

# Überdeckungen mit konvexen Mengen und nichtlineare Gleichungssysteme

Autor(en): **Wille, Friedrich**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **47 (1972)**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-36367>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Überdeckungen mit konvexen Mengen und nichtlineare Gleichungssysteme

VON FRIEDRICH WILLE

## Einleitung

Überdeckungssätze und Aussagen über die Lösbarkeit nichtlinearer Gleichungssysteme sind eng miteinander verknüpft, wie das Beispiel des Lebesgueschen Pflastersatzes und des Brouwerschen Fixpunktsatzes zeigt ([1], S. 376–379), oder auch der Satz von Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk und sein Zusammenhang mit dem Borsukschen Antipodensatz ([1], S. 483–487; [3], Satz I und Satz III; oder [9], Satz 1 und Korollar 1).

In der vorliegenden Arbeit werden Überdeckungen betrachtet, bei denen die Ränder beschränkter Mengen im  $R^n$  in den Vereinigungen endlich vieler konvexer abgeschlossener Mengen liegen. Die Durchschnittseigenschaften dieser Überdeckungen sind denen verwandt, die in Antipodensätzen für die Sphäre vorkommen.

Aus diesem Grunde gelangt man, ähnlich wie bei den Antipodensätzen, von den Überdeckungen zu Lösbarkeitskriterien für nichtlineare Gleichungssysteme, die gewisse Konvexitätseigenschaften besitzen. Zum Beispiel erhält man Nullstellensätze für spezielle konvexe Abbildungen, das sind Abbildungen im  $R^n$ , die komponentenweise konvex sind.

Besonders an den Anwendungen (§4) erkennt man, dass man mit den gewonnenen Sätzen auch Nullstellen gerader Abbildungen nachweisen kann, was ja mit dem Borsukschen Antipodensatz und dem damit verwandten Brouwerschen Fixpunktsatz nicht möglich ist.

Verallgemeinerungen dieser Ergebnisse auf konvexe Operatoren in Banachräumen, vor allem auf Integralgleichungen, werden in [12, 13, 14] angegeben.

Die Beweise in der vorliegenden Schrift benutzen hauptsächlich elementare Methoden der Konvexgeometrie. Sie erfordern daher keine speziellen Vorkenntnisse. Nur vereinzelt werden Ergebnisse der kombinatorischen Topologie herangezogen.

## §1. Analogien bei Überdeckungssätzen

In diesem Abschnitt werden Überdeckungssätze für beschränkte Mengen angegeben, die einen analogen Aufbau besitzen wie bekannte Überdeckungssätze für die Sphäre. Die Analogie soll zunächst am folgenden Satz 1 gezeigt werden.

$R^n$  sei stets ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum, in dem ein inneres Produkt  $(x, y)$  für  $x, y \in R^n$  erklärt ist. Mit  $|x| = \sqrt{(x, x)}$  wird die euklidische Norm von  $x \in R^n$  bezeichnet und mit  $\partial M$  der Rand einer Menge  $M$  aus  $R^n$ . Damit gilt

**SATZ 1.** *Überdecken  $n$  konvexe abgeschlossene Mengen  $A_i$  aus  $R^n$  den Rand einer beliebigen beschränkten Menge  $M \subset R^n$ , so überdecken sie sogar die ganze Menge  $M$ .*

Man kann den Satz auch in folgender Form schreiben.

*Überdecken  $n$  abgeschlossene Mengen  $A_i$  aus  $R^n$  den Rand einer beschränkten Menge  $M \subset R^n$ , wird  $M$  jedoch nicht vollständig von den  $A_i$  überdeckt, so ist wenigstens eins der  $A_i$  nicht konvex.*

In dieser Gestalt läßt der Satz zum Vergleich mit dem Antipodensatz von Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk ([1], S. 487; [3, 5, 6, 9]) ein. Es sei

$$K^n = \{x \in R^n \mid |x| \leq 1\}, \quad n \geq 1,$$

die  $n$ -dimensionale Einheitskugel und ihr Rand

$$\partial K^n = S^{n-1} = \{x \in R^n \mid |x| = 1\}$$

die  $(n-1)$ -dimensionale Einheitssphäre. Ein Antipodenpaar besteht aus zwei Punkten  $x$  und  $-x$  aus  $\partial K^n$ . Eine Teilmenge von  $\partial K^n$  heisst *antipodenfrei*, wenn sie kein Antipodenpaar enthält. Damit gilt

**SATZ 1\*** (Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk). *Überdecken  $n$  abgeschlossene Mengen  $A_i \subset \partial K^n$  die Sphäre  $\partial K^n$ , so enthält wenigstens ein  $A_i$  ein Antipodenpaar.*

Offenbar geht Satz 1, zweite Fassung, in Satz 1\* über, wenn man die beschränkte Menge  $M$  durch  $K^n$  ersetzt, ferner die Voraussetzungen  $\partial M \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$  und  $M \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$  durch  $\partial K^n = \bigcup_{i=1}^n A_i$  ersetzt und statt „konvex“ „antipodenfrei“ schreibt.

An einem zweiten Satzpaar wird die Analogie noch deutlicher.  $\text{cl } A$  bedeutet dabei die abgeschlossene Hülle und  $\text{conv } A$  die konvexe Hülle einer Menge  $A \subset R^n$ .  $\text{int } A$  ist das Innere von  $A$ .

**SATZ 2.** *Aus  $\partial M \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ ,  $M \subset R^n$  beschränkt,  $n \geq 2$ ,  $M \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \neq \emptyset$  und  $A_i \subset R^n$  abgeschlossen und konvex für alle  $i = 1, \dots, n+1$  folgt:*

*Je  $n$  der  $A_i$  und  $Q = \text{cl}(M \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i)$  besitzen einen gemeinsamen Punkt, während der Durchschnitt aller  $n+1$   $A_i$  leer ist.*

**ZUSATZ.**  *$Q \cap \bigcup_{i \neq k} A_i$  besteht aus genau einem Punkt  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n+1$ ), und es gilt  $Q \subset \text{conv}\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ .*

Für die Sphäre gilt dagegen, s.[1], S. 487, Satz X.

SATZ 2\*. Aus  $\partial K^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ ,  $n \geq 2$ ,  $A_i$  abgeschlossen und antipodenfrei für alle  $i = 1, \dots, n+1$ , folgt:

Je  $n$  der  $A_i$  besitzen einen gemeinsamen Punkt, während der Durchschnitt aller  $n+1$   $A_i$  leer ist.

Die Sätze 1 und 1\* wie auch 2 und 2\* haben also die gleiche Form bezüglich der folgenden Analogie.

ANALOGIE 1.

- |   |              |                                      |
|---|--------------|--------------------------------------|
| (a) $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt   | entspricht   | $K^n$ (Einheitskugel).               |
| (b) $\partial M \subset \bigcup_{i=1}^m A_i$ , $M \setminus \bigcup_{i=1}^m A_i \neq \emptyset$ | entspricht   | $\partial K^n = \bigcup_{i=1}^m A_i$ |
| (c) konvex  | entspricht   | antipodenfrei                        |
| (d) $x \in Q = \text{cl}(M \setminus \bigcup_{i=1}^m A_i)$<br>liegt in $n$ Mengen $A_i$         | } entspricht | $x$ liegt in $n$ Mengen $A_i$        |

Überdeckt man  $\partial M$  bzw.  $\partial K^n$  mit einer beliebigen endlichen Anzahl abgeschlossener Mengen  $A_i$ , so erhält man, etwas abweichend von der beschriebenen Analogie, folgendes Satzpaar.

SATZ 3. Aus  $\partial M \subset \bigcup_{i=1}^m A_i$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt,  $n \geq 2$ ,  $M \setminus \bigcup_{i=1}^m A_i \neq \emptyset$  und  $A_i \subset \mathbb{R}^n$  abgeschlossen und konvex für alle  $i = 1, \dots, m$  folgt:

$Q = \text{cl}(M \setminus \bigcup_{i=1}^m A_i)$  enthält einen Punkt, der in  $n$  Mengen  $A_i$  liegt, während der Durchschnitt aller  $A_i$  leer ist.

SATZ 3\*(s. [10], Satz 2). Aus  $\partial K^n = \bigcup_{i=1}^m A_i$ ,  $n \geq 2$ , wobei jedes  $A_i$  abgeschlossen ist und in einer offenen Hemisphäre von  $\partial K^n$  liegt, folgt:

Es existiert ein Punkt in  $\partial K^n$ , der in  $n$  Mengen  $A_i$  liegt. Ferner gilt  $\bigcap_{i=1}^m A_i = \emptyset$ .

Eine offene Hemisphäre von  $\partial K^n$  hat dabei die Gestalt  $H = \{x \in \partial K^n \mid (x, a) > 0\}$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \neq 0$ .

Die beiden Sätze entsprechen sich bezüglich (a), (b), (d) in Analogie 1, während (c) abgewandelt werden muss zu

(c')  $A_i$  konvex entspricht  $A_i$  liegt in einer offenen Hemisphäre.

Eine Verschärfung dieser oder ähnlicher Art lässt sich nicht vermeiden, da Satz 3\* falsch wird, wenn man „ $A_i$  liegt in einer offenen Hemisphäre“ durch „ $A_i$  antipodenfrei“ ersetzt.

Betrachtet man dagegen *symmetrische Überdeckungen*, d.s. Überdeckungen, bei denen mit  $A_i$  stets auch  $-A_i$  eine überdeckende Menge ist, so lässt sich eine vollständige Analogie erreichen. Man hat Analogie 1 nur in folgender Weise sinngemäss abzuwandeln.

## ANALOGIE 2.

- (a<sub>1</sub>)  $M \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt mit  $0 \in M$  entspricht  $K^n$  (Einheitskugel).
- (b<sub>1</sub>)  $\partial M \subset \bigcup_{i=1}^m [A_i \cup (-A_i)]$   
 und  $M \setminus \bigcup_{i=1}^m [A_i \cup (-A_i)] \neq \emptyset$  } entspricht  $\partial K^n = \bigcup_{i=1}^m [A_i \cup (-A_i)]$
- (c) *konvex* entspricht *antipodenfrei*
- (d<sub>1</sub>)  $x \in Q = \text{cl}(M \setminus \bigcup_{i=1}^m [A_i \cup (-A_i)])$   
 liegt in  $n$  Mengen  $A_i \cup (-A_i)$  } entspricht  $x$  liegt in  $n$  Mengen  $A_i \cup (-A_i)$

Analogie 2 unterscheidet sich von Analogie 1 also dadurch, dass anstelle von  $A$  die Menge  $A_i \cup (-A_i)$  steht und  $0 \in M$  vorausgesetzt wird. Folgende Satzgruppen gehen durch Analogie 2 ineinander über.

**VORAUSSETZUNG.** *Es sei  $M$  eine beschränkte Menge des  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , mit  $0 \in M$ . Ferner gelte*

$$\partial M \subset \bigcup_{i=1}^m [A_i \cup (-A_i)],$$

wobei jedes  $A_i \subset \mathbb{R}^n$  abgeschlossen und konvex ist und  $A_i \cap (-A_i) = \emptyset$  (d.h.  $0 \notin A_i$ ) erfüllt. Für

$$Q = \text{cl} \left( M \setminus \bigcup_{i=1}^m [A_i \cup (-A_i)] \right)$$

gilt also  $0 \in Q \neq \emptyset$ . Damit folgt

**SATZ 4.**  $m \geq n$ .

**SATZ 5.** *Aus  $m = n$  ergibt sich*

$$Q \cap \bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset.$$

**SATZ 6.** *In jedem Fall enthält  $Q$  einen Punkt, der in  $n$  Mengen  $A_i \cup (-A_i)$  liegt. Für die Sphäre gilt dagegen folgendes.*

**VORAUSSETZUNG.** *Es sei*

$$\partial K^n = \bigcup_{i=1}^m [A_i \cup (-A_i)], \quad n \geq 2,$$

wobei jedes  $A_i$  abgeschlossen und antipodenfrei ist (also auch  $A_i \cap (-A_i) = \emptyset$  erfüllt).  
 Damit folgt

SATZ 4\* (Ljusternik-Schnirelmann).  $m \geq n$ . ([6], S. 42, Corollaire; [5], Satz II)

SATZ 5\*. Aus  $m = n$  folgt

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset.$$

(A. Granas [4], S. 83, Lemma 14)

SATZ 6\*. In jedem Fall existiert ein Punkt in  $\partial K^n$ , der in  $n$  Mengen  $A_i \cup (-A_i)$  liegt (H. Hadwiger [5], Satz I)

Das Merkwürdige ist, dass sich die Sätze 6 und 6\* völlig entsprechen, während dies für die ähnlich gebauten Sätze 3 und 3\* nicht gilt.

Analogien der beschriebenen Art sind vor allem deswegen nützlich, weil man durch sie zu neuen Vermutungen und Ergebnissen gelangen kann. Dazu sei Folgendes bemerkt.

Bei Satz 5 kann man vermuten, dass  $Q \cap \bigcap_{i=1}^n A_i$  aus genau einem Punkt besteht, da dies bei dem ähnlich gebauten Satz 2 erfüllt ist, s. Zusatz. Doch konnte dies bisher weder bewiesen noch widerlegt werden.

## §2. Beweise zu den Überdeckungen mit konvexen Mengen

Wegen der Ähnlichkeit der Überdeckungen mit konvexen Mengen einerseits und antipodenfreien Mengen andererseits kann man vermuten, dass die Sätze  $k$  sich aus den bekannten Sätzen  $k^*$  herleiten lassen.

Tatsächlich kann man auch Satz 1 und 4 aus Satz 1\* und 4\* mühelos gewinnen, wobei Satz 1 in der zweiten Form zu betrachten ist. Man hat lediglich in  $M$  eine Kugel zu wählen, die von keinem  $A_i$  bzw.  $A_i \cup (-A_i)$  geschnitten wird. Diese Kugel kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit als Einheitskugel  $K^n$  annehmen. Durch  $f(x) = x/|x|$  ( $x \in R^n$ ,  $x \neq 0$ ) wird jede konvexe Überdeckungsmenge  $A_i$  oder  $-A_i$  in eine antipodenfreie Menge auf  $\partial K_n$  übergeführt. Damit folgen aus Satz 1\* und 4\* die Sätze 1 und 4.

Bei den übrigen Sätzen ist eine ähnliche Herleitung nicht ohne weiteres möglich. Aus diesem Grunde sollen für die Sätze  $k$ ,  $k \neq 5$ , direkte Beweise angegeben werden, die nur Methoden der analytischen Geometrie und der Konvexgeometrie benutzen. Zu diesem Zweck formulieren wir einen allgemeineren Satz 7.

SATZ 7. Es sei  $M$  eine beschränkte Menge im  $R^n$ ,  $n \geq 2$ , und

$$\partial M \subset \bigcup_{i=1}^m A_i$$

eine Überdeckung von  $\partial M$  mit  $m$  abgeschlossenen konvexen Mengen  $A_i$ , die nicht die ganze Menge  $M$  überdecken, d.h.

$$Q = \text{cl} \left( M \setminus \bigcup_{i=1}^m A_i \right)$$

ist nicht leer. Bezeichnet man mit  $P$  die Schnittpunktmenge

$P = \{x \mid x \in Q \text{ und } x \text{ liegt im Durchschnitt von wenigstens } n \text{ Mengen } A_i\}$  so folgt:

- (I)  $m \geq n + 1$ ,
- (II)  $Q \subset \text{conv} P$ , also  $P \neq \emptyset$ ,
- (III)  $\bigcap_{i=1}^m A_i = \emptyset$ .

Der Satz fusst auf folgendem

LEMMA 1. Es sei  $M$  eine beschränkte Menge im  $R^n$ ,  $E^n$  ein offener Halbraum in  $R^n$ ,

$$\partial M \cap E^n \subset \bigcup_{i=1}^m A_i,$$

eine Überdeckung mit abgeschlossenen konvexen Mengen  $A_i \subset R^n$  und

$$Q = \text{cl} \left( M \cap E^n \setminus \bigcup_{i=1}^m A_i \right) \neq \emptyset.$$

Damit folgt:

Unter den  $x \in Q$  existiert ein  $x_0$  mit maximalem Abstand von  $\partial E^n$ , welches in  $n$  Mengen  $A_i$  liegt.

*Beweis.* Zunächst zeigen wir, dass in  $Q \cap E^n$  ein  $x_0$  liegt, welches  $n$  Mengen  $A_i$  angehört.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $0 \in \partial E^n$ .  $E^n$  hat also die Form

$$E^n = \{x \in R^n \mid (x, q) > 0\}, \quad q \in R^n, \quad |q| = 1.$$

Wegen  $Q \neq \emptyset$  gibt es ein  $x_1 \in \text{int} Q$  mit

$$\alpha = (x_1, q) > 0. \tag{1}$$

Zu den  $A_i$  betrachten wir die Parallelmengen

$$A_i^\varepsilon = \bigcup_{y \in A_i} \{x \in R^n \mid |x - y| \leq \varepsilon\},$$

wobei  $\varepsilon > 0$  so klein gewählt wird, dass  $x_1$  keinem  $A_i^\varepsilon$  angehört.

Die Menge  $M$  sei durch die Zahl  $r > 0$  beschränkt, d.h.  $|x| \leq r$  für alle  $x \in M$ .

Damit definieren wir den Punkt

$$p = -\frac{r^2}{\alpha} q.$$

Aus Kompaktheitsgründen existiert ein Punkt  $x_\varepsilon$  in

$$Q^\varepsilon = \text{cl} \left( M \cap E^n \setminus \bigcup_{i=1}^m A_i^\varepsilon \right)$$

mit

$$|x_\varepsilon - p| = \max_{x \in Q^\varepsilon} |x - p|. \quad (2)$$

Wir zeigen, dass  $x_\varepsilon$  in  $E^n$  und im Durchschnitt von wenigstens  $n$  Mengen  $A_i^\varepsilon$  liegt.  $x_\varepsilon$  liegt in  $E^n$  aus folgendem Grunde: Es gilt einerseits

$$\begin{aligned} |x_\varepsilon - p|^2 &\geq |x_1 - p|^2 = |x_1 - \alpha q + \alpha q - p|^2 \\ &= |x_1 - \alpha q|^2 + |\alpha q - p|^2 \geq |\alpha q - p|^2 = \left( \alpha + \frac{r^2}{\alpha} \right)^2 > \frac{r^4}{\alpha^2} + 2r^2 \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} |x_\varepsilon - p|^2 &= |x_\varepsilon - (x_\varepsilon, q) q + (x_\varepsilon, q) q - p|^2 \\ &= |x_\varepsilon - (x_\varepsilon, q) q|^2 + |(x_\varepsilon, q) q - p|^2 \leq r^2 + 2 \frac{r^2}{\alpha} (x_\varepsilon, q) + \frac{r^4}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Zusammengenommen folgt

$$\frac{r^4}{\alpha^2} + 2r^2 < r^2 + 2 \frac{r^2}{\alpha} (x_\varepsilon, q) + \frac{r^4}{\alpha^2}$$

und damit

$$(x_\varepsilon, q) > \frac{\alpha}{2}. \quad (3)$$

Daraus folgt insbesondere:  $x_\varepsilon \in E^n$ .

$x_\varepsilon$  gehört  $n$  Mengen  $A_i^\varepsilon$  an, was folgendermassen bewiesen wird.

$x_\varepsilon$  liegt in mindestens einem  $A_i^\varepsilon$ , da  $x_\varepsilon$  Randpunkt von  $Q^\varepsilon$  ist.  $x_\varepsilon$  sei, nach geeigneter Umnummerierung, in  $A_1^\varepsilon, \dots, A_s^\varepsilon$  enthalten, jedoch nicht in  $A_i^\varepsilon$  mit  $i > s$ . Wir nehmen  $s < n$  an und führen dies zum Widerspruch.

Da  $x_\varepsilon \in Q^\varepsilon$  von  $\partial M \cap E^n$  mindestens den Abstand  $\varepsilon > 0$  hat, ist  $x_\varepsilon$  innerer Punkt von  $M \cap E^n$ . Es gibt also eine Umgebung  $U \subset M \cap E^n$  von  $x_\varepsilon$ , die kein  $A_i^\varepsilon$  mit  $i > s$  schneidet.



In  $x_\varepsilon$  errichte man an jedes  $A_i^\varepsilon$  mit  $i \leq s$  eine Stützhyperebene  $H_i$  und bilde

$$V = U \cap \bigcap_{i=1}^s H_i.$$

$V$  liegt ganz in  $Q^\varepsilon$ , denn kein Punkt von  $\bigcap_{i=1}^s H_i$  ist innerer Punkt von  $A_i^\varepsilon$ ,  $i \leq s$ , und kein Punkt von  $U$  liegt in  $A_i^\varepsilon$ ,  $i > s$ . Da die Dimension von  $\bigcap_{i=1}^s H_i$  grösser oder gleich  $n-s \geq 1$  ist, enthält  $V$  wenigstens eine Strecke, die  $x_\varepsilon$  als inneren Punkt enthält. Auf dieser Strecke existiert aber ein Punkt  $z$  mit  $|z-p| > |x_\varepsilon-p|$ . Da  $z \in V \subset Q^\varepsilon$  gilt, ist (2) verletzt. Also folgt  $s \geq n$ , d.h.  $x_\varepsilon$  ist in wenigstens  $n$  Mengen  $A_i^\varepsilon$  enthalten.

Mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  erhält man aus Kompaktheitsgründen und wegen (3): Es gibt mindestens ein  $x_0 \in Q \cap E^n$ , welches in  $n$  Mengen  $A_i$  liegt.

Damit gibt es aber auch ein  $x_0 \in Q \cap E^n$ , welches

$$(x_0, q) = \max_{x \in Q} (x, q) = \beta \tag{4}$$

erfüllt und  $n$  Mengen  $A_i$  angehört. Definiert man nämlich die Halbräume

$$E_k^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid (x, q) > \frac{k}{k+1} \beta \right\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

so folgt aus dem eben Bewiesenen, dass in jedem  $Q \cap E_k^n$  ein  $x_k$  existiert, welches  $n$  Mengen  $A_i$  angehört. Jeder Häufungspunkt  $x_0$  der Folge  $\{x_k\}$  gehört dann  $n$  Mengen  $A_i$  an. Ausserdem besitzt  $x_0$  maximalen Abstand von  $\partial E^n$ , womit alles bewiesen ist.

*Beweis des Satzes 7. (I).* Angenommen, es ist  $m \leq n$ .  $x_1$  sei ein Punkt in  $M$ , der keinem  $A_i$  angehört. Dann existiert nach dem Trennungssatz ([8], S. 37, Satz 2.14) ein offener Halbraum  $E^n \subset \mathbb{R}^n$  mit  $x_1 \in E^n$ , der  $A_1$  nicht schneidet. In  $E^n \cap M$  muss es nach Lemma 1 einen Punkt  $x_0$  geben, der  $n$  Mengen  $A_i$  angehört. Das ist aber unmöglich, da  $E^n$  von höchstens  $n-1$  Mengen  $A_i$  geschnitten wird.

(II). Es sei  $\tilde{Q} = M \setminus \bigcup_{i=1}^m A_i$ , also  $Q = \text{cl } \tilde{Q}$ . Zu zeigen ist  $\tilde{Q} \subset \text{conv } P$ , dann ist auch  $Q \subset \text{conv } P$  erfüllt, da  $\text{conv } P$ , ebenso wie  $P$ , kompakt ist. Angenommen, es gilt  $\tilde{Q} \not\subset \text{conv } P$ . Dann gibt es ein  $x_1 \in \tilde{Q}$ ,  $x_1 \notin \text{conv } P$ , zu dem ein offener Halbraum  $E^n \subset \mathbb{R}^n$  existiert mit  $x_1 \in E^n$  und  $\text{conv } P \cap E^n = \emptyset$ . In  $E^n$  existiert aber nach Lemma 1 ein Punkt aus  $P$ , also folgt  $\text{conv } P \cap E^n \neq \emptyset$  und damit ein Widerspruch.

(III). Schliesslich beweisen wir  $\bigcap_{i=1}^m A_i = \emptyset$ . Es sei  $z_0 \in \tilde{Q}$ . Angenommen, es gibt einen Punkt  $x_0$ , der in allen  $A_i$  liegt. Dann trifft die von  $x_0$  ausgehende Halbgerade durch  $z_0$  den Rand  $\partial M$  in einem Punkt  $y_0$  ausserhalb der Strecke  $[x_0, z_0] = \text{conv}\{x_0, z_0\}$ . Da  $y_0$  in einem  $A_i$  liegt, und  $x_0$  ebenfalls in diesem  $A_i$ , so gehört auch  $z_0 \in [x_0, y_0]$  zu  $A_i$ , was  $z_0 \in \tilde{Q}$  widerspricht.

Damit ist Satz 7 bewiesen.

Satz 1 ist gleichbedeutend mit (I) in Satz 7, Satz 3 und Satz 6 erhält man aus (II), (III).

*Beweis des Satzes 2.* Es genügt zu zeigen, dass  $Q \cap \bigcap_{i=1}^n A_i$  aus genau einem Punkt besteht.

Zunächst beweisen wir, dass  $Q \cap \bigcap_{i=1}^n A_i$  nicht leer ist. Es existiert ein  $x_1 \in Q$  und ein Halbraum  $E^n \subset R^n$  mit  $x_1 \in E^n$ ,  $E^n \cap A_{n+1} = \emptyset$ . Mit Lemma 1 folgt damit die Existenz eines Punktes  $x_0 \in E^n \cap Q \cap \bigcap_{i=1}^n A_i$ ,

$Q \cap \bigcap_{i=1}^n A_i$  besteht nur aus einem Punkt  $x_0$ . Nimmt man nämlich an, es existiert ein weiterer Punkt  $z_0 \neq x_0$  in  $Q \cap \bigcap_{i=1}^n A_i$ , so kann man  $z_0$  durch eine Folge  $\{z_k \mid k=1, 2, \dots\}$  aus  $\tilde{Q} = M \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$  approximieren. Die Gerade durch  $x_0$  und  $z_k$  schneidet  $\partial M$  in einem Punkt  $y_k$ , der  $z_k \in [x_0, y_k]$  erfüllt ( $k=1, 2, 3, \dots$ ). Damit folgt  $y_k \in A_{n+i}$ , denn  $y_k \in \partial M$  liegt in wenigstens einem  $A_i$ . Aus  $y_k \in A_i$  mit  $i \leq n$  würde wegen  $x_0 \in A_i$  aber  $z_k \in A_i$  folgen, was  $z_k \in \tilde{Q}$  widerspricht.

Da die Folge  $\{y_k\}$  beschränkt ist, besitzt sie einen Häufungspunkt  $y_0$ , der  $z_0 \in [x_0, y_0]$  und  $y_0 \in A_{n+1}$  erfüllt. Führt man die gleiche Überlegung noch einmal durch, wobei  $x_0$  und  $z_0$  ihre Rollen tauschen, so erhält man die Existenz eines  $y_1 \in A_{n+1}$  mit  $x_0 \in [z_0, y_1]$ . Also liegen  $x_0$  und  $z_0$  auf der Strecke  $[y_0, y_1]$ , d.h.  $x_0, z_0 \in A_{n+1}$ .  $x_0$  ist somit in allen  $A_i$  enthalten. Das ist aber nach Satz 7 (III) unmöglich.

Damit ist Satz 2 samt Zusatz bewiesen.

*Beweis des Satzes 4.* Angenommen, es ist  $m < n$ . Es sei  $H_i$  eine Hyperebene durch 0 mit  $A_i \cap H_i = \emptyset$ , also wegen  $H_i = -H_i$  auch  $(-A_i) \cap H_i = \emptyset$ ,  $i=1, \dots, m$ . Der lineare Unterraum  $\bigcap_{i=1}^m H_i$  besitzt mindestens die Dimension  $n - m \geq 1$ . Er enthält also eine Gerade durch 0, die kein  $A_i$  schneidet. Das kann nicht sein, da die Gerade wegen  $0 \in M$  den Rand  $\partial M$  trifft, der von den  $A_i$  überdeckt wird.

Zum Beweise von Satz 5 ziehen wir ein Hilfsmittel aus der kombinatorischen Topologie heran, nämlich das folgende Lemma von Sperner. Unter einem *n-dimensionalen euklidischen Simplex*  $\Delta^n$  verstehen wir dabei die konvexe Hülle von  $n+1$  Punkten  $x_0, \dots, x_n$  des  $R^n$  die nicht alle in einer Hyperebene liegen. Das Simplex  $\Delta^n$  wird von den  $n+1$  ( $n-1$ )-dimensionalen Seiten  $S_i = \text{conv}\{x_k \mid k \neq i\}$  berandet. Damit lautet das Spornersche Lemma:

LEMMA 2 ([1], S. 378, Satz B). *Überdeckt man  $\Delta^n$  mit abgeschlossenen Mengen  $B_0, B_1, \dots, B_n$ , wobei  $B_i \cap S_i = \emptyset$  für alle  $i=0, 1, \dots, n$  erfüllt ist, so folgt*

$$\bigcap_{i=0}^n B_i \neq \emptyset.$$

*Beweis des Satzes 5.* Zu zeigen ist  $Q \cap \bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$ .

Zu jedem  $A_i$  existiert wegen  $0 \notin A_i$  eine Hyperebene durch 0, die  $A_i$  nicht schneidet und folglich auch  $-A_i$  nicht trifft. Es gibt also zu jedem  $A_i$  einen Halbraum

$$E_i = \{x \in R^n \mid (x, q_i) > 0\}, \quad |q_i| = 1,$$

mit  $A_i \subset E_i$ ,  $-A_i \cap \text{cl} E_i = \emptyset$ . Die Punkte  $q_1, \dots, q_n$  sind linear unabhängig. Wären sie nämlich linear abhängig, so enthielte  $\bigcap_{i=1}^n \partial E_i$  mindestens eine Gerade durch 0. Diese Gerade träfe kein  $A_i$  oder  $-A_i$ , also auch keinen Punkt aus  $\partial M$ , was nicht sein kann.

Aus diesem Grunde sind auch die Geraden

$$g_k = \bigcap_{i \neq k} \partial E_i, \quad k = 1, \dots, n,$$

linear unabhängig, d.h. ihre konvexe Hülle bildet den ganzen Raum  $R^n$ . Man wähle nun auf jeder Geraden  $g_k$  einen Punkt  $x_k$  mit  $x_k \in E_k$ , so dass  $M$  im Inneren des „Hyperoktaeders“  $\text{conv}\{x_1, -x_1, x_2, -x_2, \dots, x_n, -x_n\}$  liegt. Wir betrachten nun das  $n$ -dimensionale euklidische Simplex  $\Delta^n = \text{conv}\{0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  und versuchen darauf das Spernersche Lemma anzuwenden.

Die Mengen  $B_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , werden folgendermassen aus den  $A_i$  gewonnen. Man wähle zu jedem  $A_i$  eine Parallelmeng  $A_i^\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , die ebenso wie  $A_i$  in  $E_i$  liegt. Ferner sei  $C_i$  der von  $A_i$  aufgespannte Kegel

$$C_i = \{\lambda x \mid x \in A_i, \lambda \geq 0\}.$$

Damit bildet man

$$B_i = A_i^\varepsilon \cup \text{cl}(C_i \setminus M) \quad \text{für } i = 1, \dots, n,$$

und

$$B_0 = \text{cl} \left( M \setminus \bigcup_{i=1}^n [A_i^\varepsilon \cup (-A_i^\varepsilon)] \right).$$

Die  $B_i$ ,  $i=0, 1, \dots, n$ , erfüllen bezüglich  $\Delta^n$  die Voraussetzungen des Spernerschen Lemmas. Es gibt also ein  $x_\varepsilon$ , welches im Durchschnitt aller  $B_i$  liegt. Da  $B_0$  im Inneren von  $M$  liegt, ist auch  $x_\varepsilon$  ein Punkt von  $M$ . Mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt aus der Kompaktheit von  $\text{cl} M$ : Es gibt ein  $x_0 \in Q = \text{cl}(M \setminus \bigcup_{i=1}^n [A_i \cup (-A_i)])$ , welches in allen  $A_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , enthalten ist.

Damit ist Satz 5 bewiesen.

### §3. Gleichungssysteme mit Konvexitätseigenschaften

Wie kann man nun die bewiesenen Überdeckungssätze ausnutzen, um über die Lösungen von reellen Gleichungssystemen

$$f_i((x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x_1, \dots, x_n \text{ reell}, \quad (5)$$

etwas auszusagen, wobei die Funktionen  $f_i: M \rightarrow R^1$ ,  $M \subset R^n$ , im allgemeinen als nicht-linear vorausgesetzt werden?

Man geht im Prinzip so vor, dass man die Mengen

$$A_i = \{x \in M \mid f_i(x) \leq 0\} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n,$$

und

$$A_{n+1} = \{x \in M \mid f_i(x) \geq 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n\}$$

bildet. Besitzen die Mengen  $A_i$ ,  $i=1, \dots, n+1$ , aufgrund eines Überdeckungssatzes einen gemeinsamen Punkt  $x=(x_1, \dots, x_n)$  so ist dieser Punkt Lösung des Gleichungssystems (5).

Um diese Methode, möglicherweise leicht abgewandelt, mit den bewiesenen Überdeckungssätzen zusammen anwenden zu können, müssen die Gleichungssysteme gewisse Konvexitätseigenschaften besitzen.

Das einfachste wäre, wenn alle  $f_i$  konvexe Funktionen wären, d.h. wenn für jedes Tripel  $x, y, z$  aus  $M$  mit  $y=\lambda x+(1-\lambda)z$ ,  $0<\lambda<1$ , die Ungleichung  $f_i(y) \leq \lambda f_i(x) + (1-\lambda)f_i(z)$  gelten würde. Die durch  $f=(f_1, \dots, f_n)$  definierte Abbildung  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  heisst dann eine *spezielle konvexe Abbildung*.

Man kommt aber meistens mit der Bedingung aus, dass

$$A_i = \{x \in M \mid f_i(x) \leq 0\}$$

aus einer oder mehreren Zusammenhangskomponenten besteht, die konvex bzgl.  $M$  sind. Dabei heisst eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  *konvex bzgl.  $M \subset \mathbb{R}^n$* , wenn mit  $x, y \in A$  auch  $[x, y] \cap M$  zu  $A$  gehört, wobei  $[x, y]$  wie üblich die Verbindungsstrecke von  $x$  und  $y$  ist.

Die oben genannte Bedingung ist z.B. für die Funktion  $f_i(x)=x_1 \cdot x_2 + 1$  ( $x_1, x_2$  reell) erfüllt, obwohl  $f_i$  keineswegs eine konvexe Funktion ist.

Im Folgenden sei in  $\mathbb{R}^n$  eine feste Basis gewählt, bezüglich der jeder Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$   $n$  reelle Komponenten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  besitzt und jede Abbildung  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  in Komponenten  $f_i: M \rightarrow \mathbb{R}^1$  zerfällt:  $f=(f_1, f_2, \dots, f_n)$ . Mit  $\mathbb{R}_+^n$  bezeichnen wir im Folgenden den *natürlichen Kegel*

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_k \geq 0 \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n\}$$

**SATZ 8.** *Es sei  $f=(f_1, f_2, \dots, f_n)$  eine stetige Abbildung einer abgeschlossenen beschränkten Menge  $M \subset \mathbb{R}^m$  in den  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \leq m$ , wobei Folgendes gilt:*

(a) *Es gibt ein  $\varepsilon_0 > 0$ , so dass die Mengen  $\{x \in M \mid f_i(x) \leq -\varepsilon\}$  für alle  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  und  $i=1, \dots, n$  konvex bzgl.  $M$  sind,*

(b)  $f(\partial M) \cap \mathbb{R}_+^n = \emptyset$ .

*Damit folgt:  $f$  besitzt keine Nullstelle in  $M$ . Allgemeiner gilt  $f(M) \cap \mathbb{R}_+^n = \emptyset$ .*

*Beweis.* Man wähle ein  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , welches kleiner als der Abstand zwischen  $f(\partial M)$

und  $R_+^n$  ist, bilde die Mengen

$$A_i = \text{conv} \left\{ x \in M \mid f_i(x) \leq -\frac{\varepsilon}{2} \right\} \quad \text{für } i = 1, \dots, n,$$

$$A_i = \emptyset \quad \text{für } i = n + 1, \dots, m \quad (\text{falls } n < m),$$

und verifiziere für sie die Voraussetzungen von Satz 1 (mit  $m$  statt  $n$ ). Aus Satz 1 folgt dann  $f(M) \cap R_+^n = 0$ .

**SATZ 9.** *Es sei  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  eine stetige Abbildung einer abgeschlossenen Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^n$ , wobei Folgendes gilt:*

- (a) *Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten der Mengen  $\{x \in M \mid f_i(x) \leq 0\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ist endlich. Jede dieser Zusammenhangskomponenten ist konvex bzgl.  $M$ ,*  
 (b) *es gibt einen offenen Halbraum  $E \subset \mathbb{R}^n$ , für den  $M \cap E$  beschränkt,  $f(\partial M \cap \text{cl } E) \cap \mathbb{R}_+^n = \emptyset$  und  $f(M \cap E) \cap \text{int } \mathbb{R}_+^n \neq \emptyset$  ist.*

*Damit folgt:  $f$  besitzt eine Nullstelle in  $\text{int } M \cap E$ .*

**ZUSATZ.** *Gilt anstelle von (a):*

- (a') *Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  ist  $B_i = \{x \in M \mid f_i(x) \leq 0\}$  konvex bzgl.  $M$  und  $f_i(x) < 0$  für alle  $x \in \text{int } B_i$ ,*

*so folgt mit den übrigen Voraussetzungen von Satz 9:  $f$  besitzt genau eine Nullstelle in  $M$ . Sie liegt in  $\text{int } M \cap E$ .*

Dazu sei Folgendes bemerkt: Ist  $f$  eine spezielle konvexe Abbildung, d.h.: sind alle  $f_i$  konvexe Funktionen, so ist unter den Voraussetzungen von Satz 9 die Bedingung (a') im Zusatz automatisch erfüllt. Man hat also in diesem Falle die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung  $f(x) = 0$ . Damit wird ein Satz von G. J. Rieger ([7], §7, Satz 6) verallgemeinert (Dort wird eine Funktion  $f$  konvex genannt, wenn  $-f$  konvex in unserem Sinne ist).

*Beweis des Satzes 9.* Man nummeriere die Zusammenhangskomponenten der Mengen  $\{x \in M \mid f_i(x) \leq 0\}$  fortlaufend durch:  $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ , und bilde die Mengen

$$A_i = \text{conv } Z_i \quad \text{für alle } i = 1, 2, \dots, m.$$

Lemma 1 ergibt dann die Behauptung von Satz 9.

*Beweis des Zusatzes.* Nach Satz 9 existiert eine Nullstelle  $x_0 \in \text{int } M \cap E$  von  $f$ . Angenommen, es existiert noch eine weitere Nullstelle  $x_1$  in  $M$ . Dann trifft die Gerade  $g$  durch  $x_0$  und  $x_1$  das Randstück  $\partial M \cap \text{cl } E$ . Sei  $x_2$  ein Punkt aus  $g \cap \partial M \cap \text{cl } E$ , der  $x_0$  am nächsten liegt, jedoch nicht zwischen  $x_0$  und  $x_1$ . Überlegt man sich die möglichen Lagen von  $x_1$ , so findet man leicht, dass es einen solchen Punkt geben muss.

Wegen  $f(\partial M \cap \text{cl } E) \cap \mathbb{R}_+^n = \emptyset$  gilt  $f_i(x_2) < 0$  für wenigstens ein  $i$ . Man wähle nun ein  $x_3 \in g \cap \text{int } M$ , welches näher an  $x_2$  liegt als  $x_0$  und  $x_1$ , und welches  $f_i(x_3) < 0$  er-

füllt. Aus Stetigkeitsgründen gibt es ein solches  $x_3$ .  $x_3$  ist also innerer Punkt von  $B_i$ . Damit muss aber, wegen der Konvexität von  $B_i$ , einer der Punkte  $x_0$  oder  $x_1$  ebenfalls im Inneren von  $B_i$  liegen, was nach (a') wegen  $f_i(x_0)=f_i(x_1)=0$  nicht sein kann.

Damit ist der Zusatz bewiesen.

SATZ 10. *Es sei  $M$  eine abgeschlossene beschränkte Menge im  $R^n$  mit  $0 \in M$  und  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : M \rightarrow R^n$  eine stetige Abbildung mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *Für jedes  $i = 1, \dots, n$  ist  $B_i = \{x \in M \mid f_i(x) \leq 0\}$  konvex bzgl.  $M$ .*

(b)  *$f(0) \in \text{int } R_+^n$*

(c) *Es existiert eine abgeschlossene Teilmenge  $D$  von  $\partial M$  mit  $\partial M = D \cup (-D)$  und  $f(D) \cap R_+^n = \emptyset$ .*

*Daraus folgt:  $f$  besitzt eine Nullstelle in  $\text{int } M$ .*

*Beweis.* Mit  $A_i = \text{conv } B_i$  und Satz 5 erhält man sofort die Behauptung.

Ob man die Eindeutigkeit der Nullstelle beweisen kann, wenn man statt (a) die Bedingung (a') aus dem Zusatz zu Satz 9 voraussetzt, ist bisher unbekannt.

Wie schon erwähnt, sind (a) oder (a') stets erfüllt, wenn  $f$  eine spezielle konvexe Abbildung ist. Allgemeinere konvexe Abbildungen, vor allem in Banachräumen, werden in [12, 13, 14] behandelt.

#### §4. Anwendungen

Beispiele für die Nullstellensätze lassen sich insbesondere unter Systemen mit Polynomgleichungen leicht finden. Zur Demonstration seien einige einfache Systeme angegeben.

BEISPIEL 1. Betrachtet wird das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &\equiv (x_1 - 1)^2 + x_2^4 + (x_3 - \frac{1}{2})^6 - \frac{3}{2} = 0 \\ f_2(x) &\equiv (x_1 - \frac{1}{2})^2 + (x_2 - 1)^4 + x_3^6 - \frac{3}{2} = 0 \\ f_3(x) &\equiv x_1^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^4 + (x_3 - 1)^6 - \frac{3}{2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

mit  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $x_i$  reell.

Es soll gezeigt werden, dass dieses Gleichungssystem in dem Würfel  $M$  mit den Ecken  $P_{jkl} = (j, k, l)$ ,  $j, k, l \in \{0, 1\}$ , keine Lösung  $x$  besitzt. Dazu wird Satz 8 benutzt.

Die Bedingung (a) in Satz 8 ist sicher erfüllt, da die  $f_i$  als Summen einfacher konvexer Funktionen konvex sind. Es soll dem Leser überlassen bleiben, die Bedingung (b),  $f(\partial M) \cap R_+^3 = \emptyset$ , nachzuweisen. Man hat dazu lediglich die Werte der Funktionen  $f_i$  in den acht Ecken  $P_{jkl}$  zu berechnen. Daraus erkennt man leicht, dass jedes  $f_i$  auf zwei Seiten des Würfels  $M$  negativ ist, wodurch auf allen sechs Seiten (b) erfüllt ist. Satz 8 ergibt dann die Unlösbarkeit von (6) in  $M$ .

BEISPIEL 2. Gelöst werden soll das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &\equiv 1 - 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ f_2(x) &\equiv 1 + x_1^2 - 4x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ f_3(x) &\equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x_1^4 + \frac{1}{6}x_2^6 - x_3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

mit  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $x_i$  reell.

Mit Satz 9 lässt sich zeigen: Das Gleichungssystem besitzt mindestens vier Lösungen in dem Quader  $M$  mit den Ecken  $P_{jkl} = (j, k, l)$ ,  $j, k \in \{1, -1\}$ ,  $l \in \{0, 1\}$ .

Es genügt die Existenz einer Lösung  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  sicherzustellen, weil damit offenbar  $(-\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ ,  $(\bar{x}_1, -\bar{x}_2, \bar{x}_3)$  und  $(-\bar{x}_1, -\bar{x}_2, \bar{x}_3)$  ebenfalls Lösungen sind, wobei  $\bar{x}_1 \neq 0$  und  $\bar{x}_2 \neq 0$  gilt. Letzteres stellt man durch Einsetzen in  $f_1(x) = 0$  und  $f_2(x) = 0$  sofort fest.

$f_1$  und  $f_2$  sind nicht konvex, was den Nachweis von (a) in Satz 9 etwas beschwerlicher macht. Man erkennt jedoch: Die durch  $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid f_1(x) = 0\}$  beschriebene Fläche ist ein zweischaliges Hyperboloid.  $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f_1(x) \leq 0\}$  stellt daher die beiden Schalen mit „Füllung“ dar und zerfällt somit in zwei konvexe Zusammenhangskomponenten. Das gleiche gilt für  $f_2$ . Da ferner  $f_3$  konvex ist, gilt Bedingung (a) in Satz 9.

Wählt man zum Nachweis von (b) in Satz 9 den Halbraum  $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$ , so erkennt man die Gültigkeit von (b) durch Berechnung der Werte von  $f_i$  in den Ecken  $P_{jkl}$  und in 0. Satz 9 liefert damit die gesuchte Lösungsexistenz.

Zum Schluss betrachten wir noch zwei allgemeinere Beispiele.

BEISPIEL 3. Es soll das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} f_k(x) &\equiv \sum_{i=1}^m a_k^{(i)} x_k^i + \sum_{i=1}^s \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n b_{kj}^{(i)} x_j^i - c_k = 0 \\ \text{mit } k &= 1, \dots, n, \quad n \geq 2, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

untersucht werden, wobei  $a_k^{(i)}$ ,  $b_{kj}^{(i)}$  und  $c_k$  nichtnegative reelle Zahlen sind, die die Ungleichungen

$$0 \leq \sum_{i=1}^s b_{kj}^{(i)} < c_k < \sum_{i=1}^m a_k^{(i)} \cdot n^{-i} \quad (9)$$

für alle  $j = 1, \dots, n$  und  $k = 1, \dots, n$  erfüllen.

Mit dem Zusatz zu Satz 9 soll gezeigt werden, dass (8) in  $\mathbb{R}_+^n$  genau eine Lösung besitzt.

Die Funktionen  $f_k$  sind sämtlich konvex. Es ist also, wie im Anschluss an den Zusatz in §3 bemerkt wurde, nur die Voraussetzung (b) im Satz 9 zu verifizieren.

Es ist  $M = \mathbb{R}_+^n$ . Man wähle einen Halbraum  $E \subset \mathbb{R}^n$ , der aus  $\mathbb{R}_+^n$  ein euklidisches Sim-

plex herauschneidet, und zwar das Simplex  $\Delta^n$ , dessen Ecken die Einheitsvektoren und der Ursprung 0 sind:

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, p) < |p|^2\} \quad \text{mit} \quad p = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right).$$

Aus den Vorzeichen der Werte der Funktionen  $f_i$  in  $p$  und in den Ecken von  $\Delta^n = M \cap \text{cl} E$  erkennt man, dass (b) in Satz 9 gilt. Also folgt: *Das Gleichungssystem (8) besitzt genau eine Lösung  $x$  in  $\mathbb{R}_+^n$ .*

Weitere Beispiele zu Satz 9 findet man bei G. J. Rieger [7].

Schliesslich soll Satz 10 angewendet werden.

**BEISPIEL 4.** Gelöst werden soll das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} f_k(x) &\equiv \sum_{i=1}^m (1 - x_k)^i \cdot a_k^{(i)} + \sum_{i=1}^s \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n b_{kj}^{(i)} \cdot x_j^i - c_k = 0, \\ k &= 1, \dots, n, \quad n \geq 2, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

wobei  $x = (x_1, \dots, x_n)$  in dem Würfel

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_k \leq 1 \text{ für alle } k\}$$

variiert. Dabei gelte  $a_k^{(i)} \geq 0, c_k > 0, b_{jk}^{(i)} \geq 0, a_k^{(1)} \geq 0$  für alle  $k, j$  und alle  $i \geq 2$ , sowie

$$\sum_{i=2}^s \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n b_{kj}^{(i)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |b_{kj}^{(1)}| < c_k < \sum_{i=1}^m a_k^{(i)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |b_{kj}^{(1)}| \quad \text{für alle } k. \quad (14)$$

$f_k$  wird zu einer konvexen Funktion

$$\tilde{f}_k(x) \equiv \sum_{i=1}^m |1 - x_k|^i a_k^{(i)} + \sum_{i=2}^s \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n b_{kj}^{(i)} |x_j|^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n b_{kj}^{(1)} \cdot x_j - c_k$$

auf den Einheitswürfel  $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_k| \leq 1 \text{ für alle } k\}$  erweitert. Die Abbildung  $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)$ , definiert auf  $M$ , soll mit Satz 10 untersucht werden. Dabei sei

$$D = \bigcup_{k=1}^n \{x \in M \mid x_k = 1\}$$

woraus  $\partial M = D \cup (-D)$  folgt: Aus (14) folgt

$$\tilde{f}(0) \in \text{int } \mathbb{R}_+^n \quad \text{und} \quad \tilde{f}(D) \cap \mathbb{R}_+^n = \emptyset,$$

denn auf  $\{x \in M \mid x_k = 1\}$  gilt offenbar  $\tilde{f}_k(x) < 0$  für alle  $k$ .



Durch Anwendung von Satz 10 wird damit die Existenz einer Nullstelle  $x_0 \in M$  von  $f$  geliefert.  $x_0$  liegt in  $W$ , da aus (14) folgt, dass für  $x \in M$ ,  $x \notin W$ , also  $x_k < 0$  für ein  $k$ , die Ungleichung  $f_k(x) > 0$  gilt. Also folgt:

*Das System (13) besitzt eine Lösung in  $W$ .*

Zum Schluss sei bemerkt, dass man bei speziellen konvexen Abbildungen, die die Voraussetzungen von Satz 9 befriedigen, die Lösung auch konstruktiv gewinnen kann. Von Rieger [7] ist gezeigt worden, dass das Regula-falsi-Verfahren stets die Nullstelle liefert, wenn die Voraussetzungen von Satz 9 gelten und  $M$  ein  $n$ -dimensionales euklidisches Simplex ist. Unter den gleichen Voraussetzungen hat B. Bongers [2] gezeigt, dass auch das schnellere Newton-Verfahren zur Nullstelle führt. Dabei ist das Newton-Verfahren in sinnvoller Weise sogar auf stetige nichtdifferenzierbare Abbildungen ausgedehnt worden. Es ist eine offene Frage, ob man die Nullstellen in Satz 10 in ähnlicher Weise gewinnen kann.

#### LITERATUR

- [1] ALEXANDROFF, P., HOPF, H., *Topologie*, 1. Band. N. Y., 1965.
- [2] BONGERS, B., *Newton-Verfahren für nichtdifferenzierbare konvexe Abbildungen in endlichdimensionalen Räumen*, Staatsexamensarbeit, Düsseldorf, 1971.
- [3] BORSUK, K., *Drei Sätze über die  $n$ -dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Math. 20 (1933), 177–190.
- [4] GRANAS, A., *The Theory of Compact Vector Fields and Some of its Applications to Topologie of Functional Spaces (I)*, Rozprawy Matematyczne, Warszawa, 1962.
- [5] HADWIGER, H., *Elementare Kombinatorik und Topologie*, El. Math. 15 (1960), 49–60.
- [6] LJUSTERNIK, L., SCHNIRELMANN, L., *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*, Paris, 1934 (Moskau, 1930).
- [7] RIEGER, G. J., *Die Regula falsi für Systeme konvexer Gleichungen*, Math. Nachr. 40 (1969), 154–164.
- [8] VALENTINE, F. A., *Konvexe Mengen*, B. I. Mannheim, 1968.
- [9] WILLE, F., *Verallgemeinerung der Sätze von Borsuk-ulam und Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk auf nicht-antipodische Punktepaare*, Monatsh. Math. 74 (1970), 351–370.
- [10] —, *Durchschnitts- und Distanzeigenschaften bei Überdeckungen von Kugel, Sphäre und Raum*, Arch. Math. 21 (1970), 666–672.
- [11] —, *Zur Überdeckung der Sphäre mit sphärisch streng konvexen Mengen*. Math. Phys. Sem. Ber. 17 (1970), 221–222.
- [12] —, *Überdeckungen mit konvexen Mengen und Nullstellen konvexer Abbildungen*, Habilitationsschrift, Düsseldorf, 1970.
- [13] —, *Nullstellen konvexer Operatoren*, Zeitschr. Angew. Math. Mech. 52 (1972) T196.
- [14] —, *Nichtlineare Operatoren mit Konvexitätseigenschaften*. (Erscheint demnächst.)

*Mathematisches Institut der Universität Düsseldorf,  
Düsseldorf BR Deutschland*

Eingegangen den 11. Januar 1972