Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 45 (1970)

Artikel: Der Satz von Hahn-Banach und Fixpunktsätze in limitierten Vektorräumen.

Autor: Bieri, Hanspeter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34668

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Der Satz von Hahn-Banach und Fixpunktsätze in limitierten Vektorräumen

BIERI HANSPETER

1. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden einige Sätze aus der Theorie der topologischen Vektorräume allgemeiner für limitierte Vektorräume hergeleitet.

Der Satz von Hahn-Banach wird als Fortsetzungssatz linearer Formen und in seiner geometrischen Form für limitierte Vektorräume formuliert. Für den Beweis verwenden wir in Anlehnung an (1) anstelle des Satzes von Zorn den schwächeren Ultrafiltersatz. Als Anwendung ergibt sich eine hinreichende Bedingung für die Separiertheit der einer Vektorraumlimitierung τ zugeordneten lokalkonvexen Topologie τ^0 oder – gleichwertig – für die Trennbarkeit der Vektoren durch stetige Linearformen.

In (6) ergeben sich der Minimaxsatz von Sion und der Fixpunktsatz von Tychonoff als Folgerungen eines allgemeinen Satzes von Fan über Mengen mit konvexen Schnitten. Wir übertragen diesen Satz in seiner analytischen Form mit den beiden Folgerungen auf limitierte Vektorräume. Dabei setzen wir beim Fixpunktsatz von Tychonoff – wie nachher auch beim Fixpunktsatz von Kakutani – anstelle einer separierten lokalkonvexen Topologie die Separiertheit von τ^0 voraus.

Den Fixpunktsatz von Kakutani beweisen wir nicht mit Hilfe von Netzen wie in (8), sondern mit Filtertechnik. Aus ihm erhalten wir als Korollar erneut den Fixpunktsatz von Tychonoff.

Schliesslich wird unter den gleichen weiteren Voraussetzungen wie in (3) der Fixpunktsatz von Markoff-Kakutani für separierte limitierte Vektorräume hergeleitet.

Für die Grundlagen der Theorie der Limesräume verweisen wir auf (7), für die Theorie der limitierten Vektorräume und weitere Literaturangaben auf (4).

2. Vorbemerkungen, Kompaktheit

Für zwei Filter $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ auf einer Menge drücken wir „$\mathfrak{F}$ ist feiner als $\mathfrak{G}$" durch $\mathfrak{F} \leqslant \mathfrak{G}$ aus. Es ist dann etwa $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{G} := \{F \cup G;\ F \in \mathfrak{F},\ G \in \mathfrak{G}\}$ der feinste Filter, gröber als $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$, und, falls er existiert, $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G} := \{F \cap G;\ F \in \mathfrak{F},\ G \in \mathfrak{G}\}$ der gröbste Filter, feiner als $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$. Es ist im folgenden nicht nötig, streng zwischen Filter und Filterbasis zu unterscheiden; insbesondere verstehen wir unter $\mathfrak{F} = \{F_i;\ i \in I\}$ den von der Filterbasis $\{F_i;\ i \in I\}$ erzeugten Filter. Hauptfilter, wie $\{\{x\}\}$ oder $\{G\}$, bezeichnen wir mit $[x]$, $[G]$, etc., Ultrafilter im allgemeinen mit $\mathfrak{U}$.

Wir betrachten nur Vektorräume (VR) über dem Körper **R** der reellen Zahlen, versehen mit der durch den absoluten Betrag definierten natürlichen Topologie. $\mathbf{V}$ bezeichnet immer den Nullumgebungsfilter auf **R**.

Es wird im weitern immer wieder gebraucht, dass bei einem Limesraum (LR) M die Familie der gegen ein $x \in M$ konvergierenden Filter charakterisiert ist durch:

– $[x] \downarrow_x$ (genauer: $[x] \downarrow_x M$, „$[x]$ konvergiert gegen x auf M")
– $\mathfrak{F} \downarrow_x, \mathfrak{G} \downarrow_x \Rightarrow \mathfrak{F} \cup \mathfrak{G} \downarrow_x$
– $\mathfrak{F} \downarrow_x, \mathfrak{G} \leqslant \mathfrak{F} \Rightarrow \mathfrak{G} \downarrow_x$,

und dass im Falle eines limitierten Vektorraums (LVR) E zusätzlich gilt:

– $\mathfrak{F} \downarrow_0, \mathfrak{G} \downarrow_0 \Rightarrow \mathfrak{F} + \mathfrak{G} \downarrow_0$
– $\mathfrak{F} \downarrow_0 \Rightarrow \mathbf{V} \cdot \mathfrak{F} \downarrow_0$
– $\mathfrak{F} \downarrow_0, \lambda \in \mathbf{R} \Rightarrow \lambda \cdot \mathfrak{F} \downarrow_0$
– $x \in E \Rightarrow \mathbf{V} \cdot x \downarrow_0$
– $\mathfrak{F} \downarrow_x \Leftrightarrow \mathfrak{F} - x \downarrow_0$.

Ein LR, auf dem jeder Filter gegen höchstens einen Vektor konvergiert, heisst separiert.

Eine Abbildung f eines LR M in einen LR N heisst stetig, wenn aus $x \in M$, $\mathfrak{F} \downarrow_x M$, folgt $f(\mathfrak{F}) \downarrow_{f(x)} N$. Es gilt:

SATZ 2.1: *Die Menge $C(M, E)$ der stetigen Abbildungen eines* LR M *in einen* LVR E *ist mit den üblichen Operationen ein* VR.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar, wenn man berücksichtigt, dass für beliebige Abbildungen f und g von M in E und für jeden Filter $\mathfrak{F}$ auf M gilt: $(f+g)(\mathfrak{F}) \leqslant \leqslant f(\mathfrak{F}) + g(\mathfrak{F})$.

Die Limitierung τ eines LR M induziert auf jeder Teilmenge A von M die Unterraumlimitierung τ_A, die gröbste Limitierung auf A, für welche die Inklusion $i: A \to M$, $i(x) := x$, stetig ist. Für $x \in A$ und den Filter $\mathfrak{F}_A$ auf A gilt:

$\mathfrak{F}_A \downarrow_x A \Leftrightarrow \mathfrak{F}_A$ ist Spur eines Filters $\mathfrak{F} \downarrow_x M$.

Zu jedem LR M mit einer Limitierung τ gibt es auf der gleichen Menge eine feinste Topologie τ^ω, gröber als τ, und zu jedem LVR E mit zulässiger Limitierung σ eine feinste lokalkonvexe Topologie σ^0, gröber als σ. Wir bezeichnen die zugehörigen Räume mit M^ω und E^0. E und E^0 haben dieselben stetigen Linearformen.

Jeder Teilmenge A eines LR M lassen sich die Adhärenz $\bar{A}$ und das Innere $\mathrm{Int}(A)$ wie folgt zuordnen:

$$\bar{A} := \{x \in M;\ A \in \mathfrak{F} \text{ für ein } \mathfrak{F} \downarrow_x M\}, \text{ und}$$
$$\mathrm{Int}(A) := \{x \in M;\ A \in \mathfrak{F} \text{ für jedes } \mathfrak{F} \downarrow_x M\}.$$

A heisst Umgebung von $x \in M$, falls $x \in \operatorname{Int}(A)$. Im Spezialfall der topologischen Räume ergeben sich so die üblichen Definitionen. Für das Komplement A^c von A in M gilt:

$$\overline{A^c} = (\operatorname{Int}(A))^c, \quad \text{und mit} \quad B \subset M \quad \text{weiter:}$$
$$\operatorname{Int}(A) \subset A \subset \bar{A},$$
$$A \subset B \Rightarrow \operatorname{Int}(A) \subset \operatorname{Int}(B), \qquad \bar{A} \subset \bar{B},$$
$$\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B), \qquad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

A heisst abgeschlossen, falls $A = \bar{A}$, bzw. offen, falls $A = \operatorname{Int}(A)$. Im allgemeinen ist weder $\bar{A}$ abgeschlossen, noch $\operatorname{Int}(A)$ offen. M und M^ω haben die gleichen abgeschlossenen und offenen Teilmengen.

Ein Filter $\mathfrak{F}$ auf einem LVR E heisst Cauchy-Filter, falls $(\mathfrak{F} - \mathfrak{F}) \downarrow_0 E$. Eine Teilmenge A von E heisst vollständig, wenn auf ihr – als limitiertem Unterraum (UR) – jeder Cauchy-Filter konvergiert. In (4), Seite 264, ist bewiesen:

SATZ 2.2: *In einem separierten* LVR *ist jede vollständige Teilmenge abgeschlossen.*

Eine Teilmenge A eines LR M heisst kompakt, wenn auf ihr jeder Ultrafilter konvergiert. A ist dann auch in jeder gröbern Limitierung kompakt, insbesondere in M^ω. Daraus folgt, dass wie im topologischen Fall jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung enthält.

SATZ 2.3: *In einem* LR M *ist jede abgeschlossene Teilmenge A einer kompakten Menge B kompakt.*

Beweis: Jeder Ultrafilter $\mathfrak{U}$ auf A erzeugt einen Ultrafilter auf B, der gegen ein $x \in B$ konvergiert und A enthält. Das heisst $x \in \bar{A}$, und daraus folgt $\mathfrak{U} \downarrow_x A$.

SATZ 2.4: *Jede kompakte Teilmenge A eines separierten* LR M *ist abgeschlossen.*

Beweis: Zu $x \in \bar{A}$ gibt es einen Ultrafilter $\mathfrak{U} \downarrow_x M$ mit $A \in \mathfrak{U}$. Die Spur von $\mathfrak{U}$ auf A ist ein Ultrafilter und konvergiert also gegen ein $y \in A$. Daraus folgt $\mathfrak{U} \downarrow_y M$, und wegen der Separiertheit von M $x = y$.

SATZ 2.5: *Jede kompakte Teilmenge A eines* LVR E *ist vollständig* (vgl. (7), S. 296).

Beweis: Sei $\mathfrak{F}$ Filter auf A mit $(\mathfrak{F} - \mathfrak{F}) \downarrow_0 E$. Dann gibt es einen Ultrafilter $\mathfrak{U} \leqslant \mathfrak{F}$ und ein $x \in A$ mit $\mathfrak{U} \downarrow_x A$. Nun gilt: $\mathfrak{F} - x = \mathfrak{F} - x + [0] \leqslant \mathfrak{F} - x + (\mathfrak{U} - x) - (\mathfrak{U} - x) = (\mathfrak{F} - \mathfrak{U}) + (\mathfrak{U} - x) \downarrow_0 E$, und das heisst $\mathfrak{F} \downarrow_x A$.

SATZ 2.6: *M und N seien* LR, *A eine kompakte Teilmenge von M und f eine stetige Abbildung von M in N. Dann ist $f(A)$ kompakt.*

Beweis: Die Restriktion f_A von f auf A ist stetig. Zu jedem Ultrafilter $\mathfrak{U}$ auf $f(A)$ gibt es einen Ultrafilter $\mathfrak{V}$ auf A mit $\mathfrak{V} \leqslant f_A^{-1}(\mathfrak{U})$ und ein $x \in A$, für welches $\mathfrak{V} \downarrow_x A$.

Da $\mathfrak{U}$ Ultrafilter ist, gilt $\mathfrak{U}=f_A(\mathfrak{V})$. Wegen der Stetigkeit von f_A folgt somit $\mathfrak{U}\downarrow_{f_A(x)} f(A)$.

SATZ 2.7: *Das Produkt kompakter* LR *ist kompakt.*

Beweis: Siehe (7), S. 291.

Der Arbeit (4), Seite 264, entnehmen wir noch die beiden nachstehenden, in der Folge wichtigen Sätze:

SATZ 2.8: *Jeder separierte* LVR *endlicher Dimension n ist isomorph zum* R^n.

SATZ 2.9: *Eine Linearform f auf einem* LVR *E ist genau dann stetig, wenn* $f^{-1}(0)$ *in E abgeschlossen ist.*

3. Der Satz von Hahn-Banach

SATZ 3.1 (Hahn-Banach): *Es seien E ein* LVR, L_0 *ein algebraischer* UR *und A eine konvexe Teilmenge von E, so dass* $L_0 \cap \mathrm{Int}(A)$ *nicht leer ist.* f_0 *sei eine Linearform auf* L_0 *mit* $f_0(L_0 \cap A) \geqslant 0$. *Dann gibt es eine lineare Fortsetzung* $\tilde{f}$ *von* f_0 *auf E mit* $\tilde{f}(A) \geqslant 0$.

Beweis: 1) Für $x \in E$ definieren wir: $D_x := \{f$, Fortsetzung von f_0 auf einen UR L, der L_0 und x enthält, so dass $f(L \cap A) \geqslant 0\}$.

Wir zeigen, dass die Familie $\{D_x, x \in E\}$ die endliche Schnitteigenschaft hat:

Sei f eine Fortsetzung von f_0 auf den UR $L \supset L_0$ mit $f(L \cap A) \geqslant 0$, und sei $t \in E \cap L^c$. Dann lässt sich f auf die lineare Hülle L' von L und t fortsetzen, wobei für die Fortsetzung f' gilt: $f'(L' \cap A) \geqslant 0$, denn:

Sei $x' \in L'$, dann ist $x' = x + \lambda t$, wo $x \in L$ und $\lambda \in \mathbf{R}$. Wir definieren:

$$M_1 := \left\{\mu_1 := -\frac{f(x_1)}{\lambda_1}, \quad \text{wo } x_1 \in L, \quad x_1 + \lambda_1 t \in A, \quad \lambda_1 > 0\right\},$$

$$M_2 := \left\{\mu_2 := -\frac{f(x_2)}{\lambda_2}, \quad \text{wo } x_2 \in L, \quad x_2 + \lambda_2 t \in A, \quad \lambda_2 < 0\right\}.$$

Nun folgt $M_1 \neq \emptyset$ und $M_2 \neq \emptyset$, denn: $\mathbf{V} \cdot t \downarrow_0$; für $\delta > 0$ gilt $[(0, \delta) \cdot t] \cap [(-\varepsilon, \varepsilon) \cdot t] \neq \emptyset$ für beliebiges $\varepsilon > 0$. Es existiert also ein Ultrafilter $\mathfrak{V} \leqslant \mathbf{V} \cdot t$ mit $[(0, \delta) \cdot t] \in \mathfrak{V}$. Nach Voraussetzung ist $L_0 \cap \mathrm{Int}(A) \neq \emptyset$. Es gibt daher ein $x_1 \in L_0$ mit $0 \in \mathrm{Int}(A) - x_1$; $A - x_1 \in \mathfrak{U}$ für alle Ultrafilter $\mathfrak{U} \downarrow_0$, folglich ist $(A - x_1) \cap [(0, \delta) \cdot t]$ Element von $\mathfrak{V}$, also insbesondere $\neq \emptyset$. Das heisst, es gibt ein $\delta_1 > 0$ mit $\delta_1 t \in A - x_1$, oder $x_1 + \delta_1 t \in A$. $\mu_1 := -(f(x_1)/\delta_1)$ ist Element von M_1, also $M_1 \neq \emptyset$. Analog gilt $M_2 \neq \emptyset$. Weiter folgt für $\mu_1 \in M_1$, $\mu_2 \in M_2$ $\mu_1 \leqslant \mu_2$: Für $\mu_1 := -(f(x_1)/\lambda_1)$ und $\mu_2 := -(f(x_2)/\lambda_2)$ gilt $x_1 + \lambda_1 t \in A$, $\lambda_1 > 0$, und $x_2 + \lambda_2 t \in A$, $\lambda_2 < 0$. Wegen der Konvexität von A ist damit

auch $-\lambda_2/\lambda_1-\lambda_2\,(x_1+\lambda_1 t)+\lambda_1/\lambda_1-\lambda_2\,(x_2+\lambda_2 t)\in A$ und – wie aus der Umformung zu $1/\lambda_1-\lambda_2\,(-\lambda_2 x_1+\lambda_1 x_2)$ ersichtlich – auch $\in L$, also Element des Durchschnitts $A\cap L$. Das bedeutet, dass $f(1/\lambda_1-\lambda_2(-\lambda_2 x_1+\lambda_1 x_2))\geqslant 0$, und daraus ergibt sich $-\lambda_2 f(x_1)+\lambda_1 f(x_2)=f(-\lambda_2 x_1+\lambda_1 x_2)\geqslant 0$. Somit erhalten wir:

$$\mu_2=-\frac{f(x_2)}{\lambda_2}\geqslant-\frac{f(x_1)}{\lambda_1}=\mu_1\,.$$

Wir haben damit die Existenz eines $\vartheta\in\mathbf{R}$ nachgewiesen mit $\mu_1\leqslant\vartheta\leqslant\mu_2$ für alle $\mu_1\in M_1$, $\mu_2\in M_2$. Wir definieren nun eine Linearform $f':L'\to\mathbf{R}$ durch $f'(x')=f'(x+\lambda t):=$ $:=f(x)+\lambda f'(t):=f(x)+\lambda\vartheta$. f' ist Fortsetzung von f auf L'. Sei $x'\in L'\cap A$, also $x'=x+\lambda t\in A$, wo $x\in L$. Dann ist $f'(x')=f(x)+\lambda\vartheta\geqslant f(x)-\lambda(f(x)/\lambda)=0$ für $\lambda\neq 0$. Für $\lambda=0$ gilt $f'(x')\geqslant 0$ nach Voraussetzung. f' ist somit Fortsetzung von f von der gesuchten Art.

Die endliche Schnitteigenschaft der Familie $\{D_x, x\in E\}$ ergibt sich nun durch Induktionsschluss.

2) Auf $\bigcup_{x\in E} D_x$ existiert ein Ultrafilter $\mathfrak{U}\leqslant\{D_x,\ x\in E\}$. Für $x\in E$ ist $\mathfrak{U}_x:=\{U\cap D_x,\ U\in\mathfrak{U}\}$ Ultrafilter auf D_x. Die Abbildung $g_x:D_x\to\mathbf{R}$ sei definiert durch $g_x(f):=f(x)$. $g_x(D_x)\subset[\inf\vartheta_x,\ \sup\vartheta_x]\subset\mathbf{R}$, wo $\vartheta_x:=f(x)$ für eine zulässige Forsetzung f von f_0 auf die lineare Hülle $L(L_0, x)$ von L_0 und x. Wir haben oben bewiesen, dass $[\inf\vartheta_x,\ \sup\vartheta_x]$ beschränkt, also kompakt ist. Da $\mathbf{R}$ separiert ist, konvergiert $g_x(\mathfrak{U}_x)$ gegen genau ein $\alpha_x\in\mathbf{R}$. Die Abbilding $\bar f:E\to\mathbf{R}$, definiert durch $\bar f(x):=\alpha_x$, ist nun die gesuchte Fortsetzung von f_0 auf E, denn:

- $\bar f$ ist linear: Seien $x,\ y\in E$ und $D:=D_x\cap D_y\cap D_{x+y}$, dann folgt mit $\mathfrak{U}_D:=$ $\{U\cap D, U\in\mathfrak{U}\}$ $g_{x+y}(\mathfrak{U}_{x+y})=g_{x+y}(\mathfrak{U}_D)\leqslant g_x(\mathfrak{U}_D)+g_y(\mathfrak{U}_D)=[g_x(\mathfrak{U}_x)+g_y(\mathfrak{U}_y)]\downarrow_{\alpha_x+\alpha_y}$, also gilt $g_{x+y}(\mathfrak{U}_{x+y})\downarrow_{\alpha_x+\alpha_y}$, und das heisst $\alpha_{x+y}=\alpha_x+\alpha_y$. Wir erhalten somit $\bar f(x+y)=\bar f(x)+\bar f(y)$ und – auf analoge Weise – $\bar f(\lambda x)=\lambda\bar f(x)$ für $\lambda\in\mathbf{R}$.
- $\bar f$ ist Fortsetzung von f_0: Für $x\in L_0$ und jedes $U\in\mathfrak{U}$ erhalten wir $g_x(U\cap D_x)=$ $=\{f_0(x)\}$, also $g_x(\mathfrak{U}_x)=[f_0(x)]\downarrow_{f_0(x)}$. Das heisst $\bar f(x)=f_0(x)$ für $x\in L_0$.
- $\bar f(A)\geqslant 0$: Für $x\in A$ gilt $g_x(D_x)\geqslant 0$, und das bedeutet, dass aus $g_x(\mathfrak{U}_x)\downarrow_{\alpha_x}$ folgt: $\alpha_x\geqslant 0$.

q.e.d.

Eine Hyperebene in einem LVR ist entweder dicht oder abgeschlossen. Dies folgt unmittelbar aus

SATZ 3.2: *Mit einem (algebraischen)* UR F *eines* LVR E *ist auch* $\bar F$ UR *von* E.

Beweis: Für $x, y\in\bar F$ und $\lambda,\ \mu\in\dot{\mathbf{R}}$ erhalten wir: $\lambda x+\mu y\in\lambda\bar F+\mu\bar F\subset\overline{\lambda F+\mu F}\subset\bar F$.

Ein ganz analoger Beweis zeigt, dass mit einer konvexen Teilmenge A eines LVR E auch $\bar A$ konvex ist. Die Konvexität von $\mathrm{Int}(A)$ ergibt sich aus

SATZ 3.3: *Es seien A eine konvexe Teilmenge eines* LVR E, $x'\in\mathrm{Int}(A)$, $x\in A$ *und* $y=\lambda x'+(1-\lambda)\,x$, *wobei* $0<\lambda\leqslant 1$. *Dann ist* $y\in\mathrm{Int}(A)$.

Beweis: Die Abbildung $f_\lambda: E \to E$, definiert durch $f_\lambda(z) := \lambda z + (1-\lambda)\, x$, ist ein Homöomorphismus. Weiter gilt $f_\lambda(A) \subset A$ und $f_\lambda(x') = y$. Für $\mathfrak{F}\downarrow_y$ gilt $f_\lambda^{-1}(\mathfrak{F})\downarrow_{x'}$. Es ist $A \in f_\lambda^{-1}(\mathfrak{F})$, also $f_y(A) \in \mathfrak{F}$ und weiter $A \in \mathfrak{F}$. Das heisst aber, dass $y \in \operatorname{Int}(A)$.

SATZ 3.4: *Es seien E ein* LVR, *A eine Teilmenge von E mit* $\operatorname{Int}(A) \neq \emptyset$, *und $f \neq 0$ eine Linearform auf E mit $f(A) \geqslant 0$. Dann ist die Hyperebene $H := f^{-1}(0)$ abgeschlossen und $f(\operatorname{Int}(A)) > 0$.*

Beweis: Sei $x' \in \operatorname{Int}(A)$, also $x' \notin \overline{A^c} = (\operatorname{Int}(A))^c$. $K := f^{-1}(-\infty, 0)$ ist eine nichtleere Teilmenge von A^c. $x' \notin \bar{K}$, K ist daher nicht dicht in E. Für $y \in K$ gilt $f(y+H) = f(y) + f(H) < 0$, also folgt $y + H \subset K$ und weiter $\overline{y+H} \subset \bar{K} \neq E$. Daraus folgt die Abgeschlossenheit von H.

Seien weiter $x \in H$ und $z \in E$, so dass $f(z) > 0$. Es gilt $\mathbf{V} \cdot z + x \downarrow_x$. Für $\delta > 0$ gibt es einen Ultrafilter $\mathfrak{U} \leqslant \mathbf{V} \cdot z + x$, so dass $B := [(-\delta, 0) \cdot z + x] \in \mathfrak{U}$. Wegen $f(B) < 0$, $f(A) \geqslant 0$ schliessen wir $A \cap B = \emptyset$. Damit ist $A \notin \mathfrak{U}$, also $x \notin \operatorname{Int}(A)$, und das heisst, dass $\operatorname{Int}(A) \cap H = \emptyset$. Nach Voraussetzung folgt $f(\operatorname{Int}(A)) > 0$.

Wir haben nun die Sätze, auf die sich der Beweis der geometrischen Form des Satzes von Hahn-Banach stützt, zusammengestellt und gehen zur Formulierung dieser wichtigen Variante über:

SATZ 3.5 (Hahn-Banach, geometrische Form): *E sei ein* LVR, *A eine konvexe Teilmenge von E mit* $\operatorname{Int}(A) \neq \emptyset$. *$N$ sei eine lineare Mannigfaltigkeit von E, so dass $N \cap \operatorname{Int}(A) = \emptyset$. Dann existiert eine abgeschlossene Hyperebene H, $N \subset H \subset E$, die zu* $\operatorname{Int}(A)$ *disjunkt ist.*

Beweis: Für $z \in N$ ist $N' := N - z$ ein UR von E. Sei $A' := A - z$. Es existiert ein $x' \in \operatorname{Int}(A')$. Für $y \in L := L(N', x')$ gilt $y = n + \lambda x'$, wo $n \in N'$ und $\lambda \in \mathbf{R}$. Durch $f(N') := 0$, $f(x') = 1$ ist eine Linearform $f \neq 0$ auf L definiert. Es gilt $f(L \cap A') \geqslant 0$, denn andernfalls:

Sei $f(y) < 0$ für ein $y \in L \cap A'$. Wegen $f(x') = 1$ gibt es in der konvexen Hülle $K(x', y)$ von x' und y ein u mit $f(u) = 0$. Das heisst $u \in N'$. Wegen $x' \in \operatorname{Int}(A')$ und $y \in A'$ gilt nach Satz 3.3, dass $u \in \operatorname{Int}(A')$. Dies ist aber nicht möglich, da $N' \cap \operatorname{Int}(A') = \emptyset$.

Nach Satz 3.1 existiert nun eine Fortsetzung $\bar{f}$ von f auf E mit $\bar{f}(A') \geqslant 0$. Die Hyperebene $H' := \bar{f}^{-1}(0)$ ist nach Satz 3.4 abgeschlossen und disjunkt zu $\operatorname{Int}(A')$. Mit $H := H' + z$ ergibt sich $H \cap \operatorname{Int}(A) = \emptyset$ und $N \subset H$. q.e.d.

Nach Satz 2.9 ist $\bar{f}$ stetig. Für den Fall, dass N UR von E ist, haben wir somit die Existenz einer stetigen Linearform $\bar{f}$ nachgewiesen, für welche gilt: $\bar{f}(N) = 0$, $\bar{f}(\operatorname{Int}(A)) > 0$.

SATZ 3.6: *A und $B \neq \emptyset$ seien konvexe Teilmengen eines* LVR *E, wobei* $\operatorname{Int}(A) \neq \emptyset$ *und $A \cap B = \emptyset$. Dann gibt es eine stetige Linearform f auf E und ein $\alpha \in \mathbf{R}$, so dass $f(\operatorname{Int}(A)) < \alpha$ und $f(B) \geqslant \alpha$.*

Beweis: $\mathrm{Int}(A-B)\supset\mathrm{Int}(A-b)=\mathrm{Int}(A)-b$ für $b\in B$, also ist $\mathrm{Int}(A-B)\neq\emptyset$. Da $N:=\{0\}$ und $\mathrm{Int}(A-B)$ disjunkt sind, folgt aus Satz 3.5 die Existenz einer stetigen Linearform $f\neq 0$ mit $f(\mathrm{Int}(A-B))<0$. Wegen $f(A-B)\leqslant 0$ ist $\alpha:=\sup f(A)$ endlich, und es gilt $f(B)\geqslant\alpha$. Andererseits ergibt sich aus Satz 3.4 $f(\mathrm{Int}(A))<\alpha$.

Als Anwendung des Satzes von Hahn-Banach geben wir eine hinreichende Bedingung an für die Separiertheit des zu einem LVR E gehörigen lokalkonvexen Raumes E^0. Dabei soll eine Menge $A\subset E$ beschränkt heissen, falls $\mathbf{V}\cdot A\downarrow_0 E$.

SATZ 3.7: *Wenn in einem separierten* LVR E *eine beschränkte konvexe Teilmenge* A *existiert mit* $\mathrm{Int}(A)\neq\emptyset$, *ist* E^0 *separiert.*

Beweis: Sei $z\in\mathrm{Int}(A)$ und $A':=A-z$. Dann ist $0\in\mathrm{Int}(A')$. $A'\in\mathfrak{F}$ für $\mathfrak{F}\downarrow_0$, ebenso $(-A')$ und $W:=A'\cap(-A')$. W ist konvex und symmetrisch, also equilibriert, sowie beschränkt. $0\in\mathrm{Int}(W)$. Sei $x\in E$, $x\neq 0$. Dann gibt es ein Intervall $[-\varepsilon,\varepsilon]$, $\varepsilon>0$, so dass $x\notin[-\varepsilon,\varepsilon]\cdot W$, denn sonst würde gelten $[x]\leqslant\mathbf{V}\cdot W\downarrow_0$, in Widerspruch zur Separiertheit von E. Also gilt $x/\varepsilon\notin[-1,1]\cdot W=W$. Nach Satz 3.6 gibt es eine stetige Linearform f mit $f(x/\varepsilon)\neq 0$, oder mit $f(x)\neq 0$. Daraus folgt die Separiertheit von E^0.

4. Der Minimaxsatz von Sion und der Fixpunktsatz von Tychonoff

Eine Abbildung f eines LR M in $\mathbf{R}$ heisst unterhalbstetig (oberhalbstetig), wenn für jedes $\alpha\in\mathbf{R}$ $f^{-1}(\alpha,\infty)$ $(f^{-1}(-\infty,\alpha))$ eine offene Teilmenge von M ist. Offenbar ist f genau dann unterhalbstetig, wenn $-f$ oberhalbstetig ist. Die Eigenschaften oberhalbstetiger Abbildungen ergeben sich daher ohne weiteres aus denjenigen unterhalbstetiger Abbildungen.

SATZ 4.1: *Eine Abbildung* f *eines* LR M *in* $\mathbf{R}$ *ist genau dann unterhalbstetig, wenn zu jedem* $x\in M$ *und für jedes* $\varepsilon>0$ *eine Umgebung* U *von* x *existiert, so dass* $f(U)>f(x)-\varepsilon$.

Beweis: $\Rightarrow$ $U:=f^{-1}(f(x)-\varepsilon,\infty)$ ist offen und enthält x, ist also x-Umgebung.

$\Leftarrow$ Sei für $\alpha\in\mathbf{R}$ $f^{-1}(\alpha,\infty)\neq\emptyset$. Zu jedem $x\in f^{-1}(\alpha,\infty)$ gibt es ein $\varepsilon>0$, so dass $f(x)-\varepsilon>\alpha$. Nach Voraussetzung gibt es eine Umgebung U von x mit $f(U)>f(x)-\varepsilon$, das heisst $f(U)\subset(\alpha,\infty)$. Daraus folgt $f^{-1}(\alpha,\infty)\supset U$ und somit $x\in\mathrm{Int}(f^{-1}(\alpha,\infty))$. Also ist $f^{-1}(\alpha,\infty)$ offen.

Jede stetige Abbildung ist unterhalbstetig. Jede unterhalbstetige Abbildung von M in $\mathbf{R}$ ist unterhalbstetig von M^ω in $\mathbf{R}$. Aus der Theorie der topologischen Räume kann somit entnommen werden:

- Mit einer Familie unterhalbstetiger Abbildungen ist, falls es existiert, auch ihr Supremum unterhalbstetig.
- Jede unterhalbstetige Abbildung f eines kompakten LR M in $\mathbf{R}$ nimmt auf M ihr Infimum an.

Eine Abbildung f von einer konvexen Teilmenge X eines VR E in $\mathbf{R}$ heisst quasikonkav (quasikonvex), wenn für jedes $\alpha \in \mathbf{R}$ $f^{-1}(\alpha, \infty)$ $(f^{-1}(-\infty, \alpha))$ konvex ist. f ist genau dann quasikonkav, wenn $-f$ quasikonvex ist.

Mit obigen Definitionen lässt sich nun der folgende Satz von Ky Fan formulieren:

SATZ 4.2 (Fan): *E und F seien separierte* LVR, *X und Y seien nichtleere, kompakte, konvexe Teilmengen von E bzw. von F. f und g seien Abbildungen von $X \times Y$ in* $\mathbf{R}$, *wobei gelte: Für alle $x \in X$, $y \in Y$ und feste α, $\beta \in \mathbf{R}$ seien die Restriktionen $f_x: Y \to \mathbf{R}$, $f_x(y) := f(x, y)$, und $g_y: X \to \mathbf{R}$, $g_y(x) := g(x, y)$, unterhalbstetig. f_y und g_x seien quasikonkav mit $f_y^{-1}(\alpha, \infty) \neq \emptyset$ und $g_x^{-1}(\beta, \infty) \neq \emptyset$.*

Dann gibt es ein $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ mit $f(\bar{x}, \bar{y}) > \alpha$ und $g(\bar{x}, \bar{y}) > \beta$.

Beweis: (Vgl. (5), S. 305f, sowie (6).)

1) Für $(x, y) \in X \times Y$ definieren wir:

$A(x, y) := \{(x', y') \in X \times Y,\ f(x, y') \leqslant \alpha \vee g(x', y) \leqslant \beta\}$. $(A(x, y))^c \cap X \times Y = g_y^{-1}(\beta, \infty) \times f_x^{-1}(\alpha, \infty)$ ist offen in $X \times Y$, $A(x, y)$ daher abgeschlossen und nach Satz 2.3 kompakt. Zu $(x' y') \in X \times Y$ existiert ein (x, y), so dass (x', y') nicht Element von $A(x, y)$ ist, nämlich irgendein x aus der nichtleeren Menge $f_{y'}^{-1}(\alpha, \infty)$ zusammen mit einem y aus $g_{x'}^{-1}(\beta, \infty)$. Das heisst $\bigcap_{X \times Y} A(x, y) = \emptyset$, und wegen der Kompaktheit von $X \times Y$ existieren gewisse $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ aus $X \times Y$ mit $\bigcap_{i=1}^n A(x_i, y_i) = \emptyset$.

2) Es gibt gewisse $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m) \in X \times Y$, für deren konvexe Hülle gilt: $K((x_i, y_i), i = 1, \ldots, m) \not\subset \bigcup_{i=1}^m A(x_i, y_i)$, denn andernfalls:

Sei $K((x_i, y_i), i \in I) \subset \bigcup_{i \in I} A(x_i, y_i)$ für jedes endliche I. Sei $I = \{1, \ldots, n\}$, dann definieren wir $v_1 := (1, 0, \ldots, 0)$ bis $v_n := (0, \ldots, 0, 1) \in R^n$, sowie eine lineare Abbildung $h: R^n \to X \times Y$ durch $h(v_i) := (x_i, y_i)$. Die Limitierung von $X \times Y$ induziert nach Satz 2.8 auf $h(R^n)$ die natürliche Topologie. h ist stetig (siehe (3), p. 19) und damit auch seine Restriktion h_K auf $K(v_i, i \in I)$. $h_K^{-1}(A(x_i, y_i))$ ist abgeschlossen. Nach Voraussetzung gilt $K((x_j, y_j), j \in J) \subset \bigcup_{j \in J} A(x_j, y_j)$ für jedes $J \subset I$. Also folgt $K(v_j, j \in J) = h_K^{-1}(K(x_j, y_j), j \in J) \subset h_K^{-1}(\bigcup_{j \in J} A(x_j, y_j)) = \bigcup_{j \in J} h_K^{-1}(A(x_j, y_j))$ für jedes $J \subset I$. Damit sind die Voraussetzungen des aus dem Spernerschen Lemmas folgenden Satzes von Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz (siehe (2), p. 180) erfüllt, und wir erhalten $\bigcap_{i \in I} A(x_i, y_i) \neq \emptyset$. Dies steht aber in Widerspruch zum Ergebnis von Beweisteil 1).

3) Es gibt somit gewisse nichtnegative $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ mit $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, so dass $\sum_{i=1}^m \alpha_i (x_i, y_i) \notin \bigcup_{i=1}^m A(x_i, y_i)$. Das heisst $f(x_j, \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i) > \alpha$ und $g(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i, y_j) > \beta$ für $j = 1, \ldots, m$, oder $x_j \in f_{\Sigma \alpha_i y_i}^{-1}(\alpha, \infty)$ und $y_j \in g_{\Sigma \alpha_i x_i}^{-1}(\beta, \infty)$, $j = 1, \ldots, m$. Da $f_{\Sigma \alpha_i y_i}$ und $g_{\Sigma \alpha_i x_i}$ quasikonkav sind, gilt $\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j \in f_{\Sigma \alpha_i y_i}^{-1}(\alpha, \infty)$ und $\sum_{j=1}^m \alpha_j y_j \in g_{\Sigma \alpha_i x_i}^{-1}(\beta, \infty)$, so dass wir erhalten: $f(\sum_{i=1}^m \alpha_i (x_i, y_i)) > \alpha$, $g(\sum_{i=1}^m \alpha_i (x_i, y_i)) > \beta$. Also haben $\bar{x} := \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$ und $\bar{y} := \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i$ die verlangten Eigenschaften. q.e.d.

Eine Folgerung aus dem Satz von Fan ist der Minimaxsatz von Sion:

SATZ 4.3 (Sion): *E und F seien separierte* LVR, *X und Y nichtleere, kompakte,*

konvexe Teilmengen von E bzw. F. f sei eine Abbildung von $X \times Y$ *in* $\mathbf{R}$, *wobei für alle* $x \in X$, $y \in Y$ *die Restriktionen* f_x *unterhalbstetig und quasikonvex,* f_y *oberhalbstetig und quasikonkav seien. Dann existieren* $\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$ *und* $\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y)$ *und sind einander gleich.*

Beweis: 1) Sei $y \in Y$. Wegen der Kompaktheit von X existiert ein $x_y \in X$, so dass $f_y(x_y) = \sup(f_y(X))$. Das heisst $f(x_y, y) = \max_X f(x, y)$. Die Abbildung $\sup_X f_x = \max_X f_x$ ist somit auf Y definiert und unterhalbstetig. Es existiert ein $\bar{y} \in Y$, für welches $\max_X f_x(\bar{y}) = f(x_{\bar{y}}, \bar{y}) = \inf(\max_X f_x(Y))$ ist. Das heisst, es existiert ein $(x_{\bar{y}}, \bar{y}) \in X \times Y$ mit $f(x_{\bar{y}}, \bar{y}) = \min_Y \max_X f(x, y)$. Ebenso existiert ein $(\bar{x}, y_{\bar{x}}) \in X \times Y$ mit $f(\bar{x}, y_{\bar{x}}) = \max_X \min_Y f(x, y)$.

2) Mit der Definition $g := -f$ ist g_y unterhalbstetig und g_x quasikonkav. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es wegen $f(x_y, y) \geqslant f(x_{\bar{y}}, \bar{y}) > f(x_{\bar{y}}, \bar{y}) - \varepsilon$ und $g(x, y_x) \geqslant g(\bar{x}, y_{\bar{x}}) > g(\bar{x}, y_{\bar{x}}) - \varepsilon$ nach Satz 4.2 ein $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in X \times Y$ mit $f(x_\varepsilon, y_\varepsilon) > f(x_{\bar{y}}, \bar{y}) - \varepsilon$, $g(x_\varepsilon, y_\varepsilon) > g(\bar{x}, y_{\bar{x}}) - \varepsilon$.

Das heisst $f(x_{\bar{y}}, \bar{y}) - \varepsilon < f(x_\varepsilon, y_\varepsilon) < f(\bar{x}, y_{\bar{x}}) + \varepsilon$, und es folgt: $\min_Y \max_X f(x, y) \leqslant \max_X \min_Y f(x, y)$.

3) Umgekehrt gilt:

$$f(\bar{x}, y_{\bar{x}}) = \max(\min_Y f_y(X)) \leqslant \max(f_{\bar{y}}(X)) = f(x_{\bar{y}}, \bar{y}).$$

q.e.d.

Als weitere Folgerung aus dem Satz von Fan erhält man den Fixpunktsatz von Tychonoff:

SATZ 4.4 (Tychonoff): *S sei eine nichtleere, kompakte und konvexe Teilmenge eines* LVR *E mit separiertem* E^0, *und h sei eine stetige Abbildung von S in sich. Dann gibt es ein* $\bar{x} \in S$ *mit* $h(\bar{x}) = \bar{x}$.

Beweis: 1) Zu jedem $x \in E$, $x \neq 0$, gibt es eine stetige Linearform u auf E mit $u(x) \neq 0$. Für alle solchen u und alle $\varepsilon > 0$ definieren wir: $A(u, \varepsilon) := \{x \in S, u(x - h(x)) \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$. Wegen der Stetigkeit von $(id_S - h)$ ist jedes $A(u, \varepsilon)$ abgeschlossen. Es ist zu zeigen, dass der Durchschnitt aller dieser $A(u, \varepsilon)$ nicht leer ist, oder – wegen der Kompaktheit von S – dass $\bigcap_{i=1}^n A(u_i, \varepsilon_i) \neq \emptyset$ für je endlich viele $(u_1, \varepsilon_1), \ldots, (u_n, \varepsilon_n)$.

2) Wir definieren zwei Abbildungen $f, g: S \times S \to \mathbf{R}$, durch
$f(x, y) := \sum_{i=1}^n |u_i(y - h(y))| - \sum_{i=1}^n |u_i(x - h(y))|$, und $g(x, y) := -\sum_{i=1}^n |u_i(x - y)|$. Dann sind f_x und g_y stetig, also insbesondere unterhalbstetig, und f_y und g_x quasikonkav. Wegen $|u(y) - u(h(y))| - |u(x) - u(h(x))| \leqslant |u(x) - u(y)|$ ist $f(x, y) + g(x, y) \leqslant 0$ für alle $(x, y) \in S \times S$. Wir setzen $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Zu jedem $x \in S$ existiert ein $y \in S$, so dass $g(x, y) > -\varepsilon$, nämlich $y = x$. Es gibt daher nicht zu jedem $y \in S$ ein $x \in S$ mit $f(x, y) > \varepsilon$, denn sonst würde nach Satz 4.2 ein $(x', y') \in S \times S$ existieren mit $f(x', y') + g(x', y') > 0$. Es gibt somit ein $\bar{y} \in S$ mit $f(x, \bar{y}) \leqslant \varepsilon$ für alle $x \in S$, insbesondere für $h(\bar{y})$. Also gilt $\sum_{i=1}^n |u_i(\bar{y} - h(\bar{y}))| \leqslant \varepsilon$, und es folgt: $\bar{y} \in \bigcap_{i=1}^n A(u_i, \varepsilon)$.

q.e.d.

5. Der Fixpunktsatz von Kakutani

Einen andern Zugang zum Satz von Tychonoff liefert der allgemeinere Fixpunktsatz von Kakutani:

SATZ 5.1 (Kakutani): *S sei eine nichtleere, kompakte, konvexe Teilmenge in einem* LVR *E mit separiertem E^0. f sei eine Abbildung von S in die Potenzmenge $P(S)$, wobei $f(x)$ für jedes $x \in S$ konvex und nicht leer, und der Graph $G(f) := \{(x, y);\ x \in S, y \in f(x)\}$ von f in $S \times S$ abgeschlossen ist.*

Dann gibt es ein $\bar{x} \in S$ mit $\bar{x} \in f(\bar{x})$.

Beweis: (Vgl. (8), p. 171.)

1) In E^0 gibt es eine Nullumgebungsbasis $\mathfrak{V}$ aus konvexen, symmetrischen und abgeschlossenen Mengen. Da S in E^0 kompakt ist, gibt es zu jedem $V \in \mathfrak{V}$ eine endliche Teilmenge $\{x_i, \ldots, x_n\}$ von S, so dass $S \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V)$. Wir definieren eine Abbildung f_v von S in die Potenzmenge von $K := K(x_1, \ldots, x_n)$ durch $f_v(x) := (f(x) + V) \cap K$. $f_v(x)$ ist konvex und nicht leer, denn: für $x \in S$ ist $f(x) \neq \emptyset$, also $f(x) \cap \bigcup_{i=1}^n (x_i + V) \neq \emptyset$. Es existiert somit ein $j \in \{1, \ldots, n\}$, für welches $f(x) \cap (x_j + V) \neq \emptyset$. Das heisst, dass $x_j \in f(x) + V$, oder $x_j \in f_v(x)$. Der Graph $G(f_v) := \{(x, y);\ x \in K, y \in (f(x) + V) \cap K\}$ der Restriction von f_v auf K lässt sich darstellen als $(K \times K) \cap \{(x, y);\ x \in S, y \in (f(x) + V)\} = (K \times K) \cap [G(f) + (\{0\} \times V)]$. Es folgt, dass $G(f_v)$ in $K \times K$ abgeschlossenen ist. Nach Satz 2.8 induziert die Limitierung von E auf K die natürliche Topologie. Für K sind daher die Bedingungen des Fixpunktsatzes von Kakutani für euklidische Räume endlicher Dimension erfüllt (siehe (2), p. 183), und es folgt die Existenz eines $x_v \in K$ mit $x_v \in f_v(x_v)$.

2) Die Mengen $\{x \in S, x \in f(x) + V\}$, wo $V \in \mathfrak{V}$, erzeugen einen Filter $\mathfrak{F}$ auf S. Es existiert ein $\bar{x} \in S$, und ein Filter $\mathfrak{G} \leqslant \mathfrak{V} + \bar{x}$ mit $\mathfrak{G} \leqslant \mathfrak{F}$. Das bedeutet, dass der Filter $\mathfrak{A} := (\mathfrak{V} + \bar{x}) \cap \mathfrak{F}$ existiert und gegen $\bar{x}$ in E^0 konvergiert. Somit konvergiert der Filter $\mathfrak{B} := \mathfrak{A} \times (\mathfrak{V} + \bar{x})$ gegen $(\bar{x}, \bar{x})$ im Produktraum $E^0 \times E^0$. Der Filter $\mathfrak{B} \cap [G(f)]$ existiert, denn:

Sei $V \in \mathfrak{V}$, dann gilt $(\frac{1}{2}V + \bar{x}) \cap \{x, x \in f(x) + \frac{1}{2}V\} \in \mathfrak{A}$. Es existiert also ein $x' = y' + z' \in \frac{1}{2}V + \bar{x}$, wo $y' \in f(x')$ und $z' \in \frac{1}{2}V$. Wegen $x' - z' \in f(x')$ gilt $(x', x' - z') \in G(f)$ und wegen $x' - z' \in V + \bar{x}$ weiter $(x', x' - z') \in [(V + \bar{x}) \cap \{x, x \in f(x) + V\}] \times (V + \bar{x})$. Und daraus folgt, dass $G(f) \cap B \neq \emptyset$ ist für alle $B \in \mathfrak{B}$. $G(f)$ ist kompakt in $S^0 \times S^0$, wo S^0 topologischer UR von E^0 ist, und daher abgeschlossen.

Aus $G(f) \in \mathfrak{B} \cap [G(f)] \downarrow_{(\bar{x}, \bar{x})}$ folgt nun $(\bar{x}, \bar{x}) \in \overline{G(f)} = G(f)$, und das heisst $\bar{x} \in f(\bar{x})$. q.e.d.

Als Korollar von Satz 5.1 ergibt sich der Fixpunktsatz von Tychonoff, da – wie der nächste Satz zeigt – aus der Kompaktheit von S und der Stetigkeit von f die Abgeschlossenheit von $G(f)$ folgt.

SATZ 5.2: *M und N seien* LR, *f eine Abbildung von M in N, und* $G(f):=\{(x, f(x)), x\in M\}$ *der Graph von f. Dann gilt: f ist genau dann stetig, wenn* $h: M\to G(f)$, *definiert durch* $h(x):=(x, f(x))$, *ein Homöomorphismus ist.*

Beweis: 1) h sei ein Homöomorphismus. Dann ist $f=pr_{\mathrm{N}}\circ h$ stetig.

2) $h^{-1}=pr_{\mathrm{M}}$ ist stetig. Für $\mathfrak{F}\downarrow_x M$ gilt $h(\mathfrak{F})=\mathfrak{F}\times f(\mathfrak{F})\downarrow_{(x,f(x))}$, das heisst, h ist stetig.

6. Der Fixpunktsatz von Markoff-Kakutani

SATZ 6.1 (Markoff-Kakutani): *S sei eine nichtleere, konvexe, kompakte Teilmenge eines separierten* LVR *E. Γ sei eine Familie linearer, paarweise vertauschbarer Abbildungen von E in sich, die S stetig in sich überführen. Dann gibt es ein* $x\in S$ *mit* $u(x)=x$ *für jedes* $u\in\Gamma$.

Beweis: (Vgl. (3), p. 121.)

1) Für alle $u\in\Gamma$, $n\in\mathbf{N}$ definieren wir eine Abbildung $u_n: E\to E$ durch $u_n(x):=n^{-1}(x+u(x)+u(u(x))+\cdots+u^{n-1}(x))$. Γ_1 sei die Familie der Produkte einer endlichen Anzahl von Abbildungen der Form u_n. Dann sind alle $v\in\Gamma_1$ linear, paarweise vertauschbar mit $v(S)\subset S$ und mit stetigen Restriktionen auf S (Satz 2.1).

2) $\mathfrak{B}:=\{v(S), v\in\Gamma_1\}$ ist Filterbasis auf S: $\mathfrak{B}$ ist nicht leer, da $id_E\in\Gamma_1$. Seien v, $w\in\Gamma_1$ und $u:=vw=wv$, dann gilt $u\in\Gamma_1$, $u(S)=v(w(S))\subset v(S)$ und ebenso $u(S)\subset w(S)$. Das heisst $u(S)\subset v(S)\cap w(S)$.

Nach Satz 2.6 sind alle $B\in\mathfrak{B}$ kompakt und daher abgeschlossen. Daher folgt, dass der Durchschnitt A aller $B\in\mathfrak{B}$ nicht leer ist. Für jedes $x\in A$ und alle $u\in\Gamma$ gilt nun: $u(x)=x$: Sei $n>0$, $x\in A$. Dann ist $x\in u_n(S)$, also gilt

$$x = n^{-1}(y + u(y) + \cdots + u^{n-1}(y)) \quad \text{für ein} \quad y\in S.$$
$$z := u(x) - x = n^{-1}(u(y) + u^2(y) + \cdots + u^n(y)) - n^{-1}(y + \cdots + u^{n-1}(y)) = n^{-1}(u^n(y) - y)\in n^{-1}(S - S).$$

$T:=S-S$ ist kompakt, konvex und symmetrisch. Wir nehmen an, dass $z\neq 0$. Es folgt $nz\in T$ für alle $n\in\mathbf{N}$, also auch $\lambda\cdot z\in T$ für alle $\lambda\in\mathbf{R}$. Der eindimensionale UR $F:=\{\lambda z, \lambda\in\mathbf{R}\}$ liegt in T, und nach Satz 2.8 ist die auf ihm induzierte Limitierung die natürliche Topologie. F ist somit vollständig und nach Satz 2.2 abgeschlossen, also kompakt. Da dies nicht möglich ist, ergibt sich $z=0$.

q.e.d.

LITERATUR

[1] Baumann, V.: *W.A.J. Luxemburgs Beweis des Satzes von Hahn-Banach*, Arch. Math. *18* (1967), 271–272.
[2] Berge, C.: *Espaces topologiques, fonctions multivoques*, 2e ed., Dunod, Paris, 1966.
[3] Bourbaki, N.: *Espaces vectoriels topologiques*, Chap. 1 et 2, 2e ed., Hermann, Paris, 1966.

[4] COURANT, S.: *Beiträge zur Theorie der limitierten Vektorräume*, Diss. Universität Bern, 1968. Comment. Math. Helv. *44* (1969), 249–268.
[5] FAN, K.: *A Generalization of Tychonoff's Fixed Point Theorem*, Math. Ann. *142* (1961), 305–310.
[6] FAN, K.: *Sur un théorème minimax*, C.R. Acad. Sci. Paris *259* (1964), 3925–3928.
[7] FISCHER, H. R.: *Limesräume*, Math. Ann. *137* (1959), 269–303.
[8] GLICKSBERG, I. L.: *A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem, with Application to Nash Equilibrium Points*, Proc. Am. Math. Soc. *3* (1952), 170–174.

Eingegangen den 20. Oktober 1969