = \operatorname{rad} F = (0)$

zu beweisen.

b) Wir setzen also $F^\perp$ und damit auch F halbeinfach voraus. Der Kaplansky-Verband sieht dann so aus:



Sofort ergibt sich eine weitere Reduktion des Problems: hat man den Satz für dichtes F bewiesen, so ist man fertig; denn dann hat man eine orthogonale Abbildung $\varphi' : F^{\perp\perp} \to \bar{F}^{\perp\perp}$, welche F in $\bar{F}$ überführt. Die gesuchte Abbildung $\varphi : E \to \bar{E}$ erhält man also durch Zusammensetzen von φ' und einer Isometrie $\alpha : F^\perp \to \bar{F}^\perp$.

c) Nun beweisen wir den Satz für dichtes F. Die Betrachtungen am Schluss von 2. erlauben uns eine Zerlegung

$$E = V \oplus G \oplus V^\perp \oplus V''$$

mit $F = V \oplus G$, $V'' \subset V^{\perp\perp}$, $V'' \oplus G$ totalisotrop, V maximal euklidisch. Analog zerlegen wir

$$\bar{E} = \bar{V} \oplus \bar{G} \oplus \bar{V}^\perp \oplus \bar{V}'',$$

wobei wir für $\bar{V}$ das Bild von V bei einer Isometrie $\beta : F \to \bar{F}$ nehmen (dann stimmen die Invarianten $m_i(V)$, $m_i(\bar{V})$, $\delta_i(V)$, $\delta_i(\bar{V})$, berechnet in $V \oplus G$ bzw. $\bar{V} \oplus \bar{G}$ überein). $V \oplus G \oplus V''$ und $\bar{V} \oplus \bar{G} \oplus \bar{V}''$ sind halbeinfache Räume, in denen V bzw. $\bar{V}$ dicht liegt. Zu der Liste von Invarianten $m_i(V)$, $\delta_i(V)$, $m_i(\bar{V})$, $\delta_i(\bar{V})$, berechnet in $V \oplus G$ bzw. $\bar{V} \oplus \bar{G}$ tritt nur noch

$$m_0(V) = m_0(\bar{V}) = \aleph_0 \quad \text{und} \quad \delta_0(V) = \delta_0(\bar{V}) = \dim V'' = \dim \bar{V}''$$

hinzu, wie ebenfalls die Betrachtungen unter 2. zeigen. Es ist also möglich, eine normalisierte Basis von $G \oplus V''$ und $\bar{G} \oplus \bar{V}''$ so zu wählen, dass darin eine Basis von V'' bzw. $\bar{V}''$ enthalten ist (weil $S(V, x) = m(V) = \aleph_0$ ist für *alle* Vektoren $x \in V''$). Man kann also eine Isometrie $\varphi' : V \oplus G \oplus V'' \to \bar{V} \oplus \bar{G} \oplus \bar{V}''$ finden mit $\varphi'(V) = \bar{V}$, $\varphi'(G) = \bar{G}$,

$\varphi'(V'')=\bar{V}''$. $G\oplus V^{\perp}$ und $\bar{G}\oplus\bar{V}^{\perp}$ sind isometrisch, weil sie halbeinfach und von maximalem Index sind. Also kann man $\varphi'|_G$ zu einer Isometrie $\varphi'':G\oplus V^{\perp}\to\bar{G}\oplus\bar{V}^{\perp}$ fortsetzen. Nun setze man

$$\varphi\,|_{V+V''+G}=\varphi', \qquad \varphi|_{V^{\perp}}=\varphi''|_{V^{\perp}}.$$

Eine spezielle Situation von Satz 9 ist die, dass $F^{\perp}=(0)$ ist. Sie tritt insbesondere dann auf, wenn $\operatorname{codim}_E F=d(F)$; denn (mit den oben gebrauchten Bezeichnungen) $V^{\perp}$ ist dann nach [4], Korollar III.4. totalisotrop und wenn E halbeinfach ist, muss also $F^{\perp}=V^{\perp}\cap G^{\perp}=(0)$ sein. Satz 9 sagt also unter dieser Voraussetzung, dass es im wesentlichen nur eine Einbettung eines Raumes F von endlichem Defekt in einen euklidischen Raum E gibt, bei welcher $\operatorname{codim}_E F=d(F)$. Dies gilt jedoch unabhängig vom Grundkörper k, wie folgender Satz zeigt.

SATZ 10. *E, $\bar{E}$ seien euklidische Räume gleicher überabzählbarer Dimension; $F\subset E$, $\bar{F}\subset\bar{E}$ seien halbeinfache Unterräume mit*

(i) $F\cong\bar{F}$,
(ii) $\operatorname{codim}_E F=\operatorname{codim}_{\bar{E}}\bar{F}=d(F)=d(\bar{F})<\infty$.

Dann gibt es eine Isometrie $\varphi:E\to\bar{E}$, die F in $\bar{F}$ überführt.

Beweis. Sei $F=V\oplus G$, V ein euklidischer Unterraum der Codimension $d(F)$. Aufgrund von (i) hat man dann $\bar{F}=\bar{V}\oplus\bar{G}$, wobei die entsprechenden Räume isometrisch sind. Ferner ist $E=V\oplus G\oplus V^{\perp}$, $\bar{E}=\bar{V}\oplus\bar{G}\oplus\bar{V}^{\perp}$; $V^{\perp}\oplus G$ sowie $\bar{V}^{\perp}\oplus\bar{G}$ sind beide halbeinfach und von maximalem Index $d(F)$, also isometrisch. Man kann nun die Isometrie $G\to\bar{G}$ (Restriktion der durch (i) garantierten Isometrie) zu einer Isometrie $G\oplus V^{\perp}\to\bar{G}\oplus\bar{V}^{\perp}$ so fortsetzen, dass $V^{\perp}$ in $\bar{V}^{\perp}$ übergeht.

LITERATUR

[1] GROSS, H., *Ein Wittscher Satz im Falle von Vektorräumen abzählbarer Dimension*, J. reine angew. Math. *222* (1966), 195–200.
[2] ——, *On Witt's Theorem in the Denumerably Infinite Case*, II, Math. Annalen *170* (1967), 145–165.
[3] ——, *Über isometrische Abbildungen in abzählbar dimensionalen Räumen über reellen Körpern*, Comment. Math. Helv. *43* (1968), 348–357.
[4] ——, *Der euklidische Defekt bei quadratischen Räumen*, Math. Annalen *180* (1969), 95–137.
[5] ——, *Bilinearformen auf unendlich dimensionalen Vektorräumen*, Vorlesungsausarbeitung von P. HAFNER, Math. Institut Universität Zürich (1968).
[6] ——, und H. R. FISCHER, *Non Real Fields k and Infinite Dimensional k-vectorspaces*, Math. Annalen *159* (1965), 285–308.
[7] —— und V. MILLER, *Continuous Forms in Infinite Dimensional Spaces*, Comment. Math. Helv. *42* (1966), 132–170.
[8] OGG, E., *Ein Satz über orthogonal abgeschlossene Unterräume*, Comment. Math. Helv. *44* (1969), 117–119.

Eingegangen den 30. Mai 1969