

Inseparable Körpererweiterungen.

Autor(en): **Kraft, Hanspeter**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **45 (1970)**

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-34645>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Inseparable Körpererweiterungen

HANSPETER KRAFT, Mathematisches Institut Basel

§ 1. Einleitung

Ist K eine endlich erzeugte Körpererweiterung eines Körpers k der Charakteristik $p > 0$, so gibt es verschiedene Grössen, die die „Inseparabilität von K/k messen“, so etwa den Inseparabilitätsindex, die Inseparabilitätsordnung von Weil, den p -Grad oder auch die Inseparabilität, dh. die Differenz p -Grad minus Transzendenzgrad (vgl. § 2.). Man weiss nun, dass sich diese Grössen ganz verschieden verhalten, und es stellt sich die Frage, wie sie eigentlich zusammenhängen und ob sie sich nicht einfacher beschreiben lassen.

Es soll nun in dieser Arbeit gezeigt werden, dass sich durch Einführen von neuen Grössen, den Inseparabilitätskonstanten der Ordnung i , obige einfach ausdrücken lassen. (§ 3.). Gleichzeitig erhält man eine Charakterisierung der optimalen separablen Zwischenkörper von K/k , dh. derjenigen Zwischenkörper K_0 von K/k , die über k separabel erzeugt sind und bei denen der Grad von K/K_0 gleich der Inseparabilitätsordnung von K/k ist. Die neu eingeführten Inseparabilitätskonstanten unterliegen dabei nur einer einfachen Monotoniebedingung (Satz II § 2. und Satz IVa/b § 4.).

Als wichtige Folgerung ergibt sich noch die Aussage, dass sich jede endlich erzeugte Körpererweiterung K/k sehr einfach aufbauen lässt, nämlich durch eine separabel erzeugte Erweiterung K_0 von k und anschliessenden rein inseparablen, einfachen Erweiterungen $K_i = K_{i-1}(x_i)$ ($i = 1, \dots, n$; $K_n = K$) mit dem irreduziblen Polynom $f_i(X) = X^{p^e} - a_i$, wobei a_i sogar in $kK_{i-1}^{p^e}$ liegt (dh. $f_i(X) \in kK_{i-1}^{p^e}[X]$; Folgerung zu Satz III § 3.). Diese Körperkette hat einen engen Zusammenhang mit dem Differentialmodul $M(K/k)$ von K/k .

Zum Schluss möchte ich nicht versäumen, Herrn Prof. W. Habicht und Herrn Prof. R. Berger für die Anregungen und die wertvollen Hinweise zu dieser Arbeit recht herzlich zu danken.

§ 2. Die Inseparabilitätskonstanten

In der folgenden Definition sind die wichtigsten Grössen, die die Inseparabilität einer endlich erzeugten Körpererweiterung K von k „messen“, zusammengestellt. Dabei spielen die Begriffe der p -Unabhängigkeit, der p -Basis und des p -Grades eine wesentliche Rolle. Für die Definitionen und die einfachen Eigenschaften vergleiche man etwa [1]. Es seien hier nur die folgenden beiden Eigenschaften angeführt:

a) Die p -Basen von K/k sind genau die minimalen Erzeugendensysteme von K über kK^p .

b) Ist K/k separabel erzeugt, so sind die Begriffe p -Basis von K/k und separierende Transzendenzbasis von K/k gleichbedeutend.

Definition: Es sei K/k eine endlich erzeugte Körpererweiterung. Dann definieren wir:

1) Inseparabilitätsexponent von K/k :

$$\text{inex}(K/k) = \text{Min} \{r \mid kK^{p^r}/k \text{ separabel erzeugt}\}$$

Es gilt: kK^{p^i}/k separabel erzeugt ist gleichbedeutend mit $i \geq \text{inex}(K/k)$.

2) Inseparabilitätsordnung von K/k :

$$[K:k]_i = \text{Min} \{[K:K_0] \mid K_0/k \text{ separabel erzeugt, } K/K_0 \text{ algebraisch}\}$$

Die Körper K_0 mit $[K:K_0] = [K:k]_i$ heissen optimale separable Zwischenkörper von K/k .

Es gilt: $[K:k]_i = p^n$ und wir definieren zusätzlich noch $\text{inor}(K/k) = n$.

3) Inseparabilität von K/k :

$$\text{insep}(K/k) = [K:k]_p - [K:k]_t$$

LEMMA 1: Sind $L \supseteq K \supseteq k$ Körper mit L/k endlich erzeugt, so folgt $\text{insep}(L/k) \geq \text{insep}(K/k) \geq 0$. Dabei gilt $\text{insep}(L/k) = \text{insep}(K/k)$ genau dann, wenn L^p und kK^p linear disjunkt über K^p sind.

Beweis. a) Sei L/K rein transzendent mit Transzendenzgrad t . Dann folgt $[L:k]_p = [K:k]_p + t$, also $\text{insep}(L/k) = \text{insep}(K/k)$.

b) Sei L/K algebraisch. Dann gilt $[L:K] = [L^p:K^p]$, und aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} L^p & - & kL^p & - & L \\ | & & | & & | \\ K^p & - & kK^p & - & K \end{array}$$

entnimmt man $[kL^p:kK^p] \leq [L^p:K^p] = [L:K]$ und daher $[L:kL^p] \geq [K:kK^p]$. Dies bedeutet aber gerade, dass $\text{insep}(L/k) \geq \text{insep}(K/k)$ ist, wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn $[kL^p:kK^p] = [L^p:K^p]$, und dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass L^p und kK^p linear disjunkt über K^p sind.

c) Sei nun L/K eine beliebige endlich erzeugte Körpererweiterung, x_1, \dots, x_t eine Transzendenzbasis von L/K und $K_0 = K(x_1, \dots, x_t)$. Dann folgt aus a) und b): $\text{insep}(K/k) = \text{insep}(K_0/k) \leq \text{insep}(L/k)$, wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn L^p und kK_0^p linear disjunkt über K_0^p sind. Da K_0/K rein transzendent ist, ist diese Bedingung gleichbedeutend mit der Behauptung.

Aus dem Lemma 1 und den bekannten Eigenschaften von p -Basis und p -Grad

erhält man nachstehende einfache Folgerungen. Es wird dabei der bekannte Satz verwendet, dass unter der Voraussetzung K/k endlich erzeugt die Aussage K/k separabel erzeugt gleichbedeutend ist mit K^p und k linear disjunkt über k^p .

- Folgerungen:* 1) $[K:k]_p \geq [K:k]_t$,
 2) $\text{insep}(K/k) = 0$ ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass K/k separabel erzeugt ist.
 3) Eine Transzendenzbasis $\{x_1, \dots, x_t\}$ von K/k ist genau dann separierende Transzendenzbasis von K/k , wenn $\{x_1, \dots, x_t\}$ p -Basis von K/k ist.
 4) Ist L/K separabel erzeugt, so gilt $\text{insep}(L/k) = \text{insep}(K/k)$.

Aus den Definitionen zu Beginn des Paragraphen und dem Lemma 1 ergeben sich folgende notwendige und hinreichende Bedingungen für die Eigenschaft, dass K/k separabel erzeugt ist:

SATZ I: *Ist K/k endlich erzeugt, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

- 1) K/k ist separabel erzeugt;
- 2) $\text{insep}(K/k) = 0$;
- 3) $\text{inor}(K/k) = 0$, dh. $[K:k]_i = 1$;
- 4) $\text{inex}(K/k) = 0$.

Für das weitere wesentlich ist nun die Untersuchung der folgenden Körperkette:

$$K \supseteq kK^p \supseteq kK^{p^2} \supseteq \dots \supseteq kK^{p^i} \supseteq \dots$$

In Ergänzung zu den Definitionen am Anfang diese Paragraphen führen wir folgende Begriffe ein:

Definition: Inseparabilitätskonstanten der Ordnung i von K/k :

$$\text{insep}_i(K/k) = \text{insep}(kK^{p^i}/k) = [kK^{p^i}:k]_p - [K:k]_t;$$

insbesondere gilt: $\text{insep}_0(K/k) = \text{insep}(K/k)$.

Folgende Eigenschaften der Inseparabilitätskonstanten entnimmt man aus der Tatsache, dass man aus einem Erzeugendensystem x_1, \dots, x_n von K über kK^p das Erzeugendensystem x_1^p, \dots, x_n^p von kK^p über kK^{p^2} erhält.

SATZ II: *Die Inseparabilitätskonstanten $\text{insep}_i(K/k)$ bilden für $i=0, 1, 2, \dots$ eine monoton fallende Folge von ganzen Zahlen ≥ 0 , die von einer Stelle an aus lauter Nullen besteht.*

Dabei gilt: $\text{inex}(K/k) = \text{Min} \{i \mid \text{insep}_i(K/k) = 0\}$ und

$$[kK^{p^i}:k]_p = \text{insep}_i(K/k) + [K:k]_t.$$

§ 3. Bestimmung der Inseparabilitätsordnung

Unter den Transzendenzbasen $\{x_1, \dots, x_t\}$ von K/k sind gewisse dadurch ausge-

zeichnet, dass ihre p^i -ten Potenzen p -unabhängig sind in kK^{p^i} über k für alle $i \geq 0$. Für $i \geq r = \text{inex}(K/k)$ bilden diese dann eine separierende Transzendenzbasis von kK^{p^i} über k , wie man aus der Folgerung 3) von Lemma 1 sofort entnimmt. Wir definieren daher:

Definition: Eine Transzendenzbasis $\{x_1, \dots, x_t\}$ von K/k heisst ausgezeichnete Transzendenzbasis von K/k , wenn $\{x_1^{p^r}, \dots, x_t^{p^r}\}$ separierende Transzendenzbasis von kK^{p^r}/k ist für $r = \text{inex}(K/k)$. Gleichbedeutend damit ist die Aussage, dass $\{x_1^{p^r}, \dots, x_t^{p^r}\}$ p -Basis von kK^{p^r}/k ist für $r = \text{inex}(K/k)$.

Mit den gleichen Überlegungen wie zu Satz II erhält man aus dieser Definition sofort folgendes

LEMMA 2: *Jede p -Basis von K/k enthält eine ausgezeichnete Transzendenzbasis.*

Sei K_0 ein Zwischenkörper von K/k mit K_0/k separabel erzeugt und K/K_0 rein inseparabel. Dann gibt es ein $y \in K_0$, y separabel algebraisch über $k(x_1, \dots, x_t)$, $\{x_1, \dots, x_t\}$ separierende Transzendenzbasis von K_0/k , mit $K_0 = k(x_1, \dots, x_t, y)$. Weiter gilt für ein $s \geq r = \text{inex}(K/k)$: $kK^{p^s} \subseteq K_0$. Daraus folgt nun $K_0 = kK^{p^s}[x_1, \dots, x_t]$, denn y ist wegen der Separabilität schon in $kK^{p^s}[x_1, \dots, x_t]$ enthalten. Wir erhalten daher $[K_0 : kK^{p^s}] \leq p^{st}$ und daraus

$$[K : K_0] \geq p^c \quad \text{mit} \quad c = \sum_{i=0}^{s-1} \text{insep}_i(K/k) = \sum_{i=0}^{r-1} \text{insep}_i(K/k),$$

denn

$$[K : kK^{p^s}] = \prod_{i=0}^{s-1} [kK^{p^i} : kK^{p^{i+1}}] = p^{c'} \quad \text{mit} \quad c' = \sum_{i=0}^{s-1} (\text{insep}_i(K/k) + t).$$

Es ergibt sich also folgende Ungleichung:

$$\text{inor}(K/k) \geq \sum_{i=0}^{r-1} \text{insep}_i(K/k) \quad \text{mit} \quad r = \text{inex}(K/k). \quad (*)$$

SATZ III: a) *Es gilt:*

$$\text{inor}(K/k) = \sum_{i=0}^r \text{insep}_i(K/k) \quad \text{mit} \quad r = \text{inex}(K/k).$$

b) *Die optimalen separablen Zwischenkörper von K/k sind genau diejenigen separabel erzeugten Zwischenkörper K_0 , für die $kK_0^{p^r} = kK^{p^r}$ gilt mit $r = \text{inex}(K/k)$. Die ausgezeichneten Transzendenzbasen von K/k sind daher genau die separierenden Transzendenzbasen der optimalen separablen Zwischenkörper von K/k .*

Beweis: Sei $\{z_1, \dots, z_t\}$ eine ausgezeichnete Transzendenzbasis von K/k , K_0 die separable Hülle von $k(z_1, \dots, z_t)$ in K . Wir wollen folgendes zeigen:

$${}_p \log [K : K_0] = \sum_{i=0}^{r-1} \text{insep}_i(K/k).$$

Mit $r = \text{inex}(K/k)$ erhält man zunächst

$$kK_0^{p^r} = k(z_1^{p^r}, \dots, z_i^{p^r}, y^{p^r}) \subseteq kK^{p^r},$$

sowie

$$kK^{p^r} = kK^{p^{r+v}}(z_1^{p^r}, \dots, z_i^{p^r}) \quad \text{für alle } v \geq 0.$$

Nun gibt es ein $s \geq 0$ mit $K^{p^s} \subseteq K_0$, also erhält man

$$kK^{p^r} = kK^{p^{r+s}}(z_1^{p^r}, \dots, z_i^{p^r}) \subseteq kK_0^{p^r}$$

und damit

$$kK_0^{p^i} = kK^{p^i} \quad \text{für alle } i \geq r = \text{inex}(K/k).$$

Nach der Konstruktion von K_0 gilt

$$[kK_0^{p^i} : kK_0^{p^{i+1}}] = p^t \quad \text{für alle } i \geq 0,$$

und man erhält daraus wie in den Überlegungen zur Formel (*):

$$[K_0 : kK^{p^r}] = p^{rt} \quad \text{also} \quad [K : K_0] = p^c \quad \text{mit} \quad c = \sum_{i=0}^{r-1} \text{insep}_i(K/k).$$

Damit ist die Behauptung a) und eine Richtung der Behauptung b) bewiesen.

Sei nun umgekehrt K_0 ein optimaler separabler Zwischenkörper von K/k :

$$[K : K_0] = [K : k]_i = p^c \quad \text{mit} \quad c = \sum_{i=0}^{r-1} \text{insep}_i(K/k).$$

Dann gilt für alle $i \geq 0$

$$[kK_0^{p^i} : k]_p = t = [K : k]_t,$$

also nach Voraussetzung

$$[K : kK_0^{p^r}] = p^{c+rt}.$$

Nun gilt

$$c + rt = \sum_{i=0}^{r-1} (\text{insep}_i(K/k) + t)$$

und daher

$$p^{c+rt} = [K : kK^{p^r}],$$

also

$$[K : kK_0^{p^r}] = [K : kK^{p^r}].$$

Daraus erhält man wegen $kK_0^{p^r} \subseteq kK_0^{p^r} : kK^{p^r} = kK_0^{p^r}$, also auch $kK^{p^{r+s}} = kK_0^{p^{r+s}}$ für alle $s \geq 0$.

Da K_0/k separabel erzeugt ist, gilt für eine beliebige separierende Transzendenzbasis von K_0/k : $kK_0^{p^r} = kK_0^{p^{r+1}}(z_1^{p^r}, \dots, z_t^{p^r})$, also nach obigem auch $kK^{p^r} = kK^{p^{r+1}}(\{z_i^{p^r}\})$. Nach Definition ist daher $\{z_1, \dots, z_t\}$ ausgezeichnete Transzendenzbasis von K/k , und die Behauptung ist damit bewiesen.

Folgerung: Ist K/k endlich erzeugt, so gibt es eine Körperkette

$$k \subseteq K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n = K$$

mit folgenden Eigenschaften:

- 1) K_0 ist optimaler separabler Zwischenkörper von K/k .
- 2) K_i ist einfach über $K_{i-1}:K_i = K_{i-1}(x_i)$ wobei die irreduzible Gleichung von x_i folgende Form hat:

$$X^{p^e} - a_i \quad \text{mit} \quad a_i \in kK_{i-1}^{p^e}.$$

- 3) Ist $\{z_1, \dots, z_t\}$ eine separierende Transzendenzbasis von K_0/k , so bildet $\{z_1, \dots, z_t, x_1, \dots, x_n\}$ eine p -Basis von K/k ; insbesondere gilt: $n = \text{insep}(K/k)$.

Beweis: Sei $\{z_1, \dots, z_t\}$ eine ausgezeichnete Transzendenzbasis von K/k . Diese lässt sich dann sukzessive durch Elemente $x_1, \dots, x_n \in K$ zu einer p -Basis von K/k derart ergänzen, dass für geeignete s_v

$$\{z_1^{p^{s_v}}, \dots, z_t^{p^{s_v}}, x_1^{p^{s_v}}, \dots, x_{s_v}^{p^{s_v}}\}$$

eine p -Basis von $kK^{p^{s_v}}$ ist. Es gilt dann: $s_v = \text{insep}_v(K/k)$ und insbesondere $s_r = 0$ mit $r = \text{inex}(K/k)$. Nehmen wir für K_0 die separable Hülle von $k(z_1, \dots, z_t)$ in K und definieren rekursiv $K_i = K_{i-1}(x_i)$ $i = 1, \dots, n$, so erfüllt diese Körperkette obige Behauptungen:

Behauptung 1) ist richtig nach Satz III, Behauptung 3) nach Konstruktion;

Behauptung 2): Sei i fest, $0 < i \leq n$; dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $v = v_i$ mit $s_v < i \leq s_{v-1}$ und es gilt: $x_i^{p^v}$ ist p -abhängig von $\{z_1^{p^{s_v}}, \dots, z_t^{p^{s_v}}, x_1^{p^{s_v}}, \dots, x_{s_v}^{p^{s_v}}\}$ in $kK^{p^{s_v}}$ über k . Daraus erhält man, dass $x_i^{p^v} \in kK_{i-1}^{p^v}$, und wir müssen noch zeigen, dass $[K_i:K_{i-1}] = p^v$ ist. Aus obigem folgt

$$[K_i:K_{i-1}] \leq p^{v_i}, \quad \text{also} \quad [K:K_0] \leq p \sum_{i=1}^n v_i,$$

und es gilt

$$\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{v=1}^r (s_{v-1} - s_v) v = \sum_{v=0}^{r-1} s_v = \text{inor}(K/k).$$

In allen Ungleichungen steht daher das Gleichheitszeichen und die Behauptung ist damit bewiesen.

Anmerkung: Die oben konstruierte Körperkette steht in einem direkten Zusam-

menhang mit der Struktur des Differentialmoduls $M(K/k)$. Es gilt nämlich mit obigen Bezeichnungen folgendes:

$$M(K_0/k) = \bigoplus_{i=1}^t K_0 dz_i$$

$$M(K_i/k) = \left(K_i \otimes_{K_{i-1}} M(K_{i-1}/k) \right) \oplus K_i dx_i$$

Der Beweis ergibt sich aus einem Satz über das Verhalten des Differentialmoduls bei Ringerweiterung und beruht in unserem Falle auf der speziellen Gestalt des irreduziblen Polynoms von x_i (vgl. [4] I. Satz 3).

§ 4. Die Monotoniebedingung für die Inseparabilitätskonstanten

In diesem Abschnitt soll bewiesen werden, dass die Inseparabilitätskonstanten im wesentlichen nur der Monotoniebedingung von Satz II unterliegen. Wir wollen nämlich zeigen, dass es zu jedem Körper k und zu jeder monoton fallenden Folge von nicht negativen ganzen Zahlen $n_0 \geq n_1 \geq \dots \geq n_r = 0 \dots$ die von einer Stelle an aus lauter Nullen besteht, eine endlich erzeugte Körpererweiterung K von k gibt derart, dass die Inseparabilitätskonstante der Ordnung i von K/k gleich n_i ist. Dabei muss man folgende Einschränkung machen: Ist $[k:k^p] = p^n$, so ist die Zahl n eine obere Schranke für die Inseparabilitätskonstanten.

Wie man leicht sieht, genügt es, für obige Behauptung folgendes nachzuweisen: Ist K/k endlich erzeugt, $i_0 > 0$ eine beliebige natürliche Zahl, so gibt es eine endlich algebraische Erweiterung K' von K mit

$$\text{insep}_i(K'/k) = \text{insep}_i(K/k) \quad \text{für } i \geq i_0 \quad \text{und}$$

$$\text{insep}_i(K'/k) = \text{insep}_i(k/K) + 1 \quad \text{für } i < i_0.$$

Wir beweisen zuerst folgendes Lemma:

LEMMA 3: *Ist K/k endlich erzeugt, $K' = K(x)$ eine rein inseparable Erweiterung von K mit*

$$x^{p^{i_0}} \in kK^{p^{i_0}} - K^p,$$

so gilt

$$\text{insep}_i(K'/k) - \text{insep}_i(K/k) = \begin{cases} 1 & \text{für } i < i_0 \\ 0 & \text{für } i \geq i_0 \end{cases}$$

Beweis: Aus der Voraussetzung folgt $x^{p^i} \in kK^{p^i}$ für alle $i \geq i_0$ und $x^{p^{i_0}} \notin kK^{p^i}$ für alle $i < i_0$, also $[kK'^{p^i} : kK^{p^i}]_p = \max(i_0 - i, 0)$. Aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} kK'^{p^{i+1}} & - & kK'^{p^i} \\ | & & | \\ kK^{p^{i+1}} & - & kK^{p^i} \end{array}$$

entnimmt man sofort

$$[kK'^{p^i} : kK'^{p^{i+1}}] \cdot [kK'^{p^{i+1}} : kK'^{p^{i+2}}] = [kK'^{p^i} : kK'^{p^{i+1}}] \cdot [kK'^{p^{i+1}} : kK'^{p^{i+2}}],$$

und damit

$$\begin{aligned} \text{insep}_i(K'/k) - \text{insep}_i(K/k) &= \\ &= [kK'^{p^i} : k]_p - [kK^{p^i} : k]_p = \max(i_0 - i, 0) - \max(i_0 - i - 1, 0) = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } i < i_0 \\ 0 & \text{für } i \geq i_0 \end{cases} \text{ also die Behauptung.} \end{aligned}$$

Ist nun $kK^{p^{i_0}} - K^p \neq \emptyset$, so kann man eine p^{i_0} -te Wurzel eines Elementes $y \in kK^{p^{i_0}} - K^p$ an K adjungieren und erhält damit eine gesuchte Erweiterung, wie sie zu Beginn des Paragraphen beschrieben wurde.

Ist aber $kK^{p^i} - K^p = \emptyset$ für ein $i > 0$, so folgt daraus $k \subseteq K^p$ und damit $[k : k^p] < \infty$, da K^p über k^p endlich erzeugt ist. Wir erhalten daher folgenden Satz:

SATZ IVa: *Ist $[k : k^p] = \infty$, so gibt es zu jeder monoton fallenden Zahlenfolge*

$$n_0 \geq n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r = n_{r+v} = 0 \quad \text{für alle } v \geq 0$$

eine endlich erzeugte Körpererweiterung K von k mit

$$\text{insep}_i(K/k) = n_i \quad \text{für alle } i \geq 0.$$

Dabei kann man den Transzendenzgrad $t = [K : k]_t$ beliebig vorgeben.

Ist nun $[k : k^p] < \infty$, so gilt für eine beliebige endlich algebraische Erweiterung K' von K : $[K' : K] = [K'^p : K^p]$, also auch $[K' : K^p]_p = [K : K^p]_p$. Damit erhält man

$$\text{insep}(K'/k) + [kK'^p : K^p]_p = \text{insep}(K/k) + [kK^p : K^p]_p \quad (*)$$

und diese Formel ist auch richtig für rein transzendente Erweiterungen K' von K wegen Lemma 1 Folgerung 4). Obige Summe ist also eine nur von k abhängige Konstante, deren Wert man erhält, wenn man in (*) $K = k$ setzt:

LEMMA 4: *Ist $[k : k^p] < \infty$, K/k endlich erzeugt, so gilt*

$$\text{insep}(K/k) + [kK^p : K^p]_p = [k : k^p]_p$$

oder

$$[K : K^p]_p = [k : k^p]_p + [K : k]_t;$$

insbesondere erhält man

$$\text{insep}_i(K/k) \leq [k : k^p]_p \quad \text{für alle } i \geq 0.$$

Damit können wir den Satz IVa entsprechenden Satz für den Fall $[k:k^p] < \infty$ beweisen:

SATZ IVb: *Ist $[k:k^p] < \infty$, so gibt es zu jeder monoton fallenden Zahlenfolge $[k:k^p]_p \geq n_0 \geq n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r = n_{r+v} = 0$ für $v \geq 0$ eine endlich erzeugte Körpererweiterung K von k mit*

$$\text{insep}_i(K/k) = n_i \quad \text{für alle } i \geq 0.$$

Dabei kann man den Transzendenzgrad $t = [K:k]_t$ beliebig vorgeben.

Beweis: Wie zu Beginn des Paragraphen genügt es auch hier, folgendes zu zeigen: Ist $\text{insep}(K/k) < [k:k^p]_p$, so gibt es zu jeder Zahl $i_0 > 0$ eine endlich erzeugte Körpererweiterung K' von K mit

$$\text{insep}_i(K'/k) - \text{insep}_i(K/k) = \begin{cases} 1 & \text{für } i < i_0 \\ 0 & \text{für } i \geq i_0 \end{cases}.$$

Diese Erweiterung erhält man aber sofort aus dem Lemma 4, denn $\text{insep}(K/k) < [k:k^p]_p$ bedeutet gerade, dass $[kK^{p^{i_0}}:K^p]_p > 0$ ist, dass also $kK^{p^{i_0}} - K^p \neq \emptyset$ für alle $i_0 > 0$, womit wie bei Satz IVa die Behauptung folgt.

LITERATUR

- [1] ZARISKI-SAMUEL, *Commutative Algebra* (D. van Nostrand Company, Inc. 1965).
- [2] A. WEIL, *Foundation of Algebraic Geometry*, AMS Colloquim Publications Vol. XXIX 1946.
- [3] R. BERGER, *Differentiale höherer Ordnung und Körpererweiterungen bei Primzahlcharakteristik*, Sitzungsbericht der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, 3. Abhandlung (1966).
- [4] R. BERGER, *Über verschiedene Differentenbegriffe*, Sitzungsbericht der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, 1. Abhandlung (1960).

Eingegangen den 22. April 1969