

# Holomorphe Blätterungen komplexer Räume

Autor(en): **Holmann, Harald**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **47 (1972)**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-36359>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Holomorphe Blätterungen komplexer Räume<sup>1)</sup>

VON HARALD HOLMANN (Freiburg, Schweiz)

Herrn Professor Dr. Karl Stein zum 60. Geburtstag gewidmet

### Einleitung

Für einen reduzierten komplexen Raum  $X$  mit einer komplexen Lieschen Transformationsgruppe  $L$  gelten die folgenden Aussagen (siehe [6], Satz 6 und Satz 15):

Eine  $L$ -Bahn ist genau dann eine komplexe Untermannigfaltigkeit von  $X$ , wenn sie in  $X$  abgeschlossen ist.

Der Bahnenraum  $X/L$  besitzt genau dann eine „kanonische“ komplexe Struktur, wenn er hausdorffsch ist.

In der vorliegenden Arbeit sollen diese Resultate auf holomorphe Blätterungen komplexer Räume übertragen werden.

Eine holomorphe Blätterung eines komplexen Raumes  $X$  lässt sich als ein System paarweise holomorph verträglicher lokaler holomorpher Blätterungen beschreiben (vergleiche die Definitionen 2.1., 2.2., 2.3). Dabei versteht man unter einer lokalen holomorphen Blätterung von  $X$  eine lokal-einfache, einfache, offene, holomorphe Abbildung  $T: U \rightarrow V$  einer offenen Menge  $U \subset X$  auf einen komplexen Raum  $V$ .

Die Fasern von  $T: U \rightarrow V$  bilden eine Zerlegung von  $U$  in zusammenhängende analytische Mengen, die man mit der durch  $T$  induzierten komplexen Struktur versehen kann. Zwei holomorph verträgliche lokale holomorphe Blätterungen  $T_i: U_i \rightarrow V_i$ ,  $i=1, 2$ , liefern die gleiche analytische Zerlegung von  $U_1 \cap U_2$ . Das führt auf den Begriff des globalen Blattes und des Blätterraumes einer holomorphen Blätterung (vergleiche Definition 2.5).

Betrachtet man ein integrables Pfaffsches System holomorpher partieller Differentialgleichungen auf einem komplexen Raum  $X$ , dann induziert dieses eine holomorphe Blätterung  $\mathfrak{B}$  auf  $X$ , so dass die maximalen zusammenhängenden Lösungsflächen gerade die Blätter von  $\mathfrak{B}$  sind (vergleiche die Definitionen 1.1, 1.3 und Satz 2.4).

In der Differentialtopologie verwendet man den Begriff der holomorphen (oder differenzierbaren) Blätterung in viel eingeschränkterem Sinne (vergl. [17]). Man beschränkt sich auf komplexe Mannigfaltigkeiten und eine lokale Blätterung einer Mannigfaltigkeit  $X$  ist definiert als eine Submersion  $T: U \rightarrow V$  einer offenen Teilmenge  $U \subset X$  auf eine Mannigfaltigkeit  $V$  (d.h.  $T$  ist in geeigneten lokalen Koordinaten eine

---

<sup>1)</sup> Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit wurden auf den 6. Rolf Nevanlinna-Kolloquium in Zürich (18./19. Juni 1971) vorgetragen.

Projektion eines Produktes zweier Polyzylinder auf eine Komponente). Ein Pfaffsches System partieller Differentialgleichungen liefert natürlich nur dann eine Blätterung in diesem Sinne, wenn alle Lösungsflächen singularitätenfrei sind und lokal eine triviale Faserung erzeugen. Will man auch Lösungsflächen mit Singularitäten zulassen, so erweist sich die obige Verallgemeinerung des Begriffes der holomorphen Blätterung als sinnvoll. Ausserdem sind die Resultate, die in dieser Arbeit dargestellt werden sollen, für die speziellen „regulären“ Blätterungen nicht einfacher zu erhalten. Auch lässt es sich gar nicht vermeiden, allgemeine komplexe Räume in die Untersuchungen mit einzubeziehen. Wenn zum Beispiel der Blätterraum einer regulären Blätterung einer komplexen Mannigfaltigkeit eine kanonische komplexe Struktur besitzt, so hat diese in allgemeinen Singularitäten (siehe das Beispiel am Ende der vorliegenden Arbeit). Erst unter zusätzlichen Regularitätsbedingungen erhält man Blätterräume mit Mannigfaltigkeitsstruktur (man vergleiche die Untersuchungen von R. Palais in [11]).

Die Hauptresultate der vorliegenden Arbeit sind die beiden folgenden: (siehe die Sätze 3.1. und 3.4):

$\mathfrak{B}$  sei eine holomorphe Blätterung eines parakompakten komplexen Raumes  $X$ , dann gilt:

I. Ein Blatt von  $\mathfrak{B}$  ist genau dann (lokal-)analytisch, wenn es (lokal-)abgeschlossen in  $X$  ist.

II. Ist  $X$  reduziert, so besitzt der Blätterraum von  $\mathfrak{B}$  genau dann eine „kanonische“ komplexe Struktur, wenn er hausdorffsch ist.

Diese Aussagen gestatten eine spezielle Interpretation, wenn man sie auf die Blätterungen anwendet, die durch Pfaffsche Systeme holomorpher partieller Differentialgleichungen bzw. durch komplexe Liesche Transformationsgruppen erzeugt werden (siehe die Sätze 3.6 und 3.7).

## § 1. Pfaffsche Systeme partieller Differentialgleichungen auf komplexen Räumen

1.1. Es sei  $X$  ein komplexer Raum im Sinne von Grauert (siehe [4]). Seine Strukturgarbe werde mit  $\mathcal{O}_X$  bezeichnet. Man hat über  $X$  die  $\mathcal{O}_X$ -Modulgarben  $\Omega_X^p$  der holomorphen Differentialformen vom Grade  $p$ , so wie die  $\mathcal{O}_X$ -Algebra  $\Omega_X := \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Omega_X^p$  (vergleiche [5], [12]).  $\Omega_X^1$  heisst auch Garbe der holomorphen Pfaffschen Formen auf  $X$ . Lokal ist  $\Omega_X$  wie folgt definiert. Jeder Punkt  $x \in X$  besitzt eine offene Umgebung  $U$ , die mit einer analytischen Teilmenge einer offenen Menge  $G \subset \mathbb{C}^n$  identifiziert werden kann. Dabei dürfen wir annehmen, dass es holomorphe Funktionen  $f_1, \dots, f_m$  auf  $G$  gibt, die eine kohärente Idealgarbe  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_G$  der Strukturgarbe  $\mathcal{O}_G$  von  $G$  erzeugen, so dass  $U = \{z \in G; f_1(z) = \dots = f_m(z) = 0\}$  ist und die Quotientengarbe  $\mathcal{O}_G/\mathcal{I}$  die Strukturgarbe  $\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_X|_U$  von  $U$  ergibt. (Da der Träger der Garbe  $\mathcal{O}_G/\mathcal{I}$  gleich  $U$  ist, so

können wir sie mit ihrer Beschränkung auf  $U$  identifizieren).  $\Omega_G := \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Omega_G^p$  bezeichne die bekannte  $\mathcal{O}_G$ -Algebragarbe der holomorphen Differentialformen auf  $G$ , wobei  $\Omega_G^p$  die  $\mathcal{O}_G$ -Modulgarben der holomorphen Differentialformen vom Grade  $p$  auf  $G$  sind.  $\mathcal{I}_U = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_U^p \subset \Omega_G$  sei die von  $f_1, \dots, f_m, df_1, \dots, df_m$  erzeugte Idealgarbe, wobei  $\mathcal{I}_U^p \subset \Omega_G^p$  für alle  $p \in \mathbb{N}$ . Es ist  $\mathcal{I}_U^0 = \mathcal{I}$  und  $\mathcal{I}_U^1$  wird von den holomorphen Pfaffschen Formen  $f_\mu dz_i (\mu = 1, \dots, m; i = 1, \dots, n)$  und  $df_\mu (\mu = 1, \dots, m)$  erzeugt. Wir können nun die Garben  $\Omega_U^p$  der holomorphen Differentialformen vom Grade  $p$  auf  $U$  wie folgt definieren:

$$\Omega_U^p := \Omega_G^p / \mathcal{I}_U^p, \quad p \in \mathbb{N}.$$

$$\Omega_U := \Omega_G / \mathcal{I}_U = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Omega_U^p$$

ist dann eine  $\mathcal{O}_U$ -Algebragarbe, die sogenannte Garbe der holomorphen Differentialformen auf  $U$ . Da der Träger der Garbe  $\Omega_U$  gleich  $U$  ist, so kann sie mit ihrer Beschränkung auf  $U$  identifiziert werden. Es sei bemerkt, dass  $\Omega_U$  nicht von der speziellen Einbettung  $U \subset G$  abhängt.

Da die äussere Ableitung  $d: \Omega_G \rightarrow \Omega_G$  die Idealgarbe  $\mathcal{I}_U \subset \Omega_G$  invariant lässt, so induziert sie eine eindeutig bestimmte äussere Ableitung  $d: \Omega_U \rightarrow \Omega_U$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_G & \xrightarrow{d} & \Omega_G \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \Omega_U & \xrightarrow{d} & \Omega_U \end{array}$$

Dabei bezeichnet  $\pi: \Omega_G \rightarrow \Omega_U := \Omega_G / \mathcal{I}_U$  die kanonische Quotientenabbildung.

Die Konstruktion der Garben holomorpher Differentialformen auf komplexen Räumen ist funktoriell. Es sei kurz dargestellt, wie die durch holomorphe Abbildungen zwischen komplexen Räumen induzierten Liftungsabbildungen zwischen den zugehörigen Garben holomorpher Differentialformen lokal aussehen. Sei  $(T, T^*): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  eine holomorphe Abbildung zwischen komplexen Räumen im Sinne von Grauert; d.h.  $T: X \rightarrow Y$  ist eine stetige Abbildung und  $T^* := \{T_x^*: \mathcal{O}_{Y, T(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}; x \in X\}$  ist eine Kollektion von Algebromorphismen, so dass jedem stetigen Schnitt  $f$  von  $\mathcal{O}_Y$  über einer offenen Menge  $U \subset Y$  durch die Vorschrift  $x \mapsto T_x^*(f(T(x)))$ ,  $x \in T^{-1}(U)$ , ein stetiger Schnitt von  $\mathcal{O}_X$  über  $T^{-1}(U)$  zugeordnet wird. Lokal lässt sich eine holomorphe Abbildung wie folgt beschreiben: Zu jedem  $x_0 \in X$  gibt es offene Teilmengen  $U \subset X$  und  $V \subset Y$ , so dass gilt:

a)  $x_0 \in U, T(U) \subset V$

b)  $U$  und  $V$  können mit analytischen Mengen von offenen Teilmengen  $G$  bzw.  $D$  komplexer Zahlenräume identifiziert werden, und ihre Strukturgarben  $\mathcal{O}_U$  bzw.  $\mathcal{O}_V$  sind Quotientengarben  $\mathcal{O}_G / \mathcal{I}$  bzw.  $\mathcal{O}_D / \mathcal{J}$  nach kohärenten Idealgarben  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_G$  bzw.  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_D$ .



c) Es gibt eine gewöhnliche holomorphe Abbildung  $H:G \rightarrow D$  mit  $H(x)=T(x)$  und  $H_x^*(\mathcal{I}_{T(x)}) \subset \mathcal{I}_x$  für alle  $x \in U$  ( $H_x^*: \mathcal{O}_{D, T(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{G, x}$  bezeichnet dabei die übliche durch  $H$  gegebene Liftungsabbildung), so dass  $H_x^*$  jeweils auf kanonische Weise die Abbildung

$$T_x^*: \mathcal{O}_{V, T(x)} := \mathcal{O}_{D, T(x)} / \mathcal{I}_{T(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{U, x} := \mathcal{O}_{G, x} / \mathcal{I}_x$$

induziert.

Sind nun  $\mathcal{I}_U \subset \Omega_G$  und  $\mathcal{I}_V \subset \Omega_D$  die wie oben durch  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_G$  und  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_D$  erzeugten Idealgarben der entsprechenden Garben holomorpher Differentialformen und bezeichnet  $H_x^*: \Omega_{D, T(x)} \rightarrow \Omega_{G, x}$ ,  $x \in U$ , die übliche durch  $H:G \rightarrow D$  gegebene Liftungsabbildung, so gilt für alle  $x \in G$ :

$$H_x^*(\mathcal{I}_{V, T(x)}) \subset \mathcal{I}_{U, x}.$$

Die Algebromorphismen  $H_x^*: \Omega_{D, T(x)} \rightarrow \Omega_{G, x}$ ,  $x \in U$ , induzieren also auf kanonische Weise Liftungsabbildungen

$$T_x^*: \Omega_{V, T(x)} := \Omega_{D, T(x)} / \mathcal{I}_{V, T(x)} \rightarrow \Omega_{U, x} := \Omega_{G, x} / \mathcal{I}_{U, x}.$$

Es sei bemerkt, dass die Algebromorphismen  $T_x^*$  nicht von den speziellen Einbettungen  $U \subset D$  und  $V \subset G$  abhängen. Nach Konstruktion sind die Liftungsabbildungen  $T_x^*: \Omega_{V, T(x)} \rightarrow \Omega_{U, x}$  mit den äusseren Ableitungen  $d$  von  $\Omega_V$  und  $\Omega_U$  verträglich.

**1.2.** Zur Motivierung der folgenden Definition eines Pfaffschen Systems holomorpher partieller Differentialgleichungen auf einem komplexen Raum betrachten wir den klassischen Fall eines Systems

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = f_{ij}(x, y), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad (*)$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_m),$$

partieller Differentialgleichungen erster Ordnung auf einem Gebiet  $D$  im  $\mathcal{C}^{n+m}$ , wobei die Funktionen  $f_{ij}$  auf  $D$  holomorph sind. Man kann dem System (\*) ein System

$$\omega_i := dy_i - \sum_{j=1}^n f_{ij} dx_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad (**)$$

holomorpher Pfaffscher Formen zuordnen. Gesucht ist dann zu jedem Punkt  $(x^0, y^0) \in D$  ein System  $H = (H_1, \dots, H_m)$  von lokalen holomorphen Stamfunktionen  $H_\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, m$ , auf einer offenen Umgebung  $U \subset D$  von  $(x^0, y^0)$ , so dass

$$dH_\mu = \sum_{i=1}^m M_{\mu i} \omega_i, \quad \mu = 1, \dots, m,$$

wobei  $M_{\mu i}$  auf  $U$  holomorphe Funktionen sind, und der Rang der Eulerschen Matrix

$(M_{\mu_i}(x, y))$  für alle  $(x, y) \in U$  gleich  $m$  ist. Die lokalen Lösungsflächen des Systems (\*) stimmen auf  $U$  gerade mit den gemeinsamen Konstanzflächen der lokalen Stammfunktionen  $H_1, \dots, H_m$  des Systems (\*\*) überein, d.h. mit den Niveauflächen (d.h. Zusammenhangskomponenten der Fasern) der Abbildung  $H = (H_1, \dots, H_m): U \rightarrow \mathbb{C}^m$ .  $H$  ist eine holomorphe Submersion, d.h. der Rang der Funktionalmatrix von  $H$  ist auf  $U$  konstant gleich  $m$ . Die Umgebung  $U$  von  $(x^0, y^0)$  kann so gewählt werden, dass sie zu einem Polyzylinder  $P$  im  $\mathbb{C}^{n+m}$  biholomorph äquivalent ist, wobei den Niveauflächen der Abbildung  $H: U \rightarrow \mathbb{C}^m$  im Polyzylinder  $P$  die  $n$ -dimensionalen Ebenenstücke  $\{(z_1, \dots, z_{n+m}) \in P; z_{n+1} = c_1, \dots, z_{n+m} = c_m\}$  entsprechen. Man bemerkt leicht, dass  $H$  nicht von den einzelnen Formen  $\omega_1, \dots, \omega_m$  explizit abhängt, sondern nur von der durch sie erzeugten analytischen Untergarbe der Garbe  $\Omega_D^1$  der holomorphen Pfaffschen Formen auf  $D$ . Das gibt Anlass zur folgenden Definition eines Pfaffschen Systems holomorpher partieller Differentialgleichungen auf einem komplexen Raum bzw. einer lokalen Lösung eines solchen Systems.

**DEFINITION 1.1.** *Unter einem Pfaffschen System holomorpher partieller Differentialgleichungen auf einem komplexen Raum  $X$  versteht man eine lokal endlich erzeugte (d.h. kohärente) analytische Untergarbe  $\Omega'$  der Garbe  $\Omega_X^1$  der holomorphen Pfaffschen Formen auf  $X$ .*

**DEFINITION 1.2.** *Unter der Garbe der Stammfunktionen von  $\Omega' \subset \Omega_X^1$  versteht man die Untergarbe  $\mathcal{O}' := d^{-1}(\Omega')$  von  $\mathcal{O}_X$ .*

**DEFINITION 1.3.**  *$\Omega' \subset \Omega_X^1$  heisst schwach integrabel, wenn es zu jedem Punkt  $x^0 \in X$  eine offene Umgebung  $U$  und eine lokal-einfache, einfache, offene, holomorphe Abbildung  $T: U \rightarrow V$  gibt, so dass für alle  $x \in U$  gilt:*

a)  $\mathcal{O}_{U,x} \cdot T_x^*(\Omega_{V,T(x)}^1) = \Omega'_x$ .

*$\Omega'$  heisst integrabel oder ein Frobeniussystem, wenn zusätzlich gilt:*

b)  $T_x^*(\mathcal{O}_{V,T(x)}^1) = \mathcal{O}'_x$ .

*Eine lokal-einfache, einfache, offene holomorphe Abbildung, die den Bedingungen a) und b) genügt, heisst eine lokale Lösung von  $\Omega' \subset \Omega_X^1$ ; sie heisst eine schwache lokale Lösung, wenn nur die Bedingung a) erfüllt ist.*

Unter einfachen und lokal-einfachen Abbildungen zwischen topologischen Räumen versteht man das Folgende:

**DEFINITION 1.4.** *Eine Abbildung  $T: X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen  $X$  und  $Y$  heisst einfach, wenn alle Fasern  $T^{-1}(T(x))$ ,  $x \in X$ , von  $T$  zusammenhängend sind.*

*$T$  heisst lokal-einfach, wenn es zu jedem Punkt  $x \in X$  und jeder Umgebung  $U$  von  $x$  eine offene Umgebung  $\tilde{U} \subset U$  von  $x$  gibt, so dass  $T|_{\tilde{U}}$  einfach ist.*

*Bemerkung.* Ist  $T: U \rightarrow V$  eine schwache lokale Lösung von  $\Omega'$ , so entnimmt man

den kommutativen Diagrammen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{V, T(x)} & \xrightarrow{T^*_x} & \mathcal{O}_{U, x} \\ d \downarrow & & \downarrow d \\ \Omega^1_{V, T(x)} & \xrightarrow{T^*_x} & \Omega^1_{U, x} \end{array}$$

dass für alle  $x \in U$  gilt:

b')  $T^*_x(\mathcal{O}_{V, T(x)}) \subset \mathcal{O}'_x$

c)  $\mathcal{O}_{U, x} \cdot d\mathcal{O}'_x = \Omega'_x$ .

**1.3.** Unter gewissen Voraussetzungen sind schwache lokale Lösungen eines Pfaffschen Systems schon lokale Lösungen.

**SATZ 1.5.**  $\Omega' \subset \Omega^1_X$  sei ein Pfaffsches System partieller Differentialgleichungen auf dem reduzierten komplexen Raum  $X$ .  $T: U \rightarrow V$  sei eine schwache lokale Lösung von  $\Omega'$ . Ist  $V$  ein maximaler komplexer Raum (d.h.  $V$  ist reduziert und genügt dem schwachen Riemannschen Hebbarkeitssatz), dann ist  $T$  schon eine lokale Lösung von  $\Omega'$ .

Beim Beweis hat man das folgende Lemma heranzuziehen (vergleiche [8]).

**LEMMA 1.6.**  $X, Y$  seien reduzierte komplexe Räume,  $Y$  sei maximal und  $T: X \rightarrow Y$  sei eine offene, holomorphe Abbildung, dann gilt: Zu jeder auf einer  $T$ -saturierten offenen Menge  $U \subset X$   $T$ -invarianten holomorphen Funktion  $f$  gibt es eine holomorphe Funktion  $F$  auf  $T(U)$ , so dass  $F \circ (T|U) = f$  (d.h.  $Y$  ist der kanonische Quotient von  $X$  nach der durch  $T$  induzierten Äquivalenzrelation  $R_T$  und  $T: X \rightarrow Y$  ist die kanonische Quotientenabbildung).

*Beweis* (von Lemma 1.6). Auf Grund der Offenheit von  $T$  gibt es eine stetige Funktion  $F$  auf  $T(U)$ , so dass  $F \circ (T|U) = f$ . Da  $Y$  maximal ist, bleibt zu zeigen, dass  $F$  ausserhalb einer nirgends dichten analytischen Menge  $S$  von  $T(U)$  holomorph ist. Man wähle  $S$  als Singularitätenmenge von  $T(U)$ . Sei  $w \in T(U) - S$  und  $z \in U$  mit  $T(z) = w$ . Wegen der Offenheit von  $T$  ist  $rg_z(T) := \dim_z U - \dim_z T^{-1}(w) = \dim_w T(U)$  (vergleiche [13], Satz 29). Man kann eine rein-dimensionale analytische Menge  $A$  in einer offenen Umgebung  $V \subset U$  von  $z$  mit folgenden Eigenschaften finden:

$\alpha)$   $A \cap T^{-1}(w) = \{z\}$ ,

$\beta)$   $\dim A + \dim_z T^{-1}(w) = \dim_z U$ , d.h.  $\dim A = \dim_w T(U)$ .

Man kann annehmen, dass  $T(A)$  in einer Zusammenhangskomponente  $W$  von  $T(U) - S$  liegt und dass  $T|A \rightarrow W$  diskret ist (siehe  $\alpha$ ). Wegen  $\dim A = \dim W$  (siehe  $\beta$ ), stellt  $T|A \rightarrow W$  eine offene Abbildung dar (siehe [13], Satz 29). Wir können zusätzlich annehmen, dass  $T|A \rightarrow T(A)$  eigentlich ist (vergleiche [15], Hilfssatz 3), d.h. eine holomorphe Ueberlagerung der Mannigfaltigkeit  $T(A)$  liefert. Wegen  $(F|T(A)) \circ (T|A) = f|A$  ist  $F$  holomorph auf der offenen Umgebung  $T(A)$  von  $w$  in  $T(U)$ .

*Beweis* (von Satz 1.5). Es ist für jedes  $x \in U$  zu zeigen, dass  $T_x^*(\mathcal{O}_{V, T(x)}) = \mathcal{O}'_x$  ist. Auf Grund der obigen Bemerkung b') ist  $T_x^*(\mathcal{O}_{V, T(x)}) \subset \mathcal{O}'_x$ . Bleibt zu beweisen, dass zu jedem  $f_x \in \mathcal{O}'_x$  ein  $F_x \in \mathcal{O}_{V, T(x)}$  mit  $T_x^*(F_x) = f_x$  existiert.  $f_x$  wird durch eine holomorphe Funktion  $f$  auf einer offenen Umgebung  $U_x \subset U$  von  $x$  repräsentiert. Wir können annehmen, dass  $T|U_x \rightarrow V$  einfach und  $df \in \Omega'(U_x)$  ist. Da  $T$  eine schwache lokale Lösung von  $\Omega$  darstellt, so muss  $f$  auf den Fasern von  $T|U_x$  konstant sein. Nach Lemma 1.6 gibt es eine holomorphe Funktion  $F$  auf der offenen Umgebung  $T(U_x) \subset V$  von  $T(x)$ , so dass  $f = F \circ (T|U_x)$  ist, d.h.  $f_x = T_x^*(F_x)$ , wobei  $F_x$  der durch  $F$  repräsentierte holomorphe Funktionskeim aus  $\mathcal{O}_{V, T(x)}$  ist.

**SATZ 1.7.**  $\Omega' \subset \Omega_X^1$  sei ein schwach integrables Pfaffsches System holomorpher partieller Differentialgleichungen auf einem reduzierten komplexen Raum  $X$ , dann gibt es auf der Maximalisierung  $\bar{X}$  von  $X$  (siehe [2], S. 44/45) genau ein integrables System  $\bar{\Omega}'$  mit folgender Eigenschaft: Ist  $T: U \rightarrow V$  eine schwach lokale Lösung von  $\Omega'$ , dann ist ihre Maximalisierung  $\bar{T}: \bar{U} \rightarrow \bar{V}$  (siehe [2], S. 44/45) eine lokale Lösung von  $\bar{\Omega}'$  (d.h. die lokalen Lösungen von  $\bar{\Omega}'$  sind topologisch mit den schwachen lokalen Lösungen von  $\Omega'$  identisch).

*Beweis.* Zu jedem Punkt  $x^\circ \in X$  gibt es eine offene Umgebung  $U$  und eine schwache lokale Lösung  $T: U \rightarrow V$  von  $\Omega'$ . Sei nun  $\bar{T}: \bar{U} \rightarrow \bar{V}$  die Maximalisierung von  $T$ .  $\mathcal{O}_{\bar{U}}$  und  $\mathcal{O}_{\bar{V}}$  seien die Strukturgarben von  $\bar{U}$  bzw.  $\bar{V}$  und  $\Omega_{\bar{U}}^1, \Omega_{\bar{V}}^1$  die entsprechenden Garben holomorpher Pfaffscher Formen.  $\bar{\Omega}'| \bar{U}$  sei definiert als analytische Urbildgarbe von  $\Omega_{\bar{V}}^1$  bzgl.  $\bar{T}: \bar{U} \rightarrow \bar{V}$ , d.h.  $\bar{\Omega}'_x = \mathcal{O}_{\bar{U}, x} \cdot T_x^*(\Omega_{\bar{V}, T(x)}^1)$  für alle  $x \in \bar{U}$ .  $\bar{\Omega}'| \bar{U}$  ist eine kohärente analytische Untergarbe von  $\Omega_{\bar{U}}^1$ . Sie ist integrabel, denn  $\bar{T}: \bar{U} \rightarrow \bar{V}$  stellt auf Grund der Definition von  $\bar{\Omega}'| \bar{U}$  und wegen Satz 1.5 eine (globale) lokale Lösung von  $\bar{\Omega}'| \bar{U}$  dar.

Wenn wir zeigen können, dass  $\bar{\Omega}'| \bar{U}$  nicht von der speziellen Wahl der schwachen lokalen Lösung  $T: U \rightarrow V$  abhängt, sondern nur von  $\Omega'| U$ , so liefert die obige Konstruktion von  $\bar{\Omega}'| \bar{U}$  die gesuchte Garbe  $\bar{\Omega}'$  mit den im Satz behaupteten Eigenschaften. Zu diesem Zwecke rechnet man einfach für die Garbe  $\mathcal{O}'| \bar{U}$  der lokalen Stammfunktionen von  $\bar{\Omega}'| \bar{U}$  aus, dass für alle  $x \in \bar{U}$  gilt:

$$\mathcal{O}'_x = \{ f_x \in \mathcal{O}_{\bar{U}, x}; f_x \text{ ist aus dem totalen Quotientenring von } \mathcal{O}'_x \text{ und ganz algebraisch über } \mathcal{O}'_x \}.$$

Damit ist die Garbe  $\mathcal{O}'| \bar{U}$  durch die Maximalisierung  $(\bar{U}, \mathcal{O}_{\bar{U}})$  von  $(U, \mathcal{O}_U)$  und die Garbe  $\mathcal{O}'| U$  eindeutig bestimmt; d.h.  $\mathcal{O}'| \bar{U}$  hängt letztlich nur von  $\Omega'| U$  ab. Da  $\bar{\Omega}'| \bar{U}$  integrabel ist, so gilt  $\bar{\Omega}'_x = \mathcal{O}_{\bar{U}, x} \cdot d\mathcal{O}'_x$  für alle  $x \in \bar{U}$ , d.h. auch  $\bar{\Omega}'| \bar{U}$  hängt nur von  $\Omega'| U$  ab.

**1.4.** Ein integrables Pfaffsches System  $\Omega' \subset \Omega_X^1$  partieller Differentialgleichungen auf einem komplexen Raum  $X$  ist stets involutorisch, wie man leicht nachrechnet.

Dabei heisst  $\Omega'$  involutorisch, wenn die durch  $\Omega' \subset \Omega_X^1$  erzeugte Idealgarbe  $\Omega' \wedge \Omega_X$  von  $\Omega_X$  unter der äusseren Ableitung  $d: \Omega_X \rightarrow \Omega_X$  invariant bleibt. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Für gewisse Pfaffsche Systeme auf komplexen Mannigfaltigkeiten liefert jedoch der Satz von Frobenius (siehe [10], Chapter 2, §2.11) ein notwendiges und hinreichendes Integrabilitätskriterium. Es soll hier für reduzierte komplexe Räume eine analoge Aussage angegeben werden. Dazu benötigen wir folgende Begriffsbildungen.

Sei  $X$  ein reduzierter komplexer Raum.  $\mathfrak{T}(X)$  bezeichne den reduzierten komplexen Tangentialfaserraum an  $X$  (vergleiche [7], [9], [14]). Lokal ist  $\mathfrak{T}(X)$  wie folgt definiert. Jeder Punkt  $x \in X$  besitzt eine offene Umgebung  $U$ , die mit einer analytischen Menge einer offenen Menge  $G \subset \mathbb{C}^n$  identifiziert werden kann. Wir verwenden im weiteren die Bezeichnungen vom Anfang dieses Paragraphen. Zunächst definiert man den Tangentialfaserraum  $\mathfrak{T}(G)$  an  $G$  als

$$\mathfrak{T}(G) := \left\{ \left( z, \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial z_i} \Big|_z \right); z \in U, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n \right\},$$

d.h.  $\mathfrak{T}(G)$  ist biholomorph äquivalent zu  $G \times \mathbb{C}^n$ . Unter dem Tangentialfaserraum  $\mathfrak{T}(U)$  an  $U$  versteht man dann die analytische Menge

$$\mathfrak{T}(U) := \{(z, T_z) \in T(G); z \in U, T_z(\mathcal{J}_z) = 0\}$$

von  $\mathfrak{T}(G)$ , die wir mit der induzierten reduzierten komplexen Struktur versehen.

Die Garbe  $\Omega_G^1$  operiert in kanonischer Weise als Garbe von Linearformen auf  $\mathfrak{T}(G)$  bzgl. der Abbildung  $\Phi_G: \Omega_G^1 \times_G \mathfrak{T}(G) \rightarrow \mathcal{C}$  mit

$$\Phi_G \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i(z) dz_i, \left( z, \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{\partial}{\partial z_j} \Big|_z \right) \right) := \sum_{j=1}^n \alpha_j(z) \cdot \beta_j, \quad z \in G.$$

Da  $\Phi_G(\mathcal{J}_U^1 \times_U \mathfrak{T}(U)) = 0$ , so induziert  $\Phi_G$  auf kanonische Weise eine Abbildung  $\Phi_U: \Omega_U^1 \times_U \mathfrak{T}(U) \rightarrow \mathcal{C}$ . Diese hängt nur von der komplexen Struktur von  $U$  ab.  $\Omega_X^1$  operiert also als Garbe von Linearformen auf  $\mathfrak{T}(X)$  bzgl. einer Abbildung  $\Phi: \Omega_X^1 \times_X \mathfrak{T}(X) \rightarrow \mathcal{C}$ , deren Beschränkung auf  $\Omega_U^1 \times_U \mathfrak{T}(U)$  für die oben beschriebenen offenen Mengen  $U \subset X$  gleich  $\Phi_U$  ist.

Sei nun  $M \subset \mathfrak{T}(X)$  ein holomorphes Vektorraumbündel.  $M$  heisst involutorisch, wenn mit je zwei holomorphen Vektorfeldern  $T, S$  in  $M$  über einer offenen Menge  $U \subset X$  ihr Liesches Klammerprodukt  $[T, S]$  wieder ein Vektorfeld in  $M$  über  $U$  ist.

Man kann einem holomorphen Vektorraumbündel  $M \subset \mathfrak{T}(X)$  die Annulatorgarbe  $\text{Ann}(M) \subset \Omega_X^1$  zuordnen, die aus sämtlichen holomorphen Pfaffschen Formen besteht, die auf  $M$  verschwinden.  $\text{Ann}(M)$  ist eine kohärente analytische Untergarbe von  $\Omega_X^1$ , also ein Pfaffsches System partieller Differentialgleichungen auf  $X$ .

Es gilt nun die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Frobenius, die man vollkommen analog wie in [10], Chapter 2, §2.11 beweist.

**SATZ 1.8.**  *$X$  sei ein reduzierter komplexer Raum, dann sind für ein holomorphes Vektorraumbündel  $M \subset \mathfrak{L}(X)$  über  $X$  folgende Aussagen äquivalent:*

- (1)  *$M$  ist involutorisch.*
- (2)  *$\text{Ann}(M) \subset \Omega_X^1$  ist involutorisch.*
- (3)  *$\text{Ann}(M)$  ist integrabel.*

## § 2. Holomorphe Blätterungen

**2.1.** Integrable Pfaffsche Systeme partieller Differentialgleichungen auf komplexen Räumen erzeugen holomorphe Blätterungen auf diesen Räumen, und zwar im Sinne der folgenden Definitionen.

**DEFINITION 2.1.** *Unter einer lokalen holomorphen Blätterung eines komplexen Raumes  $(X, \mathcal{O}_X)$  versteht man eine lokal-einfache, einfache, offene, holomorphe Abbildung  $T: U \rightarrow V$  einer offenen Menge  $U \subset X$  auf einen komplexen Raum  $V$ .*

**DEFINITION 2.2.** *Zwei lokale holomorphe Blätterungen  $T_i: U_i \rightarrow V_i$ ,  $i=1, 2$ , auf einem komplexen Raum  $(X, \mathcal{O}_X)$  heißen holomorph verträglich, wenn es zu jedem  $x \in U_1 \cap U_2$  eine offene Umgebung  $W \subset U_1 \cap U_2$  und eine biholomorphe Abbildung  $h: T_1(W) \rightarrow T_2(W)$  gibt, so dass  $h \circ (T_1 \mid W) = T_2 \mid W$ .*

**DEFINITION 2.3.** *Unter einer (globalen) holomorphen Blätterung eines komplexen Raumes  $(X, \mathcal{O}_X)$  versteht man ein System  $\mathfrak{B} = \{T_i: U_i \rightarrow V_i; i \in I\}$  paarweise holomorph verträglicher lokaler holomorpher Blätterungen von  $X$  mit  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ .*

**SATZ 2.4.**  *$\Omega' \subset \Omega_X^1$  sei ein integrables Pfaffsches System partieller Differentialgleichungen auf einem komplexen Raum  $X$ . Dann bildet das System der lokalen Lösungen von  $\Omega'$  eine holomorphe Blätterung von  $X$ .*

*Beweis.* Die lokalen Lösungen  $T: U \rightarrow V$  von  $\Omega'$  sind per Definition lokale holomorphe Blätterungen von  $X$  (dabei können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die lokalen Lösungen  $T: U \rightarrow V$  surjektiv sind). Wir haben noch die holomorphe Verträglichkeit je zweier lokaler Lösungen  $T_1: U_1 \rightarrow V_1$ ,  $T_2: U_2 \rightarrow V_2$  von  $\Omega'$  nachzuweisen. Für jedes  $x \in U_1 \cap U_2$  sind  $T_{1,x}^*: \mathcal{O}_{V_1, T_1(x)} \rightarrow \mathcal{O}_x$  und  $T_{2,x}^*: \mathcal{O}_{V_2, T_2(x)} \rightarrow \mathcal{O}_x$  Algebraisomorphismen, desgleichen  $(T_{1,x}^*)^{-1} \circ T_{2,x}^*: \mathcal{O}_{V_2, T_2(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{V_1, T_1(x)}$ . Es gibt folglich eine biholomorphe Abbildung  $h: W_1 \rightarrow W_2$  zwischen offenen Umgebungen  $W_1 \subset V_1$  von  $T_1(x)$  und  $W_2 \subset V_2$  von  $T_2(x)$ , so dass  $h_{T_1(x)}^* = (T_{1,x}^*)^{-1} \circ T_{2,x}^*$  ist, oder anders ausgedrückt:  $(h \circ T_1)_x^* = T_{1,x}^* \circ h_{T_1(x)}^* = T_{2,x}^*$ . Das bedeutet, dass für eine passende Umgebung  $W \subset U_1 \cap U_2$  von  $x$  die holomorphen Abbildungen  $h \circ (T_1 \mid W)$  und  $T_2 \mid W$  übereinstimmen.

*Bemerkung.* Jeder holomorphen Blätterung  $\mathfrak{B} := \{T_i: U_i \rightarrow V_i; i \in I\}$  eines kom-



plexen Raumes  $(X, \mathcal{O}_X)$  kann man ein schwach integrables Pfaffsches System  $\Omega' \subset \Omega_X^1$  partieller Differentialgleichungen auf  $X$  zuordnen. Man setze einfach  $\Omega'_x := \mathcal{O}_{X,x} \cdot T_{i,x}^* (\Omega_{V_i, T_i(x)}^1)$ , falls  $x \in U_i$ .

**2.2.** Um den Begriff des globalen Blattes einer holomorphen Blätterung  $\mathfrak{B} = \{T_i: \dot{U}_i \rightarrow V_i; i \in I\}$  eines komplexen Raumes  $X$  einzuführen, gehen wir wie folgt vor. Zunächst bilden wir einen komplexen Raum  $X_{\mathfrak{B}}$ , dessen unterliegende Menge gleich der von  $X$  ist, dessen Topologie aber im allgemeinen nicht die von  $X$  ist. Als Basis der Topologie von  $X_{\mathfrak{B}}$  nehmen wir das System

$$\{T_i^{-1}(z_i) \cap U; i \in I, z_i \in V_i, U \text{ offen in } X\}.$$

$\mathcal{U} := \{T_i^{-1}(z_i); i \in I, z_i \in V_i\}$  ist dann eine offene Ueberdeckung von  $X_{\mathfrak{B}}$ . Auf der Faser  $T_i^{-1}(z_i)$ ,  $i \in I, z_i \in V_i$ , haben wir die durch  $T_i$  induzierte komplexe Struktur. Ist  $T_i^{-1}(z_i) \cap T_j^{-1}(z_j) \neq \emptyset$ , so stimmen wegen der holomorphen Verträglichkeit von  $T_i$  und  $T_j$  die durch  $T_i$  bzw.  $T_j$  darauf induzierten komplexen Strukturen überein. Zusammenfassend kann man sagen: auf  $X_{\mathfrak{B}}$  gibt es eine eindeutig bestimmte komplexe Struktur, die auf den offenen Mengen  $T_i^{-1}(z_i)$  gerade die durch  $T_i$  induzierte ist. Das liefert eine holomorphe Abbildung  $\iota_{\mathfrak{B}}: X_{\mathfrak{B}} \rightarrow X$ , dessen unterliegende Mengenabbildung die Identität ist.

**DEFINITION 2.5.** Die Zusammenhangskomponenten von  $X_{\mathfrak{B}}$  werden Blätter von  $\mathfrak{B}$  genannt. Die Menge  $B = B(\mathfrak{B})$  der Blätter von  $\mathfrak{B}$  heisst Blätterraum von  $\mathfrak{B}$ .  $B(\mathfrak{B})$  sei mit der feinsten Topologie versehen, so dass  $\pi: X \rightarrow B(\mathfrak{B})$  noch stetig ist. Dabei bezeichnet  $\pi: X \rightarrow B(\mathfrak{B})$  die Abbildung, die jedem  $x \in X$  das Blatt  $B_x$  zuordnet, in dem  $x$  liegt.

Ist  $\Omega' \subset \Omega_X^1$  ein integrables Pfaffsches System holomorpher partieller Differentialgleichungen auf dem komplexen Raum  $X$  und  $\mathfrak{B}$  die zugehörige holomorphe Blätterung, dessen lokale holomorphe Blätterungen gerade die lokalen Lösungen von  $\Omega'$  sind, so werden die Blätter von  $\mathfrak{B}$  auch als globale Lösungsflächen von  $\Omega'$  bezeichnet, und den Blätterraum  $B = B(\mathfrak{B})$  von  $\mathfrak{B}$  nennt man auch Parameterraum  $P = P(\Omega')$  der globalen Lösungsflächen von  $\Omega'$ .

Eine holomorphe Blätterung  $\mathfrak{B}$  eines komplexen Raumes  $X$  wirft die beiden folgenden Fragen auf:

**PROBLEM I.** Unter welchen Bedingungen ist ein Blatt  $B_x$ ,  $x \in X$ , von  $\mathfrak{B}$  eine analytische Teilmenge von  $X$ , oder anders ausgedrückt: wann ist  $\iota_{\mathfrak{B}}|_{B_x} : B_x \rightarrow X$  ein komplexer Unterraum von  $X$  (vergleiche [2], S. 45)?

**PROBLEM II.** Unter welchen Bedingungen besitzt der Blätterraum  $B(\mathfrak{B})$  von  $\mathfrak{B}$  eine kanonische komplexe Struktur?

**2.3.** Bevor wir im nächsten Paragraphen eine Antwort auf die oben formulierten Probleme geben, wollen wir zunächst einige allgemeine Hilfssätze über holomorphe Blätterungen zusammenstellen.

**DEFINITION 2.6.** Sei  $(X, \mathcal{O}_X)$  ein komplexer Raum, und  $\mathfrak{B} = \{T_i: U_i \rightarrow V_i; i \in I\}$  eine holomorphe Blätterung von  $X$ . Unter einer lokalen  $\mathfrak{B}$ -Blätterung von  $X$  versteht man dann eine lokale holomorphe Blätterung von  $X$ , die mit allen lokalen Blätterungen  $T_i: U_i \rightarrow V_i$  holomorph verträglich ist.

**LEMMA 2.7.**  $T: U \rightarrow V$  sei eine lokale  $\mathfrak{B}$ -Blätterung von  $X$ . Dann gibt es zu jedem  $x \in U$  und jedem  $y \in B_x$  eine lokale  $\mathfrak{B}$ -Blätterung  ${}_yT: {}_yU \rightarrow {}_yV$  und eine biholomorphe Abbildung  ${}_yh: {}_yV \rightarrow {}_yV'$ ,  ${}_yV'$  offen in  $V$ , so dass gilt:

- (a)  ${}_yh({}_yT(y)) = T(x)$ .
- (b)  $T^{-1}({}_yh(v))$  und  ${}_yT^{-1}(v)$  gehören jeweils zum gleichen Blatt für alle  $v \in {}_yV$ , d.h.  $\pi(T^{-1}({}_yh(v))) = \pi({}_yT^{-1}(v))$ .

*Bemerkungen* (zu Lemma 2.7). (1) Zur Bestimmung von  ${}_yT: {}_yU \rightarrow {}_yV$  kann man von einer beliebigen lokalen  $\mathfrak{B}$ -Blätterung  $\tilde{T}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  mit  $y \in \tilde{U}$  ausgehen und  ${}_yT$  als geeignete Beschränkung von  $\tilde{T}$  wählen.

(2) Andererseits kann man  ${}_yT: {}_yU \rightarrow {}_yV$  auch so wählen, dass  ${}_yV$  offen in  $V$  liegt und dass gilt:

- (a')  ${}_yT(y) = T(x)$
- (b')  $T^{-1}(v)$  und  ${}_yT^{-1}(v)$  gehören jeweils zum gleichen Blatt für alle  $v \in {}_yV$ .

Man gehe hierzu von einem beliebigen Paar  ${}_yT: {}_yU \rightarrow {}_yV$ ,  ${}_yh: {}_yV \rightarrow {}_yV'$  aus, das die Eigenschaften von Lemma 2.7 besitzt:  ${}_yT' := {}_yh \circ {}_yT: {}_yU \rightarrow {}_yV'$  genügt dann den Bedingungen (a') und (b').

*Beweis.*  $x$  sei fest aus  $U$  gewählt.  $\tilde{B}_x$  bezeichne die Menge aller Punkte  $y$  des Blattes  $B_x$ , für die die Aussagen (a) und (b) von Lemma 2.7 gelten. Es ist zu zeigen, dass  $\tilde{B}_x = B_x$  ist. Wir beweisen zu diesem Zweck, dass  $\tilde{B}_x$  gleichzeitig abgeschlossen und offen in  $B_x$  liegt (die Topologie von  $B_x$  sei durch  $X_{\mathfrak{B}}$  induziert). Wegen des Zusammenhangs von  $B_x$  muss dann  $\tilde{B}_x = B_x$  sein.  $\tilde{B}_x$  ist per Definition offen in  $B_x$ . Die Abgeschlossenheit von  $\tilde{B}_x$  in  $B_x$  ergibt sich wie folgt. Sei  $y_0$  ein Punkt aus der abgeschlossenen Hülle von  $\tilde{B}_x$ . Man wähle nun irgendeine lokale  $\mathfrak{B}$ -Blätterung  ${}_0T: {}_0U \rightarrow {}_0V$  von  $X$  mit  $y_0 \in {}_0U$ . Der Durchschnitt  ${}_0U \cap \tilde{B}_x$  ist nicht leer. Sei  $y$  ein Punkt aus  ${}_0U \cap \tilde{B}_x$ . Wir können annehmen, dass  ${}_0T(y) = {}_0T(y_0)$ . Es gibt eine lokale  $\mathfrak{B}$ -Blätterung  ${}_yT: {}_yU \rightarrow {}_yV$  und eine bilomorphe Abbildung  ${}_yh: {}_yV \rightarrow {}_yV'$ ,  ${}_yV'$  offen in  $V$ , für die die Aussagen (a) und (b) des Lemmas gelten. Da die lokalen  $\mathfrak{B}$ -Blätterungen  ${}_yT: {}_yU \rightarrow {}_yV$  und  ${}_0T: {}_0U \rightarrow {}_0V$  holomorph verträglich sind, gibt es eine offene Umgebung  $W \subset {}_yU \cap {}_0U$  von  $y$  und eine biholomorphe Abbildung  $h: {}_0T(W) \rightarrow {}_yT(W)$ , so dass  $h \circ ({}_0T|_W) = {}_yT|_W$ . Wir definieren nun:

$${}_{y_0}U := {}_0T^{-1}({}_0T(W)) \quad (\text{offen in } {}_0U \text{ und } y_0 \in {}_{y_0}U), \quad {}_{y_0}V := {}_0T(W) = {}_0T({}_{y_0}U),$$



${}_y T := {}_0 T|_y U \rightarrow {}_y V$ ,  ${}_y V' := {}_y h(h({}_y V))$  (offen in  $V$ ),  ${}_y h := {}_y h \circ h: {}_y V \rightarrow {}_y V'$ .  
 ${}_y T: {}_y U \rightarrow {}_y V$  ist per Definition eine lokale  $\mathfrak{B}$ -Blätterung. Es bleibt, für  ${}_y T$  und  ${}_y h$  die Aussagen (a) und (b) zu verifizieren. Ad (a) rechnet man einfach aus:  
 ${}_y h({}_y T(y_0)) = {}_y h(h({}_0 T(y_0))) = {}_y h(h({}_0 T(y))) = {}_y h({}_y T(y)) = T(x)$ . Ad (b) zeigen wir zunächst, dass für jedes  $v \in {}_y V$  die Fasern  ${}_y T^{-1}(h(v))$  und  ${}_y T^{-1}(v)$  zum gleichen Blatt gehören. Es gibt stets ein  $y' \in W$ , so dass  $v = {}_y T(y')$  oder  $y' \in {}_y T^{-1}(v)$ . Daraus folgt:  
 $h(v) = h({}_0 T(y')) = {}_y T(y')$  oder  $y' \in {}_y T^{-1}(h(v))$ . Also ist  ${}_y T^{-1}(h(v)) \cap {}_y T^{-1}(v)$  nicht leer; d.h.  ${}_y T^{-1}(h(v))$  und  ${}_y T^{-1}(v)$  gehören zum gleichen Blatt. Da für  ${}_y T$  und  ${}_y h$  die Aussagen (b) des Lemmas gilt und  $h(v) \in {}_y V$  für alle  $v \in {}_y V$ , so liegen  ${}_y T^{-1}(h(v))$  und  $T^{-1}({}_y h(h(v))) = T^{-1}({}_y h(v))$  stets im gleichen Blatt, also auch  ${}_y T^{-1}(v)$  und  $T^{-1}({}_y h(v))$ .

Als unmittelbare Folgerung von Lemma 1 erhält man:

**COROLLAR 2.8.** *Die durch eine holomorphe Blätterung  $\mathfrak{B}$  auf einem komplexen Raum  $X$  erzeugte Äquivalenzrelation  $R_{\mathfrak{B}}$ , dessen Äquivalenzklassen gerade die Blätter von  $\mathfrak{B}$  sind, ist stets offen; d.h. die kanonische Quotientenabbildung  $\pi: X \rightarrow B(\mathfrak{B})$  ist offen.*

Wendet man den Satz von Poincaré-Volterra (siehe [3], Chap. I, §11, No. 7, Corollaire 1) auf die mit einer holomorphen Blätterung  $\mathfrak{B}$  kanonisch gegebene holomorphe Abbildung  $\iota_{\mathfrak{B}}: X_{\mathfrak{B}} \rightarrow X$  (siehe Abschnitt 2.2) an, so erhält man:

**LEMMA 2.9.**  *$\mathfrak{B}$  sei eine holomorphe Blätterung auf dem komplexen Raum  $X$ . Ist  $X$  parakompakt (d.h. jede Zusammenhangskomponente hat eine abzählbare Basis), so auch  $X_{\mathfrak{B}}$ , d.h. die Blätter von  $\mathfrak{B}$  haben eine abzählbare Basis.*

Sei  $X$  ein komplexer Raum mit einer holomorphen Blätterung  $\mathfrak{B}$ . Jede lokale  $\mathfrak{B}$ -Blätterung  $T: U \rightarrow V$  liefert eine Äquivalenzrelation  $R^V$  auf  $V: v_1, v_2 \in V$  heißen  $R^V$ -äquivalent, wenn  $\pi(T^{-1}(v_1)) = \pi(T^{-1}(v_2))$ , d.h. wenn  $T^{-1}(v_1)$  und  $T^{-1}(v_2)$  zum gleichen Blatt von  $\mathfrak{B}$  gehören.

**LEMMA 2.10.** *Die Äquivalenzrelation  $R^V$  hat folgende Eigenschaften:*

(1)  $R^V$  ist offen.

(2) Eine Äquivalenzklasse von  $R^V$  ist entweder diskret oder enthält überhaupt keine isolierten Punkte.

(3)  $R^V$  ist schwach analytisch.

Ist  $X$  parakompakt, so gilt ferner:

(4) Die Äquivalenzklassen von  $R^V$  sind alle höchstens abzählbar.

(5) Eine abgeschlossene Äquivalenzklasse von  $R^V$  ist stets diskret.

Dabei versteht man unter einer schwach analytischen Äquivalenzrelation auf einem komplexen Raum das Folgende.

DEFINITION 2.11.  $R \subset X \times X$  sei der Graph einer Äquivalenzrelation auf einem komplexen Raum.  $q_i: R \rightarrow X$  ( $i=1, 2$ ) bezeichne die kanonische Projektion auf die  $i$ -te Komponente von  $X \times X$ .  $R$  heisst schwach analytisch, wenn es durch jeden Punkt  $(x, x') \in R$  eine lokal-analytische Menge  $R(x, x') \subset R$  gibt und wenn eine offene Umgebung  $V_x$  von  $x$  in  $X$  existiert, so dass  $q_1$  durch Beschränkung eine biholomorphe Abbildung  $q_1 \mid R(x, x') \rightarrow V_x$  induziert.

*Beweis.* (1)  $R^V$  ist offen, da  $R_{\mathfrak{B}}$  eine offene Äquivalenzrelation auf  $X$  darstellt.

(2) Lemma 2.7 beinhaltet unter anderem, dass eine Äquivalenzklasse von  $R^V$  schon diskret ist, wenn sie nur einen einzigen isolierten Punkt besitzt.

(3) Sei  $(v_1, v_2) \in R^V \subset V \times V$ . Wir wählen dann Punkte  $x_1, x_2 \in U$  mit  $T(x_1) = v_1$  und  $T(x_2) = v_2$ . Da  $x_2 \in B_{x_1}$ , so gibt es auf Grund der Bemerkungen (2) zu Lemma 2.7 eine lokale  $\mathfrak{B}$ -Blätterung  $T_2: U_2 \rightarrow V_2$  (mit  $x_2 \in U_2 \subset U$ ), so dass  $V_2$  offen in  $V$  liegt und folgendes gilt:

(a)  $T_2(x_2) = T(x_1)$ .

(b)  $T_2^{-1}(v)$  und  $T^{-1}(v)$  gehören jeweils zum gleichen Blatt für alle  $v \in V_2$ .

Da die lokalen  $\mathfrak{B}$ -Blätterungen  $T$  und  $T_2$  holomorph verträglich sind, so gibt es eine Umgebung  $W$  von  $x_2$  in  $U_2 \subset U$  und eine biholomorphe Abbildung  $h: T_2(W) \rightarrow T(W)$ , so dass gilt:

(c)  $h \circ (T_2 \mid W) = T \mid W$ .

Wir können (eventuell nach Verkleinerung von  $V_2$  und  $U_2$ ) annehmen, dass  $T_2(W) = V_2$ . Die holomorphe Abbildung  $h: V_2 \rightarrow T(W) \subset V$  hat dann folgende Eigenschaften (man beachte (a), (b) und (c)):

$h(v_1) = h(T(x_1)) = h(T_2(x_2)) = T(x_2) = v_2$ .

$T^{-1}(v)$  und  $T^{-1}(h(v)) = T_2^{-1}(v)$  gehören für jedes  $v \in V_2$  zum gleichen Blatt, d.h.  $(v, h(v)) \in R^V$ .

Daraus folgt:

$R(v_1, v_2) := \{(v, h(v)); v \in V_2\}$  ist lokal analytisch in  $R^V$  und  $(v_1, v_2) \in R(v_1, v_2)$ .

$q_1 \mid R(v_1, v_2) \rightarrow V_2$  ist biholomorph mit der Zuordnung  $v \mapsto (v, h(v))$ ,  $v \in V_2$ , als Umkehrabbildung.

(4) Auf Grund von Lemma 2.9 gibt es höchstens abzählbar viele Fasern von  $T: U \rightarrow V$ , die zum gleichen Blatt von  $\mathfrak{B}$  gehören. Daraus folgt sofort Aussage (4).

(5) Eine abgeschlossene Äquivalenzklasse von  $R^V$  ist wegen (2) entweder diskret (d.h. sie besteht nur aus isolierten Punkten) oder perfekt (d.h. abgeschlossen und ohne isolierte Punkte). Nehmen wir einmal an, es existiert eine perfekte Äquivalenzklasse  $A$  von  $R^V$ . Wir wählen eine offene, relativ kompakte Umgebung  $W \subset V$  eines Punktes  $a \in A$ . Dann ist die abgeschlossene Hülle  $\overline{A \cap W}$  von  $A \cap W$  eine nichtleere, kompakte, diskontinuierliche, perfekte Teilmenge von  $A$ . Da jede solche Menge zum Cantorschen Diskontinuum  $C$  homöomorph ist (siehe [1], Satz VI', Seite 121) und da  $C$  überabzählbar ist, so müsste auch  $A$  überabzählbar sein im Widerspruch zu (4).

### § 3. Hausdorffsche Blätterräume

**3.1.** Wir wollen jetzt eine Antwort auf die beiden im letzten Paragraphen formulierten Probleme geben.

**SATZ 3.1.**  *$X$  sei ein parakompakter komplexer Raum mit einer holomorphen Blätterung  $\mathfrak{B}$ . Dann stellt jedes (lokal-) abgeschlossene Blatt von  $\mathfrak{B}$  eine (lokal-) analytische Teilmenge von  $X$  dar.*

*Beweis.* Sei  $B_x$ ,  $x \in X$ , ein lokal-abgeschlossenes Blatt von  $\mathfrak{B}$ . Zu jedem Punkt  $y \in B_x$  gibt es eine offene Umgebung  $U$  mit einer lokalen  $\mathfrak{B}$ -Blätterung  $T: U \rightarrow V$ . Wir können annehmen, dass  $B_x \cap U$  in  $U$  abgeschlossen ist. Folglich liegt auch  $T(B_x \cap U)$  abgeschlossen in  $V$ . Da  $T(B_x \cap U)$  als abgeschlossene Äquivalenzklasse von  $R^V$  diskret ist, so stellt  $B_x \cap U = T^{-1}(T(B_x \cap U))$  eine analytische Menge in  $U$  dar. Damit ist gezeigt, dass  $B_x$  lokal-analytisch in  $X$  ist.

**COROLLAR 3.2.**  *$X$  sei ein parakompakter komplexer Raum mit einer holomorphen Blätterung  $\mathfrak{B}$ . Ist der Blätterraum  $B$  von  $\mathfrak{B}$  hausdorffsch, so sind alle Blätter analytische Teilmengen von  $X$ .*

**3.2.** Für die Frage, wann es auf einem Blätterraum eine kanonische komplexe Struktur gibt, ist das folgende Lemma sehr nützlich.

**LEMMA 3.3.** *Ist  $X$  ein parakompakter, reduzierter komplexer Raum und  $\mathfrak{B}$  eine holomorphe Blätterung mit hausdorffschem Blätterraum  $B(\mathfrak{B})$ , dann gibt es zu jedem Punkt  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U$  mit einer lokalen  $\mathfrak{B}$ -Blätterung  $T: U \rightarrow V$ , so dass die Äquivalenzrelation  $R^V$  offen, diskret, eigentlich und analytisch ist.*

*Beweis.* Man kann von einer beliebigen lokalen  $\mathfrak{B}$ -Blätterung  $T: U \rightarrow V$  auf einer offenen Umgebung  $U$  von  $x$  ausgehen. Die Äquivalenzrelation  $R^V$  ist auf Grund von Lemma 2.10 offen, diskret und schwach-analytisch.  $T$  induziert einen Homöomorphismus  $\tilde{T}: \pi(U) \rightarrow V/R^V$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X \subset U & \xrightarrow{T} & V \\ \pi \downarrow & \tilde{T} & \downarrow \pi^V \\ B(\mathfrak{B}) \subset \pi(U) & \xrightarrow{\tilde{T}} & V/R^V \end{array}$$

Dabei sind  $\pi: X \rightarrow B(\mathfrak{B})$  und  $\pi^V: V \rightarrow V/R^V$  die kanonischen Quotientenabbildungen. Da  $B$  nach Voraussetzung hausdorffsch ist, so auch  $V/R^V$  (bzgl. der Quotiententopologie). Da  $V$  lokal kompakt ist, so auch  $V/R^V$ . Da  $R^V$  eine diskrete Äquivalenzrelation darstellt, kann man (durch passendes Verkleinern von  $V$  und  $U$ ) stets erreichen, dass  $\pi^V: V \rightarrow V/R^V$  eine eigentliche Abbildung wird (siehe [15], Hilfssatz 3).  $T: U \rightarrow V$  kann also stets so gewählt werden, dass die Äquivalenzrelation  $R^V$  offen

diskret, eigentlich und schwach analytisch ist. In [6], Hilfssatz 6, wurde gezeigt, dass solche Aequivalenzrelationen stets analytisch sind.

**SATZ 3.4.** *X sei eine parakompakter, reduzierter komplexer Raum mit einer maximalen holomorphen Blätterung  $\mathfrak{B} = \{T_i: U_i \rightarrow V_i; i \in I\}$  (d.h. die komplexen Räume  $V_i$  sind maximal), dann gilt: Der Blätterraum  $B(\mathfrak{B})$  von  $\mathfrak{B}$  besitzt genau dann eine kanonische komplexe Struktur, wenn er hausdorffsch ist, und diese ist dann wieder maximal.*

*Beweis.* Wir können auf Grund von Lemma 3.3 annehmen, dass die Aequivalenzrelationen  $R^{V_i}$ ,  $i \in I$ , alle offen, diskret, eigentlich und analytisch sind. Da die  $V_i$  als maximal vorausgesetzt sind, so existiert (siehe [6], Satz 15) eine kanonische maximale komplexe Struktur auf  $V_i/R^{V_i}$ , d.h. die kanonische Quotientenabbildung  $\pi^{V_i}: V_i \rightarrow V_i/R^{V_i}$  ist holomorph und zu jeder  $R^{V_i}$ -invarianten holomorphen Funktion (oder Abbildung)  $f$  auf einer  $R^{V_i}$ -saturierten offenen Teilmenge  $W$  von  $V_i$  gibt es eine holomorphe Funktion (oder Abbildung)  $\tilde{f}$  auf  $\pi^{V_i}(W) \subset V_i/R^{V_i}$ , so dass  $\tilde{f} \circ (\pi^{V_i}|_W) = f$ .

Die holomorphen Abbildungen  $T_i: U_i \rightarrow V_i$  induzieren Homöomorphismen  $\tilde{T}_i: \pi(U_i) \rightarrow V_i/R^{V_i}$ , so dass die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} X \supset U_i & \xrightarrow{T_i} & V_i \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi^{V_i} \\ B(\mathfrak{B}) \supset \pi(U_i) & \xrightarrow{\tilde{T}_i} & V_i/R^{V_i} \end{array}$$

Da die kanonische Quotientenabbildung  $\pi: X \rightarrow B(\mathfrak{B})$  von  $X$  auf den Blätterraum  $B(\mathfrak{B})$  von  $\mathfrak{B}$  offen ist, so stellt  $\{\pi(U_i); i \in I\}$  eine offene Ueberdeckung von  $B$  dar und  $\{(\pi(U_i), \tilde{T}_i); i \in I\}$  ist ein System vom komplexen Karten von  $B(\mathfrak{B})$ .

Wir müssen nur noch nachweisen, dass zwei Karten  $(\pi(U_i), \tilde{T}_i)$  und  $(\pi(U_j), \tilde{T}_j)$ ,  $i, j \in I$ , stets holomorph verträglich sind; d.h. wir müssen zeigen, dass die Abbildung  $\tilde{T}_{ij} := \tilde{T}_i \circ \tilde{T}_j^{-1}$  auf  $\tilde{T}_j(\pi(U_j) \cap \pi(U_i))$  holomorph ist. Sei  $b$  ein Punkt aus  $\pi(U_j) \cap \pi(U_i)$ . Dann gibt es Punkte  $x_i \in U_i$  und  $x_j \in U_j$  mit  $\pi(x_i) = \pi(x_j) = b$ . Da  $x_j \in B_{x_i}$ , so gibt es auf Grund von Lemma 2.7 eine lokale  $\mathfrak{B}$ -Blätterung  $T'_j: U'_j \rightarrow V'_j$  einer offenen Umgebung  $U'_j$  von  $x_j$  und eine biholomorphe Abbildung  $h: V'_j \rightarrow V'_i$  von  $V'_j$  auf eine offene Umgebung  $V'_i \subset V_i$  von  $T_i(x_i)$ , so dass gilt:

- (a)  $h(T'_j(x_j)) = T_i(x_i)$ .
- (b)  $T_i^{-1}(h(v))$  und  $T'_j^{-1}(v)$  liegen für jedes  $v \in V'_j$  im gleichen Blatt von  $\mathfrak{B}$ .

Wir können ohne weiteres annehmen, dass  $V'_j \subset V_j$ ,  $U'_j \subset U_j$  und  $T'_j := T_j|_{U'_j} \rightarrow V'_j$ . Da  $V_i/R^{V_i}$  und  $V_j/R^{V_j}$  kanonische komplexe Strukturen tragen, so induziert  $h: V'_j \rightarrow V'_i$  eine biholomorphe Abbildung  $\tilde{h}: \pi^{V_j}(V'_j) \rightarrow \pi^{V_i}(V'_i)$ , so dass  $\pi^{V_i}(h(v)) = \tilde{h}(\pi^{V_j}(v))$  für alle  $v \in V'_j$ .  $\pi^{V_j}(V'_j)$  ist eine offene Umgebung von  $\tilde{T}_j(b)$  in  $\tilde{T}_j(\pi(U_j) \cap \pi(U_i))$  und  $\tilde{h}$  stimmt dort mit  $\tilde{T}_{ij}$  überein, wie man folgender Rechnung entnimmt:

Zu jedem  $v \in V'_j$  gibt es Punkte  $y_i \in U_i$  und  $y_j \in U'_j$ , so dass  $T'_j(y_j) = v$  und  $T_i(y_i) = h(v)$ . Wegen (b) ist  $\pi(y_i) = \pi(y_j)$ . Daraus folgt:  $\tilde{T}_{ij}(\pi^{V_j}(v)) = \tilde{T}_i(\tilde{T}_j^{-1}(\pi^{V_j}(T_j(y_j)))) =$

$=\tilde{T}_i(\pi(y_j))=\tilde{T}_i(\pi(y_i))=\pi^{V_i}(T_i(y_i))=\pi^{V_i}(h(v))=\tilde{h}(\pi^{V_j}(v))$  für alle  $v\in V'_j$ ; d.h.  $\tilde{h}=\tilde{T}_{ij}$  auf  $\pi^{V_j}(V'_j)$ .

Damit ist nachgewiesen, dass  $\tilde{T}_{ij}:\tilde{T}_j(\pi(U_j)\cap\pi(U_i))\rightarrow T_i(\pi(U_j)\cap\pi(U_i))$  biholomorph ist.

Der Atlas  $\{(\pi(U_i), \tilde{T}_i); i\in I\}$  definiert auf dem Blätterraum  $B(\mathfrak{B})$  eine *kanonische* komplexe Struktur, wie man dem obigen Beweis sofort entnimmt.

*Bemerkungen* (zu Satz 3.4). (1) Man kann die Voraussetzung, dass  $X$  parakompakt ist, in allen oben bewiesenen Aussagen ersetzen durch die Bedingung, dass die Blätter eine abzählbare Basis besitzen (die Parakompaktheit wurde nur zum Beweis von Lemma 2.9 ausgenutzt).

(2) Der obige Satz 3.4 wird im allgemeinen falsch, wenn man die Voraussetzung fallen lässt, dass die Blätterung  $\mathfrak{B}=\{T_i:U_i\rightarrow V_i; i\in I\}$  maximal ist. Man kann sich aber im Fall, dass  $\mathfrak{B}$  nicht maximal ist, wie folgt helfen. Man gehe zur Maximalisierung  $\bar{X}$  von  $X$  über, dann bilden die Maximalisierungen  $\bar{T}_i:\bar{U}_i\rightarrow\bar{V}_i$  von  $T_i:U_i\rightarrow V_i$ ,  $i\in I$ , eine maximale Blätterung  $\bar{\mathfrak{B}}$  von  $\bar{X}$ . Der Blätterraum  $\bar{B}(\bar{\mathfrak{B}})$  von  $\bar{\mathfrak{B}}$  ist als topologischer Raum gleich dem Blätterraum  $B(\mathfrak{B})$  von  $\mathfrak{B}$ .  $\bar{B}(\bar{\mathfrak{B}})$  besitzt als Blätterraum der holomorphen Blätterung  $\bar{\mathfrak{B}}$  von  $\bar{X}$  eine kanonische maximale komplexe Struktur. Diese ist jedoch im allgemeinen nicht kanonisch bzgl. der Blätterung  $\mathfrak{B}$  von  $X$ , denn die kanonische Quotientenabbildung  $\pi:X\rightarrow\bar{B}(\bar{\mathfrak{B}})$  ist im allgemeinen nicht holomorph, sondern nur meromorph in dem Sinne, dass der Graph  $G_\pi:=\{(x, \pi(x))\in X\times\bar{B}(\bar{\mathfrak{B}}); x\in X\}$  von  $\pi:X\rightarrow\bar{B}(\bar{\mathfrak{B}})$  eine analytische Menge in  $X\times\bar{B}(\bar{\mathfrak{B}})$  darstellt. ( $G_\pi$  ist nämlich das Bild des Graphen  $G_{\bar{\pi}}:=\{(x, \bar{\pi}(x))\in\bar{X}\times\bar{B}(\bar{\mathfrak{B}}); x\in\bar{X}\}$  der kanonischen holomorphen Quotientenabbildung  $\bar{\pi}:\bar{X}\rightarrow\bar{B}(\bar{\mathfrak{B}})$  unter der kanonischen holomorphen Abbildung  $\bar{X}\times\bar{B}(\bar{\mathfrak{B}})\rightarrow X\times\bar{B}(\bar{\mathfrak{B}})$ ).

Hieraus folgt insbesondere für eine holomorphe Blätterung auf einem maximalen komplexen Raum  $X$ , dass der Blätterraum  $B(\mathfrak{B})$  eine kanonische maximale komplexe Struktur besitzt, wenn er hausdorffsch ist.

Ist  $X$  nicht maximal und  $\mathfrak{B}$  eine holomorphe Blätterung von  $X$  mit hausdorffschem Blätterraum  $B(\mathfrak{B})$ , dann wollen wir die kanonische maximale komplexe Struktur auf dem Blätterraum  $\bar{B}(\bar{\mathfrak{B}})$  von  $\bar{\mathfrak{B}}$  auch als „kanonische“ maximale komplexe Struktur von  $B(\mathfrak{B})$  bezeichnen.

**COROLLAR 3.5.**  *$X, Y$  seien parakompakte, reduzierte komplexe Räume, wobei mindestens einer der beiden Räume maximal ist.  $T:X\rightarrow Y$  sei eine lokal einfache, offene, holomorphe Abbildung.  $R$  bezeichne die Äquivalenzrelation, die die Zerlegung von  $X$  in Niveaumengen von  $T$  beschreibt (vergleiche [16]). Dann gilt:*

*Der Quotientenraum  $X/R$  besitzt genau dann eine kanonische komplexe Struktur, wenn er hausdorffsch ist, und diese ist dann maximal.*

*Beweis.* Jeder Punkt  $x\in X$  besitzt eine offene Umgebung  $U_x$ , so dass  $T_x:=T|U_x\rightarrow V_x:=T(U_x)$  eine lokale holomorphe Blätterung von  $X$  darstellt.  $\mathfrak{B}:=\{T_x:U_x\rightarrow V_x;$

$x \in X$  ist dann eine holomorphe Blätterung von  $X$ , dessen Blätter genau die Niveaumengen von  $T: X \rightarrow Y$  sind.

**3.3.** Für ein integrables Pfaffsches System  $\Omega' \subset \Omega_X^1$  partieller Differentialgleichungen auf einem parakompakten komplexen Raum  $X$  lassen sich die obigen Sätze 3.1 und 3.4 auch wie folgt formulieren:

**SATZ 3.6.** *Eine globale Lösungsfläche  $M \subset X$  von  $\Omega'$  ist genau dann (lokal-) analytisch in  $X$ , wenn sie (lokal-) abgeschlossen in  $X$  ist.*

**SATZ 3.7.** *Ist  $X$  reduziert und maximal, dann besitzt der Parameterraum  $P(\Omega')$  der globalen Lösungen von  $\Omega'$  genau dann eine kanonische (maximale) komplexe Struktur, wenn er hausdorffsch ist.*

Eine wichtige Klasse von Beispielen holomorpher Blätterungen wird durch komplexe Liesche Transformationsgruppen erzeugt. Sei  $X$  ein reduzierter komplexer Raum,  $L$  eine komplexe Liesche Transformationsgruppe von  $X$ . Unter der  $L$ -Bahn durch  $x \in X$  versteht man dann die Menge  $L(x) := \{g(x); g \in L\}$ . Es gilt folgender Satz: (siehe [6], Hilfssatz 2, und [7], Theorem 2):

**SATZ 3.8.** *Haben alle  $L$ -Bahnen von  $X$  die gleiche Dimension  $m$ , dann besitzt jeder Punkt  $x \in X$  eine offene Umgebung der Form  $U_x = A_x \times P^m$ , wobei  $A_x$  ein komplexer Raum und  $P^m$  ein  $m$ -dimensionaler komplexer Polyzylinder sind, so dass die Mengen  $\{a\} \times P^m$ ,  $a \in A_x$ , jeweils ganz in  $L$ -Bahnen liegen.*

**COROLLAR 3.9.**  *$X$  sei ein reduzierter komplexer Raum mit einer komplexen Lieschen Transformationsgruppe  $L$ . Haben alle  $L$ -Bahnen die gleiche Dimension  $m$ , dann gibt es genau eine holomorphe Blätterung  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(X, L)$  von  $X$ , dessen Blätter genau die Zusammenhangskomponenten der  $L$ -Bahnen sind.*

*Bemerkung.* Es genügt im obigen Corollar vorauszusetzen, dass die Dimension der  $L$ -Bahnen lokal konstant ist.

*Beweis.* Unter Verwendung von Satz 3.8 kann man  $\mathfrak{B}$  wie folgt definieren:  $\mathfrak{B} := \{p_x: U_x \rightarrow A_x; x \in X\}$ , wobei  $p_x$  die kanonische Projektion des Produktes  $U_x = A_x \times P^m$  auf die erste Komponente ist.

Ist  $X$  ein reduzierter komplexer Raum und  $L$  eine komplexe  $m$ -dimensionale Liesche Transformationsgruppe von  $X$ , wobei die Bahndimension nicht notwendig lokal konstant ist, dann erzeugt  $L$  eine partielle holomorphe Blätterung von  $X$  im folgenden Sinne:

Es gibt analytische Mengen  $X_0, X_1, \dots, X_m$  von  $X$ , so dass gilt:

$$(1) X = X_m \supset X_{m-1} \supset \dots \supset X_0 \supset X_{-1} = \emptyset$$

(2) Auf  $X_i - X_{i-1}$  ( $i=0, 1, \dots, m$ ) haben alle  $L$ -Bahnen die Dimension  $i$ , d.h.



$X_i - X_{i-1}$  ist  $L$ -invariant und  $L$  erzeugt dort eine holomorphe Blätterung  $\mathfrak{B}_i$ , dessen Blätter Zusammenhangskomponenten  $i$ -dimensionaler  $L$ -Bahnen sind (vergleiche [6], Satz 5, Seite 335).

$X/L$  bezeichne den Bahnenraum von  $L$ ,  $B(X, L)$  sei der Raum der Zusammenhangskomponenten von  $L$ -Bahnen auf  $X$ . Ist  $X/L$  oder  $B(X, L)$  hausdorffsch bzgl. der Quotiententopologie, so ist die Dimension der  $L$ -Bahnen lokal konstant (vergleiche [6], Satz 7, Seite 337), d.h.  $L$  induziert eine holomorphe Blätterung  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(X, L)$  von  $X$ , dessen Blätterraum gerade  $B(X, L)$  ist.

Die Sätze 3.1 und 3.4 dieses Paragraphen ergeben für einen komplexen Raum  $X$  mit einer komplexen Lieschen Transformationsgruppe  $L$  die folgenden Aussagen.

**SATZ 3.10.** *Eine Zusammenhangskomponente einer  $L$ -Bahn ist genau dann (lokal-) analytisch in  $X$ , wenn sie (lokal-) abgeschlossen in  $X$  liegt.*

**SATZ 3.11.**  *$X$  sei reduziert und maximal. Der Raum  $B(X, L)$  der Zusammenhangskomponenten von  $L$ -Bahnen besitzt genau dann eine kanonische komplexe Struktur, wenn er hausdorffsch ist.*

*Bemerkung.* Die Voraussetzung von Satz 3.4, dass  $X$  parakompakt ist, können wir in Satz 3.11 fallen lassen, da alle Lie-Gruppen und damit auch alle  $L$ -Bahnen eine abzählbare Basis besitzen (vergleiche Bemerkung (1) zu Satz 3.4).

**BEISPIEL.** Als komplexen Raum  $X$  wählen wir die offene Menge  $\{z = (z_1 z_2 z_3) \in \mathcal{C}^3; z_3 \neq 0\}$  des  $\mathcal{C}^3$ , versehen mit der üblichen Strukturgarbe  $\mathcal{O}$  der Keime holomorpher Funktionen auf  $X$ . Die holomorphen Pfaffschen Formen

$$\omega_1 = 2z_3 dz_1 + z_1 dz_3$$

$$\omega_2 = 2z_3 dz_2 + z_2 dz_3$$

erzeugen eine analytische Untergarbe  $\Omega'$  der Garbe  $\Omega_X^1$  der holomorphen Pfaffschen Formen auf  $X$ .  $\Omega'$  ist involutorisch auf  $X$ , denn

$$d\omega_1 = 2dz_3 \wedge dz_1 + dz_1 \wedge dz_3 = dz_3 \wedge dz_1 = \frac{1}{2z_3} dz_3 \wedge \omega_1,$$

$$d\omega_2 = 2dz_3 \wedge dz_2 + dz_2 \wedge dz_3 = dz_3 \wedge dz_2 = \frac{1}{2z_3} dz_3 \wedge \omega_2.$$

Da die Linearformen  $\omega_1(z)$ ,  $\omega_2(z)$  in allen Punkten  $z \in X$  linear unabhängig sind, so ist auf Grund des Satzes von Frobenius integrabel. Wir wollen die lokalen Eulerschen Multiplikatoren für das System  $\omega_1, \omega_2$ , suchen. Jeder Punkt  $z^0 = (z_1^0, z_2^0, z_3^0)$  von  $X$  (mit  $z_3^0 \neq 0$ ) besitzt eine offene Umgebung  $U_{z^0}$ , so dass auf  $U_{z^0}$  ein Zweig von

$\sqrt{z_3}$  wohl definiert ist. Dann ist

$$T_1(z) := z_1 \sqrt{z_3}, \quad T_2(z) := z_2 \sqrt{z_3}$$

ein wohl definiertes Paar von holomorphen Stammfunktionen von  $\omega_1, \omega_2$  auf  $U_{z_0}$ , denn

$$dT_1 = \sqrt{z_3} dz_1 + \frac{z_1}{2\sqrt{z_3}} dz_3 = \frac{1}{2\sqrt{z_3}} \omega_1,$$

$$dT_2 = \sqrt{z_3} dz_2 + \frac{z_2}{2\sqrt{z_3}} dz_3 = \frac{1}{2\sqrt{z_3}} \omega_2.$$

$T_{z_0} := (T_1, T_2): U_{z_0} \rightarrow V_{z_0}$  ist eine Submersion von  $U_{z_0}$  auf eine offene Menge  $V_{z_0}$  im  $\mathcal{C}^2$ , bei passender Wahl von  $U_{z_0}$  also eine lokal einfache, einfache, offene, holomorphe Abbildung, d.h. eine lokale Lösung von  $\Omega'$ .

Man verifiziert leicht, dass durch

$$\pi_1(z) := z_1^2 z_3, \quad \pi_2(z) := z_2^2 z_3, \quad \pi_3(z) := z_1 z_2 z_3$$

eine einfache, offene, holomorphe Abbildung  $\pi: X \rightarrow Y$  definiert wird, wobei  $Y := \{w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathcal{C}^3; w_1 w_2 - w_3^2 = 0\}$  ein komplexer Unterraum des  $\mathcal{C}^3$  ist, den wir uns mit der üblichen normalen reduzierten komplexen Struktur versehen denken. Die Fasern von  $\pi$  sind 1-dimensionale zusammenhängende komplexe Untermannigfaltigkeiten von  $X$ , welche die Fasern der lokalen Lösungen  $T_z: U_z \rightarrow V_z$  von  $\Omega'$  jeweils als offene Teilmengen enthalten. Damit ist aber klar, dass die Fasern von  $\pi$  genau die maximalen zusammenhängenden Lösungsflächen von  $\Omega'$  sind, d.h. die Blätter der durch die lokalen Lösungen  $T_z: U_z \rightarrow V_z, z \in X$ , von  $\Omega'$  gegebenen holomorphen Blätterung  $\mathfrak{B}$  von  $X$ .  $Y$  ist dann nichts anderes als der Blätterraum  $B(\mathfrak{B})$  von  $\mathfrak{B}$  oder, anders ausgedrückt, der Parameterraum  $P(\Omega')$  der globalen Lösungsflächen von  $\Omega'$ . Es sei noch bemerkt: Lässt man auf  $X$  die multiplikative Gruppe  $\mathcal{C}^*$  der von Null verschiedenen komplexen Zahlen wie folgt operieren:

$$\tau(z_1, z_2, z_3) := (\tau z_1, \tau z_2, \tau^{-2} z_3), \quad \tau \in \mathcal{C}^*,$$

so stimmen die  $\mathcal{C}^*$ -Bahnen genau mit den Fasern von  $\pi$  überein, d.h.  $Y$  ist der Bahnraum der komplexen Lieschen Transformationsgruppe  $\mathcal{C}^*$  von  $X$ .

## LITERATUR

- [1] ALEXANDROFF, P., und H. HOPF, *Topologie* (Springer, Berlin, 1935).
- [2] BEHNKE, H., und P. THULLEN, *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen*. *Ergeb. Math. 51* (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970).
- [3] BOURBAKI, N., *Topologie Générale*, Chap. I, II (Hermann, Paris, 1961).
- [4] GRAUERT, H., *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen*, *Pub. Math. 5* (1960), 233–292.



- [5] GRAUERT, H., und H. KERNER, *Deformationen von Singularitäten komplexer Räume*, Math. Ann. 153 (1964) 236–260.
- [6] HOLMANN, H., *Komplexe Räume mit komplexen Transformationsgruppen*, Math. Ann. 150 (1963), 327–360.
- [7] HOLMANN, H., *Local properties of holomorphic mappings*, Proc. Conf. on Complex Analysis, Minneapolis, 1964 (Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1965).
- [8] KAUP, B., *Ueber offene analytische Äquivalenzrelationen auf komplexen Räumen*, Math. Ann. 183 (1969), 6–16.
- [9] KAUP, W., *Infinitesimale Transformationsgruppen komplexer Räume*, Math. Ann. 160 (1965), 72–92.
- [10] NARASIMHAN, R., *Analysis on Real and Complex Manifolds* (Masson & Cie, Paris, North-Holland Publ., Amsterdam, 1968).
- [11] PALAIS, R., *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*, Memoirs of the A.M.S., No. 22, (1957).
- [12] REIFFEN, H.-J., *Das Lemma von Poincaré für holomorphe Differentialformen auf komplexen Räumen*, Math. Zeitschr. 101 (1967), 269–284.
- [13] REMMERT, R., *Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume*, Math. Ann. 133 (1957), 328–370.
- [14] ROSSI, H., *Vector fields on analytic spaces*, Ann. Math. 78 (1963), 455–467.
- [15] STEIN, K., *Analytische Zerlegungen komplexer Räume*, Math. Ann. 132 (1956), 63–93.
- [16] STEIN, K., *On Factorisation of Holomorphic Mappings*, Proc. Conf. on Complex Analysis, Minneapolis, 1964 (Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1965).
- [17] WU, W., und G. REEB, *Sur les espaces fibrés et les variétés feuilletées*, Actuelles Scientifiques et Industrielles 1183 (Hermann, Paris, 1952).