tauscht. Mit **C** erfüllt auch jede Funktorkategorie mit Werten in **C** die Distributivitätsbedingung.

3) Sei **C** wie in 1), $\pi = \Delta^0\mathbf{C}$ modulo Homotopie. Für eine Loop L in $\Delta^0\mathbf{C}$ und ein beliebiges Objekt Z in $\Delta^0\mathbf{C}$ gilt: $\pi(\sum Z, L)$ ist eine abelsche Gruppe mit der von L induzierten Multiplikation. Die Kommutativität folgt aus Satz 1.2 und die Assoziativität beweist man mit einer ähnlichen Homotopie wie in 1.2. Diese Bemerkung zeigt, daß $\sum Z$ gewisse Eigenschaften mit einem komultiplikativen Objekt gemeinsam hat, obwohl es i. allg. (auch für $\mathbf{C} = .\mathbf{S}$) keine Komultiplikation in π besitzt.

2. Anwendungen

Ist L eine Loop mit $a, b, c \in L$, so wird der Kommutator $[a, b]$ bzw. der Assoziator $[a, b, c]$ durch $ab = (ba)\,[a, b]$ bzw. $(ab)\,c = a(bc)\,[a, b, c]$ definiert.

2.1 LEMMA: *G sei eine punktierte Kanmenge* ([3] IV.3.1.) *und $\bar{\mu} \in \pi(G \times G, G)$ definiere auf G eine H-Struktur in $\overline{\Delta^0.\mathbf{S}}$. Dann gibt es in der Homotopieklasse $\bar{\mu}$ einen Repräsentanten μ_0, sodaß (G, μ_0) H-Objekt in $\Delta^0.\mathbf{S}$ ist.*

Beweis: Sei $\mu \in \Delta^0.\mathbf{S}(G \times G, G)$ ein Repräsentant von $\bar{\mu}$. Da G Kanmenge und $\bar{\mu}$ H-Struktur ist, gibt es eine punktierte Homotopie $\phi: I \times (G \vee G) \to G$ mit $\phi_{(1)} = \mu k$ und $\phi_{(0)} = \nabla$, wobei $k := \langle\{1, 0\}, \{0, 1\}\rangle: G \vee G \to G \times G$ und $\nabla = \langle 1, 1\rangle: G \vee G \to G$ ist. Zu der Inklusion $i: I \times (G \vee G) \cup \{1\} \times (G \times G) \to I \times (G \times G)$ gibt es $\psi: I \times (G \times G) \to G$ mit $\psi i = \phi \cup \mu'$ (da G Kanmenge ist). Dabei ist $\{1\} \subset I$ von $(1) \in I_0$ erzeugt und $\mu = \mu' in_{(1)}$. Mit $\mu_0 = \psi_{(0)}$ gilt $\bar{\mu} = \bar{\mu}_0$ und (G, μ_0) ist H-Objekt in $\Delta^0.\mathbf{S}$.

2.2 SATZ: *G sei Loop in $\overline{\Delta^0.\mathbf{S}}$, H sei Loop in $\Delta^0.\mathbf{S}$ und G oder H seien Kanmengen. Dann gilt für $f \in \pi(G, H)$, $X_i \in \Delta^0.\mathbf{S}$ und $y_i \in \pi(\sum X_i, G)$, $1 \leqslant i \leqslant 3$:*

(1) $f_*(x_1 x_2) = f_*(x_2 x_1) f_*[x_1, x_2]$

(2) $f_*((x_1 x_2) x_3) = f_*(x_1(x_2 x_3)) f_*[x_1, x_2, x_3]$,

wobei $x_i := y_i pr_i \in \pi(X, G)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $X := \prod_{i=1}^n \sum X_i$ und $f_* = \pi(X, f)$ mit $n = 2$ in (1) *und $n = 3$ in* (2) *gilt.*

Beweis: 1. Fall: G ist Kanmenge. Nach Lemma 2.1 besitzt die Loopmultiplikation von G einen Repräsentanten μ, sodaß (G, μ) H-Objekt in $\Delta^0.\mathbf{S}$ ist. Die Behauptung folgt dann unmittelbar aus Satz 1.2 und 1.3.

2. Fall: H ist Kanmenge. Sei $-_K: \overline{\Delta^0.\mathbf{S}} \to \overline{\Delta^0.\mathbf{S}}$ der Funktor der Kanschen Hülle und sei $e(Z): Z \to Z_K$ die Kansche Hülle von Z ([3] IV.4.4). Da $-_K$ endliche Produkte erhält ([3] IV.4.3), trägt G_K eine Loopstruktur. Da $e(-)$ eine natürliche Transformation ist, gilt $f_K \overline{e(G)} = \overline{e(H)} f$ und $\overline{e(G)}$ ist Loopmorphismus. Außerdem ist $\overline{e(H)}$ invertierbar, da H Kanmenge ist; sei $\bar{g} := \overline{e(H)}^{-1} f_K$. Wegen $\pi(-, f) = \pi(-, \bar{g}) \times$

$\times\pi(-, \overline{e(G)})$ und da $\pi(-, \overline{e(G)})$ Loophomomorphismus ist, folgt die Behauptung nach dem 1. Fall.

2.3 DEFINITION: 1) Sei (G, e) eine punktierte simpliziale Menge und ZG die von G erzeugte freie abelsche simpliziale Gruppe mit Nullelement 0. Die *Hurewiczabbildung* $\varphi \in \Delta^0.S((G, e), (ZG, 0))$ sei durch $\varphi(g) := g - e$ definiert, wobei $g \in G_p$ und $p \geqslant 0$ ist.

2) Sei (G, e) ein Objekt mit Multiplikation $n: G \times G \to G$ in $\Delta^0.S$. Für Y_i in $\Delta^0.S$ und $y_i \in \pi(Y_i, ZG)$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, sei $y_1 y_2 := m \circ (y_1 \wedge y_2) \in \pi(Y_1 \wedge Y_2, ZG)$, wobei $m \in \pi(ZG \wedge ZG, ZG)$ die Homotopieklasse der Ringmultiplikation von ZG ist (die Multiplikation in ZG ist von der gegebenen Multiplikation n auf G induziert). Das so definierte Produkt $\pi(Y_1, ZG) \times \pi(Y_2, ZG) \to \pi(Y_1 \wedge Y_2, ZG)$ heißt *Pontryaginprodukt.*

3) Sei (G, e) Kanmenge und Loop in $\overline{\Delta^0.S}$. Für $Y_i \in \Delta^0.S$ und $y_i \in \pi(Y_i, G)$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, sei $\langle y_1, y_2 \rangle \in \pi(Y_1 \wedge Y_2, G)$ durch $\pi(p, G)\langle y_1, y_2\rangle = [y_1 pr_1, y_2 pr_2]$ (mit den Projektionen $p: Y_1 \times Y_2 \to Y_1 \wedge Y_2$ und $pr_i: Y_1 \times Y_2 \to Y_i$) definiert. Das so definierte Produkt $\pi(Y_1, G) \times \pi(Y_2, G) \to \pi(Y_1 \wedge Y_2, G)$ heißt *Samelsonprodukt.*

Aus der Exaktheit der Puppefolge (s. [3] VI.2) folgt für $Y_1, Y_2 \in \Delta^0.S$ mit $k = \langle \{1, 0\}, \{0, 1\} \rangle: Y_1 \vee Y_2 \to Y_1 \times Y_2$:
$e \to \pi(Y_1 \wedge Y_2, G) \xrightarrow{\pi(p, G)} \pi(Y_1 \times Y_2, G) \xrightarrow{\pi(k, G)} \pi(Y_1 \vee Y_2, G) \to e$ ist exakt. Deshalb ist $\langle y_1, y_2\rangle$ in 3) sinnvoll definiert (s.a. [1] 8).

2.4 LEMMA: *Sei (G, e) Loop in $\overline{\Delta^0.S}$ und $\varphi: (G, e) \to (ZG, 0)$ die Hurewiczabbildung. Mit den Bezeichnungen von Satz 2.2 gilt:*

(1) $\varphi_*[x_1, x_2] = [\varphi_*(x_1), \varphi_*(x_2)] := \varphi_*(x_1)\,\varphi_*(x_2) - \varphi_*(x_2)\,\varphi_*(x_1)$

(2) $\varphi_*[x_1, x_2, x_3] = [\varphi_*(x_1), \varphi_*(x_2), \varphi_*(x_3)] := (\varphi_*(x_1)\,\varphi_*(x_2))\,\varphi_*(x_3) -$
$- \varphi_*(x_1)\,(\varphi_*(x_2)\,\varphi_*(x_3))$.

Auf den rechten Seiten von (1), (2) *steht das von der Ringmultiplikation von ZG induzierte Produkt.*

Beweis: Satz 2.2 läßt sich mit $f = \varphi$ anwenden, da ZG als simpliziale Gruppe Kanmenge ist. Zu zeigen ist nur noch
$[\varphi_*(x_1), \varphi_*(x_2)] = \varphi_*(x_1 x_2) - \varphi_*(x_2 x_1)$ und
$[\varphi_*(x_1), \varphi_*(x_2), \varphi_*(x_3)] = \varphi_*((x_1 x_2)\,x_3) - \varphi_*(x_1\,(x_2 x_3))$.
Da e für G zweiseitiges Einselement modulo Homotopie ist, folgt die Behauptung nach Definition von φ durch distributives Rechnen.

2.5 *Bemerkung:* 1) Bezieht man die Gleichung (1) in 2.4 auf die Teilmenge $\pi(\sum X_1 \wedge \sum X_2, G)$ von $\pi(\sum X_1 \times \sum X_2, G)$, so folgt mit dem Samelson- und Pontryaginprodukt nach 2.3: $\varphi_*\langle y_1, y_2\rangle = \varphi_*(y_1)\;\varphi_*(y_2) - (\varphi_*(y_2)\;\varphi_*(y_1)) \circ \tau$, wobei $\tau: \sum X_1 \wedge \sum X_2 \to \sum X_2 \wedge \sum X_1$ die Vertauschung ist und $y_i \in \pi(\sum X_i, G)$.

2) Mit Hilfe der adjungierten Funktoren geometrische Realisierung, singulärer Komplex läßt sich 2.4 auf topologische Räume übertragen.

3) Analog zu dem Kommutatorprodukt in 2.3 ist ein *Assoziatorprodukt* $\langle y_1, y_2, y_3\rangle \in \pi(Y_1 \wedge Y_2 \wedge Y_3, G)$ für $y_i \in \pi(Y_i, G)$ erklärt. Wegen einer ähnlichen Überlegung wie in 2.3 (unter Verwendung von 1.21 und 1.22 in [2]) ist $\langle , , \rangle$ wohldefiniert.

Im folgenden Korollar wird der Spezialfall der Homotopiegruppen betrachtet; dabei wird $\wedge_p S \wedge \wedge_q S$ mit $\wedge_{p+q} S$, $S =$ 1-Sphäre, identifiziert.

2.6. KOROLLAR: *Sei G Loop in $\overline{\text{Top}}$. Dann gilt für den Hurewiczhomomorphismus $\varphi_n: \pi_n(G) \to H_n(G)$, $n \geqslant 1$, und für $\alpha \in \pi_p(G)$, $\beta \in \pi_q(G)$, $\gamma \in \pi_r(G)$ $(p, q, r \geqslant 1)$:*
(1) $\varphi_{p+q}\langle\alpha, \beta\rangle = \varphi_p(\alpha)\,\varphi_q(\beta) - (-1)^{pq}\,\varphi_q(\beta)\,\varphi_p(\alpha)$
(2) $\varphi_{p+q+r}\langle\alpha, \beta, \gamma\rangle = (\varphi_p(\alpha)\,\varphi_q(\beta))\,\varphi_r(\gamma) - \varphi_p(\alpha)\,(\varphi_q(\beta)\,\varphi_r(\gamma))$.

Beweis: Mit $X_1 = \wedge_{p-1}\Omega$, $X_2 = \wedge_{q-1}\Omega$, $X_3 = \wedge_{r-1}\Omega$ und $y_1 = \alpha$, $y_2 = \beta$, $y_3 = \gamma$ folgt die Behauptung aus 2.4. Denn bei dem Isomorphismus $\pi(\wedge_n \Omega, SG) \cong$ $\cong \pi(\wedge_n |\Omega|, G) \cong \pi_n(G)$ werden die topologischen und simplizialen Assoziator- bzw. Kommutatorprodukte ineinander übergeführt. SG ist Loop in $\overline{\Delta^0.\mathrm{S}}$, da S rechtsadjungiert ist. Das Pontryaginprodukt wird üblicherweise (vgl. [6] § 30) über die Shuffle-Abbildung SH definiert. Das Pontryaginprodukt nach 2.3 erhält man durch Komposition von SM: $\pi(\wedge_p \Omega, ZSG) \times \pi(\wedge_q \Omega, ZSG) \to \pi(\wedge_{p+q} \Omega, ZSG \otimes ZSG)$ mit der Ringmultiplikation; analog ergibt sich das Pontryaginprodukt nach [6] über SH und dieselbe Ringmultiplikation (SM und SH sind in 2.7 definiert). Aus Satz 2.8 folgt dann, daß die beiden Pontryaginprodukte bis auf einen natürlichen Isomorphismus übereinstimmen. Das Vorzeichen $(-1)^{pq}$ ergibt sich wegen der Vertauschung $\tau: \wedge_p \Omega \wedge \wedge_q \Omega \to \wedge_q \Omega \wedge \wedge_p \Omega$. Denn nach der expliziten Beschreibung von ζ in Satz 2.8 gilt für eine beliebige simpliziale abelsche Gruppe A und $f \in \Delta^0.\mathrm{S}(\wedge_{p+q}\Omega, A)$: $\zeta_{p+q}(f) = (-1)^{pq}\zeta_{p+q}(f\tau)$.

2.7 DEFINITION: Seien A, B simpliziale abelsche Gruppen und $p, q \geqslant 1$.
1) $SM: \pi(\wedge_p \Omega, A) \times \pi(\wedge_q \Omega, B) \to \pi(\wedge_{p+q} \Omega, A \otimes B)$ werde für $\bar{a} \in \pi(\wedge_p \Omega, A)$, $\bar{b} \in \pi(\wedge_q \Omega, B)$ als Homotopieklasse der Abbildung $sm: \wedge_{p+q} \Omega_k \to A_k \otimes B_k$ mit $sm(r_1, \dots, r_p, t_1, \dots, t_q) := a(r_1, \dots, r_p) \otimes b(t_1, \dots, t_q)$, $k \geqslant 0$, definiert.
2) $SH: H_p(NA) \times H_q(NB) \to H_{p+q}(N(A \otimes B))$ sei von der Shuffle-Abbildung (vgl. [5] V.5.8) $sh: (NA)_p \times (NB)_q \to (N(A \otimes B))_{p+q}$ induziert. Hierbei ist N die Mooresche Normalisierung.

2.8. SATZ: *Seien A, B simpliziale abelsche Gruppen.*

(1) *Es gibt einen Isomorphismus ζ_n zwischen den Funktoren $\pi(\wedge_n \Omega, -)$, $H_n(N-): \Delta^0\mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$, der für $\bar{a} \in \pi(\wedge_n \Omega, A)$ explizit durch $\zeta_n(\bar{a}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_n(e_{\sigma(n-1)}, \dots, e_{\sigma(0)})$ gegeben wird (ε_σ ist das Vorzeichen der Permutation σ und S_n ist die Menge aller Permutationen von n Elementen).*

(2) *Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \pi(\bigwedge_p \Omega, A) \times \pi(\bigwedge_q \Omega, B) & \xrightarrow{SM} & \pi(\bigwedge_{p+q} \Omega, A \otimes B) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \zeta p \times \zeta q} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \zeta p+q} \\ H_p(NA) \times H_q(NB) & \xrightarrow{SH} & H_{p+q}(N(A \otimes B)) \end{array}$$

ist für $p, q \geqslant 1$ kommutativ.

(Die Elemente $e_i = e_i^n \in \Omega_n$ sind in 1.1 *definiert).*

Beweis: Gabriel-Zisman geben in [3] VI.3 einen Isomorphismus in der Homotopiekategorie $\mathscr{H}$ zwischen $\bigwedge_n \Omega$ und $\Delta[n]/\dot{\Delta}[n]$ an. Dieser Isomorphismus induziert in $\pi = \overline{\Delta^0.S}$ einen Isomorphismus $\pi(\bigwedge_n \Omega, K) \cong \pi(\Delta[n]/\dot{\Delta}[n], K)$, falls K Kanmenge ist. Im Falle des Satzes 2.8 ist $K = A$ sogar eine simpliziale abelsche Gruppe und die Isomorphie ist explizit beschreibbar, da die Kansche Bedingung für simpliziale Gruppen auf konstruktive Weise erfüllt wird. Damit läßt sich (1) beweisen und (2) folgt durch eine einfache Rechnung aus (1).

Wie der Referent mir mitteilte, erhält man die Kommutativität des Diagramms in (2) mit einem Isomorphismus ζ auch auf anderem Weg mittels geometrischer Realisierung.

LITERATUR

[1] Dold, A., *Halbexakte Homotopiefunktoren* (Springer Verlag, 1966 [Lecture Notes in Mathematics 12]).

[2] Eckmann, B. and Hilton, P. J., *A natural transformation in homotopy theory and a theorem of G. W. Whitehead*, Math. Z. *82* (1963), 115–124.

[3] Gabriel, P. and Zisman, M., *Calculus of Fractions and Homotopy Theory* (Springer Verlag, 1967).

[4] Kan, D. M., *On the homotopy relation for c.s.s maps*, Bol. Soc. Math. Mexicana (1957), 75–81.

[5] Lamotke, K., *Semisimpliziale algebraische Topologie* (Springer Verlag, 1968).

[6] May, J. P., *Simplicial Objects in Algebraic Topology* (van Nostrand Mathematical Studies, 1967).

[7] Samelson, H., *A connection between the Whitehead and the Pontryagin product*, Amer. J. Math. *75* (1953), 744–752.

Universität München
Mathematisches Institut

Eingegangen den 25. Juli 1970