Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Band: 47 (1972)

Artikel: Zur Dualitätstheorie kompakt erzeugter und lokalkonvexer Vektorräume
Autor: Fröhlicher, Alfred / Jarchow, Hans
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36368

Zur Dualitätstheorie kompakt erzeugter und lokalkonvexer Vektorräume[1])

ALFRED FRÖLICHER und HANS JARCHOW

Einleitung

Der Dualraum eines lokalkonvexen Raumes lässt sich auf viele Arten topologisieren. Für eine Kategorie lokalkonvexer Räume, die auch nicht-normierbare Räume enthält, ist es jedoch nicht möglich, diese Topologisierung in funktorieller Weise derart vorzunehmen, dass die Evaluationsabbildung stetig wird.

Kompakt erzeugte Vektorräume verhalten sich in dieser Beziehung wesentlich angenehmer. Unter den kompakt erzeuten Topologien auf dem Dualraum eines kompakt erzeugten Vektorraumes E gibt es eine, welche nicht nur die Evaluation stetig macht, sondern ausserdem durch eine universelle Eigenschaft ausgezeichnet ist. Den mit ihr versehenen Dualraum von E bezeichnen wir mit E^*. Aus der erwähnten universellen Eigenschaft folgt, dass auch die kanonische lineare Abbildung $E \xrightarrow{e} E^{**}$ stetig ist. Aus diesem Grunde erhält man für kompakt erzeugte Vektorräume eine in mancher Hinsicht bessere Dualitätstheorie als für lokalkonvexe Räume.

Die dabei auftretenden Fragen sind zunächst die folgenden: Wann ist die kanonische Abbilding $E \xrightarrow{e} E^{**}$ injektiv? Wann ist sie bijektiv? Wann ist E einbettbar, d.h. wann ist die Topologie von E durch jene von E^{**} im Sinne der kompakt erzeugten Räume induziert? Und wann ist schliesslich e ein Homöomorphismus von E auf E^{**}?

Um diese Fragen in §4 beantworten zu können, werden nach einigen einleitenden Bemerkungen (§1) in §2 zunächst Zusammenhänge zwischen kompakt erzeugten und lokalkonvexen Vektorräumen näher untersucht. Dabei zeigt sich insbesondere, dass die beiden betreffenden Kategorien zueinander isomorphe Unterkategorien besitzen, deren Objekte wir aus später ersichtlichen Gründen als kc-Räume bzw. als ck-Räume bezeichnen. Die erwähnten Beziehungen erlauben es, für die in §3 beginnendenUntersuchungen über Dualräume Ergebnisse aus der Theorie der lokalkonvexen Räume anzuwenden. In §4 werden nicht nur die bereits angedeuteten Fragen bezüglich der Abbildung $E \xrightarrow{e} E^{**}$ vollständig beantwortet, sondern es wird ausserdem gezeigt, dass die Klasse der einbettbaren kompakt erzeugten Vektorräume sehr schöne Eigenschaften besitzt: Mit den stetigen linearen Abbildungen als Morphismen bildet sie eine vollständige und covollständige Kategorie, die ein Tensorprodukt besitzt; mit

---

[1]) Diese Arbeit entstand während eines Aufenthaltes des erstgenannten Autors am Forschungsinstitut für Mathematik der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich.

allen stetigen Abbildungen als Morphismen erhält man eine kartesisch abgeschlossene Kategorie.

Wie sich zeigen wird, sind die einbettbaren kompakt erzeugten Vektorräume gerade die oben erwähnten kc-Räume. Da diese umkehrbar eindeutig den ck-Räumen entsprechen, erhalten wir so eine schon aus diesem Grunde interessante Klasse lokalkonvexer Räume. In §5 leiten wir einige Eigenschaften dieser Räume ab, die sie für die allgemeine Theorie wichtig erscheinen lassen. ck-Räume können analog zu den bornologischen Räumen definiert werden, und es zeigt sich, dass jeder bornologische Raum ein ck-Raum ist. Ein Montelraum z.B. ist genau dann vollständig bzw. ein ck-Raum, wenn sein starker Dualraum ein ck-Raum bzw. vollständig ist. Die von den bornologischen Räumen her bekannten „unangenehmen" Erscheinungen bei der Produktbildung treten hier nicht auf: Jedes lokalkonvexe Produkt von ck-Räumen ist ein ck-Raum. Insbesondere ist jedes lokalkonvexe Produkt bornologischer Räume ein ck-Raum.

In §6 geben wir schliesslich einige Beispiele und Gegenbeispiele zur hier entwickelten Theorie.

§ 1. Kompakt erzeugte Räume

Einem beliebigen separierten topologischen Raum X kann man einen topologischen Raum $\hat{k}X$ wie folgt zuordnen: $\hat{k}X$ hat dieselbe unterliegende Menge wie X und trägt die durch die Inklusionen der kompakten Teilmengen von X coinduzierte Topologie. Die identische Abbildung $1:\hat{k}X\to X$ ist dann stetig, so dass auch $\hat{k}X$ separiert ist. Da ferner aus der Stetigkeit einer Abbildung $f:X\to Y$ zwischen separierten Räumen immer jene von $f:\hat{k}X\to\hat{k}Y$ folgt, erhält man einen Endofunktor

$$\hat{k}:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$$

der Kategorie $\mathbf{H}$ der Hausdorff-Räume. Es gilt $\hat{k}\circ\hat{k}=\hat{k}$, weil X und $\hat{k}X$ stets dieselben kompakten Teilmengen besitzen.

Ein separierter topologischer Raum X heisst *kompakt erzeugt* oder ein *k-Raum*, cf. [7], [9], [16], [18], wenn $X=\hat{k}X$ gilt. Die von den kompakt erzeugten Räumen gebildete volle Unterkategorie von $\mathbf{H}$ bezeichnen wir mit $\mathbf{KE}$. Der Funktor $\hat{k}:\mathbf{H}\to\mathbf{H}$ faktorisiert sich jetzt folgendermassen:

$$\mathbf{H}\xrightarrow{k}\mathbf{KE}\xrightarrow{i}\mathbf{H}.$$

Dabei bezeichnet i den Inklusionsfunktor. Aus $\hat{k}\circ\hat{k}=\hat{k}$ ergibt sich $k\circ i=1$, und aus der Stetigkeit der identischen Abbildung $kX\to X$ für jedes $X\in\mathbf{H}$ folgt, dass der Funktor $k:\mathbf{H}\to\mathbf{KE}$ zu $i:\mathbf{KE}\to\mathbf{H}$ adjungiert ist. $\mathbf{KE}$ ist also eine sogenannte reflektive Unterkategorie von $\mathbf{H}$.

Man schliesst hieraus, dass k mit Limites und i mit Colimites kommutiert, und dass die Kategorie **KE** vollständig und covollständig ist. Dabei berechnen sich die Colimites wie in **H**: der in **H** gebildete Colimes von k-Räumen ist kompakt erzeugt und damit auch Colimes in **KE**. Limites in **KE** erhält man dagegen, indem man auf die entsprechenden, in **H** gebildeten Limites den Funktor k anwendet. Insbesondere ist das in **H** gebildete Produkt $Y_1 \times Y_2$ bzw. $\bigtimes_{i\in I} Y_i$ von k-Räumen nicht immer kompakt erzeugt. Man erhält aber das **KE**-Produkt $Y_1 \Pi Y_2$ bzw. $\prod_{i\in I} Y_i$ gemäss $Y_1 \Pi Y_2 = k(Y_1 \times Y_2)$ bzw. $\prod_{i\in I} Y_i = k(\bigtimes_{i\in I} Y_i)$.

Der wesentliche Vorteil der Kategorie **KE** gegenüber der Kategorie **H** liegt in der kartesischen Abgeschlossenheit von **KE**, cf. [7], [18], Dies bedeutet, dass es einen Bifunktor

$$\mathscr{C}: \mathbf{KE}^{op} \times \mathbf{KE} \to \mathbf{KE}$$

mit der Eigenschaft gibt, dass für jedes $Y \in \mathbf{KE}$ der Funktor $\mathscr{C}(Y, -)$ zum Funktor $-\Pi\, Y$ adjungiert ist. Für $Z \in \mathbf{KE}$ ist dabei $\mathscr{C}(Y, Z)$ die Menge $C(Y, Z)$ aller stetigen Abbildungen von Y in Z, versehen mit einer kompakt erzeugten Topologie, so dass für jedes $X \in \mathbf{KE}$ gilt: Eine Abbildung $f: X \to \mathscr{C}(Y, Z)$ ist genau dann stetig, wenn die durch $\hat{f}(x, y) := f(x)(y)$ definierte Abbildung $\hat{f}: X \Pi Y \to Z$ stetig ist.

Der Bifunktor $\mathscr{C}$ ist hierdurch bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt. Er lässt sich wie folgt konstruieren:

$$\mathscr{C}(Y, Z) = kC_{co}(Y, Z).$$

Dabei ist C_{co} der wohlbekannte Bifunktor, den man erhält, wenn man $C(Y, Z)$ mit der *kompakt-offenen Topologie* versieht.

Hat man einen Morphismus $f: Y \to X$ von **KE** mit der Eigenschaft, dass eine Abbildung $g: Z \to Y$ einer k-Raumes Z nach Y genau dann stetig ist, wenn $f \circ g: Z \to X$ stetig ist, so sagt man, die Topologie von Y sei die durch die Abbildung $f: \underline{Y} \to X$ *induzierte* **KE**-*Topologie* ($\underline{Y}$ ist dabei die Y zugrunde liegende Menge.) Ist f injektiv, so sagt man auch, Y sei mittels f ein **KE**-*Teilraum* von X. Wir bemerken dazu folgendes: Ein topologischer Teilraum T eines kompakt erzeugten Raumes X ist i.a. nicht wieder kompakt erzeugt. Wenn allerdings T in X abgeschlossen (trivialer Fall) oder offen (cf. [7]) ist, so gilt bereits $T = kT$. Gemäss dem folgenden, leicht zu beweisenden Satz existiert für jede injektive Abbildung $f: M \to X$ einer Menge M in einen kompakt erzeugten Raum X die durch f auf M induzierte **KE**-Topologie, und diese wird erhalten, indem man auf die induzierte Topologie den Funktor k ausübt.

1.1 SATZ. *Sind X und Y separierte topologische Räume und ist die Topologie von Y die durch eine Abbildung $f: \underline{Y} \to X$ induzierte Topologie, so ist die Topologie von kY die durch $f: \underline{Y} \to kX$ induzierte* **KE**-*Topologie.*

§ 2. Kompakt erzeugte und lokalkonvexe Vektorräume

Wir betrachten nur Vektorräume über dem festen Körper $\mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K}$ entweder den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen oder den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen bezeichnet. Wir denken uns $\mathbb{K}$ stets mit der euklidischen Topologie versehen.

Ein *kompakt erzeugter Vektorraum* oder *linearer k-Raum* (über $\mathbb{K}$) E ist ein mit einer kompakt erzeugten Topologie versehener Vektorraum $\underline{E}$ (über $\mathbb{K}$), für welchen die algebraischen Operationen $+:E\sqcap E\to E$ und $\cdot:\mathbb{K}\sqcap E\to E$ stetig sind. Die von diesen Räumen und ihren stetigen linearen Abbildungen gebildete Kategorie bezeichnen wir mit **KEV**. Nicht jeder kompakt erzeugte Vektorraum E ist ein topologischer Vektorraum, weil aus der Stetigkeit von $+:E\sqcap E\to E$ nicht notwendig jene von $+:E\times E\to E$ folgt. Für ein Gegenbeispiel verweisen wir auf [16]. Umgekehrt ist aber auch nicht jeder separierte topologische Vektorraum ein linearer k-Raum, siehe (6.1) oder [6]. Ist allerdings F ein separierter topologischer Vektorraum, so ist kF ein linearer k-Raum. Wir bekommen so einen ebenfalls mit k bezeichneten Funktor

$$k:\mathbf{LCV}\to\mathbf{KEV},$$

wobei wit mir **LCV** die Kategorie der *separierten* lokalkonvexen Vektorräume bezeichnen.

In jedem linearen k-Raum E bilden die konvexen Nullumgebungen eine Filterbasis. Der davon erzeugte Filter ist der Nullumgebungsfilter einer wohlbestimmten lokalkonvexen Topologie auf dem E zugrundeliegenden Vektorraum $\underline{E}$. Wir bezeichnen den so erhaltenen lokalkonvexen Raum mit cE. Eine stetige lineare Abbildung $l:E_1\to E_2$ zwischen linearen k-Räumen E_1 und E_2 ist auch stetig als Abbildung von cE_1 in cE_2, so dass wir auf diese Weise einen Funktor

$$c:\mathbf{KEV}\to\mathbf{LCV}^*$$

erhalten, wobei wir mit **LCV*** die Kategorie *aller* lokalkonvexen Räume bezeichnen. Für jedes $E\in\mathbf{KEV}$ ist $1:E\to cE$ stetig. Ist ferner $F\in\mathbf{LCV}^*$, so ist eine stetige lineare Abbildung von E in F auch als Abbildung von cE in F stetig.

Für $E\in\mathbf{KEV}$ ist cE *nicht* notwendig separiert. Wenn dies aber der Fall ist, nennen wir E *konvex-separiert*. Die konvex-separierten linearen k-Räume bilden eine volle Unterkategorie **CSKEV** von **KEV**, und $c:\mathbf{KEV}\to\mathbf{LCV}^*$ induziert einen ebenfalls mit c bezeichneten Funktor

$$c:\mathbf{CSKEV}\to\mathbf{LCV}.$$

Wir werden häufig den leicht beweisbaren Satz aus [16] benutzen:

2.1 SATZ. *Der Funktor* c: **CSKEV** $\to$ **LVC** *ist zu dem von* k *induzierten Funktor* k: **LCV** $\to$ **CSKEV** *coadjungiert, und es gelten*

$$c \circ k \circ c = c \quad \text{und} \quad k \circ c \circ k = k.$$

Wir nennen im folgenden einen konvex-separierten linearen k-Raum E einen *kc-Raum*, wenn

$$E = kcE$$

gilt. Ein separierter lokalkonvexer Raum F, für den

$$F = ckF$$

gilt, heisst ein *ck-Raum*. Wie wir in den nächsten Abschnitten sehen werden, spielen kc-Räume und ck-Räume eine wichtige Rolle. Zwischen beiden Raumklassen besteht ein eineindeutiger Zusammenhang:

2.2 SATZ. *Mit den stetigen linearen Abbildungen als Morphismen bilden die kc-Räume und die ck-Räume isomorphe Kategorien.*

Beweis. Dies folgt sofort aus (2.1): Die Restriktionen der Funktoren c und k liefern den Isomorphismus bzw. dessen Umkehrung.

Solange uns nur stetige lineare Abbildungen interessieren, können wir uns wegen (2.2) auf die Untersuchung der ck-Räume beschränken und die erhaltenen Resultate auf die ihnen entsprechenden kc-Räume übertragen. Das hat den Vorteil, dass wir die umfangreiche Theorie der lokalkonvexen Räume als Hilfsmittel heranziehen können. Muss man aber, wie zum Beispiel in der Differentialrechnung, auch nichtlineare Abbildungen betrachten, so weisen die kc-Räume gegenüber den ck-Räumen Vorteile auf. Die aus den kc-Räumen und allen stetigen Abbildungen als Morphismen gebildete Kategorie ist für einen allgemeinen Differentialkalkül sehr geeignet, cf. [16]. Will man analog zu (2.2) zur entsprechenden Kategorie der ck-Räume übergehen, so muss man dort als Morphismen alle Abbildungen nehmen, die stetig sind auf Kompakta.

Wie in [16] gezeigt wird, ist die Kategorie **KEV** vollständig und covollständig. Wir bezeichnen Produkte und Coprodukte in **KEV** mit „Π" bzw, „$\amalg$".

Für eine Familie $(F_i)_{i \in I}$ in **LCV** gilt nun nicht nur die aus der Adjungiertheit von k folgende Identität

$$\prod_{i \in I} kF_i = k \bigtimes_{i \in I} F_i,$$

sondern auch

2.3 LEMMA. *Für jede Familie* $(F_i)_{i\in I}$ *in* **LCV** *gilt* $\coprod_{i\in I} kF_i = k\oplus_{i\in I} F_i$.

Beweis. $1:kF_i\to F_i$ ist stetig $\forall i\in I$. Also ist $1:\coprod_{i\in I} kF_i \to k\oplus_{i\in I} F_i$ stetig. Zu zeigen bleibt, dass die Umkehrung stetig ist auf allen Kompakta. Dies folgt aber leicht, da jede kompakte Teilmenge von $\oplus_{i\in I} F_i$ in einer endlichen Summe kompakter Teilmengen gewisser F_i enthalten ist, cf. [15], p. 103.

Für unsere Untersuchungen spielen Vollständigkeitsfragen eine wichtige Rolle. Da aber der Nullumgebungsfilter eines linearen k-Raumes ausser in speziellen Fällen nicht in der üblichen Weise eine uniforme Struktur erzeugt, arbeiten wir mit Vorteil mit dem zugehörigen lokalkonvexen Raum.

Mit $\tilde{F}$ oder $(F)^{\sim}$ bezeichnen wir die (übliche) Vervollständigung eines lokalkonvexen Raumes F. Das Vervollständigen ist bekanntlich funktoriell: Jede stetige lineare Abbildung $l: F_1 \to F_2$ besitzt genau eine stetige lineare Erweiterung $\tilde{l}: \tilde{F}_1 \to \tilde{F}_2$, F_1 und F_2 aus **LCV**. Auf die Vervollständigung von ck-Räumen kommen wir in §5 zurück. Hier beweisen wir:

2.4 SATZ. *Für jeden separierten lokalkonvexen Raum F ist ckF in natürlicher Weise ein Unterraum von $ck(ckF)^{\sim}$. Ist F vollständig, so kann man ckF mit einem komplementären Unterraum von $ck(ckF)^{\sim}$ identifizieren.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt daraus, dass die kanonische Inklusion $i: ckF\to (ckF)^{\sim}$ auch als Abbildung von ckF in $ck(ckF)^{\sim}$ stetig ist. Sei F vollständig. Da $1: ckF\to F$ stetig ist, ergibt sich die Stetigkeit von $\tilde{1}: (ckF)^{\sim} \to F$ und von $\tilde{1}: ck(ckF)^{\sim} \to ckF$. Es ist $\tilde{1}$ eine stetige Retraktion zur Inklusion $i: ckF \to ck(ckF)^{\sim}$, d.h. ckF ist komplementär in $ck(ckF)^{\sim}$.

§ 3. Dualräume

Ist E ein topologischer oder kompakt erzeugter Vektorraum, so bezeichnen wir mit LE den Vektorraum der stetigen ($\mathbb{K}$-wertigen) Linearformen auf E und mit $L_{co}E$ den mit der kompakt-offenen Topologie versehenen Raum LE. Dann ist für jeden kompakt erzeugten Vektorraum E der Raum $L_{co}E$ ein Objekt in **LCV**. Da für jeden k-Raum X der Raum $C_{co}(X, \mathbb{K})$ in kanonischer Weise als ein projektiver Limes von Banach-Räumen dargestellt werden kann, ist $L_{co}E$ als abgeschlossener Teilraum von $C_{co}(E, \mathbb{K})$ für jeden linearen k-Raum E vollständig.

Für jeden solchen Raum E setzen wir zur Abkürzung

$$E^* := kL_{co}E.$$

Die Zuordnung $E \mapsto E^*$ ist natürlich funktoriell, und die Struktur von E^* ist charakterisiert durch folgende universelle Eigenschaft: Ist Z ein kompakt erzeugter Raum, so ist eine Abbildung $f: Z\to E^*$ genau dann stetig, wenn die durch $\hat{f}(z, x) :=$

$f(z)(x)$ definierte Abbildung $\hat{f}: Z \sqcap E \to \mathbb{K}$ stetig ist. In diesem Sinne ist also E^* der natürliche Dualraum von E in **KEV**.

Gemäss obiger Bemerkung gilt:

3.1 SATZ. *Für jeden linearen k-Raum E ist E^* ein kc-Raum von der Form $E^* = kF$, wobei F ein vollständiger lokalkonvexer separierter Raum ist.*

Beweis. $F := L_{co}E$ ist in **LCV** und vollständig, und es gilt $E^* = kF$. Aus (2.1) ergibt sich $kcE^* = kckF = kF = E^*$.

Wir benötigen im folgenden häufig

3.2 SATZ. *Für jeden separierten lokalkonvexen Raum F gilt*

$$L_{co}ckF = L_{co}kF.$$

Insbesondere ist $L_{co}ckF$ also vollständig.

Beweis. Wie schon in §2 bemerkt, gilt $LckF = LkF$. Weil F und kF dieselben kompakten Teilmengen besitzen, gilt dasselbe auch für ckF und kF. Es ist also $L_{co}ckF = L_{co}kF$. Wir haben aber schon gesehen, dass $L_{co}kF$ vollständig ist.

Dual dazu gilt:

3.3 SATZ. *Ist F ein vollständiger separierter lokalkonvexer Raum, so ist $L_{co}F$ ein ck-Raum.*

Beweis. Mit L_vF bezeichnen wir den Raum LF, versehen mit der feinsten Topologie v, welche auf jeder gleichstetigen Teilmenge von LF mit der von der schwachen Topologie induzierten Topologie zusammenfällt. Man sieht, dass L_vF ein kompakt erzeugter Raum ist, cf. [10], §21.8. Weil F vollständig ist, bilden die konvexen unter den Nullumgebungen von L_vF eine Nullumgebungsbasis von $L_{co}F$, cf. [10], §21.9. Da die Topologie von $kL_{co}F$ gröber ist als die von L_vF, folgt hieraus $ckL_{co}F = L_{co}F$.

Wenn die relativkompakten Teilmengen von L_vF mit den gleichstetigen zusammenfallen, ist L_vF offenbar sogar ein linearer k-Raum. Wir wissen aber nicht, ob L_vF immer ein linearer k-Raum ist.

3.4 KOROLLAR. *Mit F ist auch $L_{co}F$ ein vollständiger ck-Raum.*

Wir beweisen jetzt den folgenden Darstellungssatz für den zu einem konvex-separierten linearen k-Raum E assoziierten lokalkonvexen Raum cE:

3.5 SATZ. *Sei E ein konvex-separierter linearer k-Raum. Dann ist die durch die kanonische Injektion $e: E \to L_{co}L_{co}E$ auf $\underline{E}$ induzierte Topologie mit derjenigen von cE identisch: cE kann also mit einem linearen Teilraum von $L_{co}L_{co}E$ identifiziert werden.*

Beweis. Die durch $e(x)(l) := l(x)$ definierte Abbildung $e: E \to L_{co}L_{co}E$ ist nach dem Satz von Hahn-Banach, angewendet auf cE, injektiv. Aus der universellen Eigenschaft der in **KE** verwendeten Funktionenraumtopologie folgt die Stetigkeit von $e: E \to E^{**} = kL_{co}kL_{co}E$. Weil $1: kL_{co}kL_{co}E \to L_{co}kL_{co}E$ stetig ist und $L_{co}L_{co}E$ Teilraum von $L_{co}kL_{co}E$ ist, folgt die Stetigkeit von $e: E \to L_{co}L_{co}E$ und damit die von $e: cE \to L_{co}L_{co}E$. Die vermöge e auf $\underline{E}$ induzierte Topologie ist also gröber als die von cE. Um zu zeigen, dass das Umgekehrte auch gilt, betrachten wir eine abgeschlossene, absolutkonvexe Nullumgebung U in cE. Dann ist die Polare $U^\circ := \{l \in LE = LcE \mid |l(x)| \leqslant 1, \forall x \in U\}$ in $L_{co}cE$ kompakt, cf. [10], §21.6. Aus der Stetigkeit von $E \xrightarrow{1} cE$ folgt jene von $L_{co}cE \xrightarrow{1} L_{co}E$, also ist U° auch kompakt in $L_{co}E$. Damit ist die in $LL_{co}E$ gebildete Polare V von U° eine Nullumgebung in $L_{co}L_{co}E$. Also ist $U = \bar{e}^1(V)$ (Bipolarensatz!) Nullumgebung bezüglich der induzierten Topologie.

3.6 KOROLLAR.

(a) *Für jeden ck-Raum F ist F Teilraum von* $L_{co}L_{co}F$.

(b) *Für jeden konvex-separierten linearen k-Raum E ist kcE ein* **KE**-*Teilraum von* E^{**}.

Beweis. Der Beweis von (a) ergibt sich aus der Anwendung von (3.5) auf kF und aus (3.2). In (b) ist cE nach (3.5) Teilraum von $L_{co}L_{co}E$, und $L_{co}L_{co}E$ ist Teilraum von $L_{co}kL_{co}E$. Die Behauptung folgt damit aus (1.1).

Wir haben allerdings noch kein Beispiel eines konvex-separierten linearen k-Raumes E, für den $E \neq kcE$ gilt.

Wir sagen, ein separierter lokalkonvexer Raum F habe die *Ascoli-Eigenschaft*, wenn gilt:

$$A \subset LF \text{ gleichstetig} \Leftrightarrow A \subset L_{co}F \text{ relativkompakt}.$$

In diesem Falle gilt offenbar $kL_{co}F = L_vF$, wobei v wie in (3.3) die feinste Topologie auf LF ist, welche auf allen gleichstetigen Teilmengen von LF mit der von der schwachen Topologie induzierten Topologie übereinstimmt. L_vF ist also inbesondere ein linearer k-Raum.

Weil ein separierter lokalkonvexer Raum F genau dann die Ascoli-Eigenschaft hat, wenn die Inklusion $e: F \to L_{co}L_{co}F$ stetig ist, folgt aus (3.6):

3.7 KOROLLAR. *Jeder ck-Raum hat die Ascoli-Eigenschaft.*

Für einen ck-Raum F ist $L_{co}F$ nach (3.2) ausserdem vollständig. Unter welchen Bedingungen folgt umgekehrt aus dieser und der Ascoli-Eigenschaft die Zugehörigkeit zu den ck-Räumen? Die Beantwortung dieser Frage wird für uns in §5 nützlich sein; in §4 benötigen wir die Aussagen (3.8)–(3.10) noch nicht. Wir beginnen mit der folgenden Verschärfung des bekannten Satzes von Krein (cf. [10], §24.5):

3.8 THEOREM. *Sei K eine kompakte Teilmenge des separierten lokalkonvexen*

Raumes F, und seien K_1 bzw. K_2 die abgeschlossene (absolut-) konvexe Hülle von K in F bzw. in ckF. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) *K_1 ist kompakt in F.*

(2) *K_2 ist kompakt in ckF.*

(3) *K_1 ist $\tau(\underline{F}, LckF)$-vollständig* [2].

(4) *K_2 ist $\tau(\underline{F}, LckF)$-vollständig.*

Beweis. (1)$\Leftrightarrow$(2) ist einfach einzusehen; ebenso, dass in diesem Falle $K_1 = K_2$ gilt. (2)$\Leftrightarrow$(4) ist die Aussage des Satzes von Krein, angewendet auf *ckF*. Es gilt (4)$\Rightarrow$(3), denn in diesem Falle gilt ja $K_1 = K_2$. Wir zeigen noch (3)$\Rightarrow$(4): K_2 ist Teilmenge von K_1 und abgeschlossen in *ckF*. Als konvexe Menge ist K_2 dann auch $\tau(\underline{F}, LckF)$-abgeschlossen und damit $\tau(\underline{F}, LckF)$-vollständig.

Die Aussagen von (3.8) gelten insbesondere, wenn *F* oder *ckF quasivollständig* sind, und das ist der uns interessierende Fall. Wir zeigen:

3.9 LEMMA. *Sei $F \in$ LCV, und sei F oder ckF quasivollständig. Dann ist $L_{co}F$ ein dichter Unterraum von $L_{co}ckF$.*

Beweis. Weil *F* und *ckF* dieselben kompakten Teilmengen haben, bilden (wegen der Quasivollständigkeit) die Polaren K° der in *F* absolutkonvexen kompakten Mengen *K* eine Nullumgebungsbasis in $L_{co}ckF$. Ist $\psi \in LckF$, so ist ψ/K für jedes unserer *K* stetig. Nach dem Approximationslemma, prop. 1, 3. §11 in [8], gibt es ein $\varphi_K \in LF$ mit $\varphi_K \in \psi + K^{\circ}$.

3.10 SATZ. *Sei F ein separierter lokalkonvexer Raum. Ist F oder ckF quasivollständig, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *$F = ckF$.*

(2) *$L_{co}F$ ist vollständig, und F hat die Ascoli-Eigenschaft.*

Beweis. Zu zeigen ist noch (2)$\Rightarrow$(1). Aus der Vollständigkeit von $L_{co}F$ und (3.9) folgt $L_{co}F = L_{co}ckF$ und damit $L_{co}L_{co}F = L_{co}L_{co}ckF$. Weil *F* die Ascoli-Eigenschaft besitzt, erhalten wir mit Hilfe von (3.6) wie behauptet $F = ckF$.

Wir kommen nun zu dem folgenden wichtigen

3.11 THEOREM. *Für jeden konvex-separierten linearen k-Raum E ist $e(E)$ dicht in $L_{co}kL_{co}E$.*

Beweis. Sei $\psi \in LkL_{co}E$. Es genügt zu zeigen, dass $(\psi + W) \cap e(E)$ für jedes *W* aus einer Nullumgebungsbasis von $L_{co}kL_{co}E$ nicht leer ist. Wegen der Vollständigkeit von $L_{co}E$ genügt es, *W* alle Polaren A° der absolutkonvexen kompakten Teilmengen *A* von $L_{co}E$ durchlaufen zu lassen. Es bezeichne L_sE den Raum *LE* unter der relativ zu $\underline{E}$ schwachen Topologie. Nach Voraussetzung ist ψ stetig auf den Kompakta von

---

[2]) $\tau(\underline{F}, LckF)$ ist die Mackey-Topologie von $\underline{F}$ bezüglich *LckF*.

$L_{co}E$. Sei $A \subset L_{co}E$ absolutkonvex und kompakt. Auf A stimmen die kompakt-offene und die schwache Topologie überein. Nach dem Approximationslemma, prop. 1, 3. §11 in [8], gibt es ein $\varphi_A \in LL_sE$ mit $\varphi_A \in \psi + A^\circ$. Wegen $LL_sE \subset e(E)$ folgt $(\psi + A^\circ) \cap e(E) \neq \emptyset$.

3.12 KOROLLAR. *Sei F ein ck-Raum. Dann ist $e(F)$ dicht in $L_{co}ckL_{co}F$. Genau dann ist $e: F \to L_{co}ckL_{co}F$ ein Homöomorphismus (auf), wenn F vollständig ist.*

Beweis. Die erste Aussage ergibt sich nach (3.2), wenn man (3.11) auf kF anwendet. Die zweite erhält man unter zusätzlicher Verwendung von (3.6).

Bemerkungen.

(1) Der Beweis von (3.11) kann natürlich auch mit Hilfe des Grothendieckschen Vollständigkeitskriteriums geführt werden, zu dem das erwähnte Approximationslemma eine vorbereitende Aussage ist.

(2) (3.10) findet sich in anderer Schreibweise bereits bei Buchwalter [3]. Die dort untersuchten lokalkonvexen „Kelley-Räume" fallen unter den in (3.10) genannten Bedingungen mit den *ck*-Räumen zusammen.

§ 4. Bidualräume und Tensorprodukte

Wie schon im letzten Abschnitt erwähnt wurde, ist für jeden kompakt erzeugten Vektorraum E die kanonische lineare Abbildung $e: E \to E^{**}$ stetig. Auf Grund des Satzes von Hahn-Banach ist sie ferner genau dann injektiv, wenn E konvex-separiert ist. Ist e bijektiv, so nennen wir E *halbreflexiv*. Ist E mittels e ein **KE**-Teilraum von E^{**} (siehe (1.1)), so nennen wir E *einbettbar*. Ist E halbreflexiv und einbettbar, sind also E und E^{**} vermöge e homöomorph, so sagen wir, E sei *reflexiv*. Wir geben in diesem Abschnitt für jede dieser Eigenschaften Bedingungen an, die notwendig und hinrechend sind und zeigen, dass insbesondere die Kategorie der einbettbaren linearen k-Räume durch schöne Eigenschaften ausgezeichnet ist.

Wir beginnen mit

4.1 SATZ. *Für jeden halbreflexiven linearen k-Raum E ist E^* reflexiv.*

Beweis. Seien $e: E \to E^{**}$ und $f: E^* \to E^{***}$ die kanonischen Abbildungen. Weil „*" ein Funktor ist, ergibt sich sofort, dass die durch $e^*(\psi) := \psi \circ e$ definierte Abbildung e^* von E^{***} nach E^* stetig ist. Unmittelbar aus den Definitionen erhält man $e^* \circ f = 1_{E^*}$, so dass e^* surjektiv ist. e^* ist aber auch injektiv, denn e war als surjektiv vorausgesetzt. e^* und f sind also invers zueinander, und f ist ein Homöomorphismus.

Es ist unmittelbar klar, dass mit E auch E^* reflexiv ist. Ob die Voraussetzung in (4.1) aber wirklich schwächer ist, wissen wir nicht, weil wir kein Beispiel eines halbreflexiven linearen k-Raumes haben, der nicht reflexiv ist.

4.2 THEOREM. *Für jeden konvex-separierten linearen k-Raum E sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *E ist halbreflexiv.*

(2) *cE ist vollständig.*

(3) $e: kcE \to E^{**}$ *ist ein Homöomorphismus.*

(4) *kcE ist reflexiv.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) erhält man unmittelbar mit Hilfe von (3.5) und (3.11). Setzt man (3) voraus, so folgt aus der Halbreflexivität von E die Reflexivität von E^* und E^{**}, siehe (4.1). Wegen unserer Voraussetzung (3) ist kcE also reflexiv; damit haben wir (3) $\Rightarrow$ (4). Aus (4) folgt zunächst die Halbreflexivität von kcE. Benutzt man (1) $\Rightarrow$ (2), so hat man die Vollständigkeit von $ckcE = cE$. Damit ist auch (4) $\Rightarrow$ (2) bewiesen.

4.3 THEOREM. *Für jeden linearen k-Raum E sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *E ist einbettbar.*

(2) *Es existiert ein ck-Raum G, so dass* $E = kG$.

(3) *Es existiert ein separierter lokalkonvexer Raum F, so dass* $E = kF$.

(4) *E ist ein kc-Raum.*

Beweis. (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1): Dies erhält man unmittelbar mit Hilfe von (2.1) und (3.6).

(1) $\Rightarrow$ (2): Aus der Injektivität von e folgt, wie schon erwähnt, die Separiertheit von cE. Da $e: cE \to L_{co}kL_{co}E$ ferner ein Teilraum ist, s. (3.5), ist $e: kcE \to kL_{co}kL_{co}E = E^{**}$ ein **KE**-Teilraum. Aus (1) folgt somit $E = kcE$. Setze $G = cE$.

Für jeden linearen k-Raum E ist E^* folglich einbettbar. Wegen (2.2) ist ferner die Kategorie der einbettbaren linearen k-Räume isomorph zur Kategorie der ck-Räume.

Durch Kombination der äquivalenten Bedingungen in (4.2) und (4.3) bekommt man jetzt eine ganze Reihe von Kriterien für die Reflexivität linearer k-Räume. Insbesondere hat man:

4.4 THEOREM. *Für jeden linearen k-Raum E sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *E ist reflexiv.*

(2) *Es gibt einen vollständigen ck-Raum G mit* $E = kG$.

(3) *E ist ein halbreflexiver kc-Raum.*

(4) *Es gibt einen halbreflexiven linearen k-Raum* E_1 *mit* $E = E_1^*$.

(5) *E ist ein kc-Raum, und cE ist vollständig.*

Bemerkung. Die Kategorie der reflexiven linearen k-Räume ist also isomorph zur Kategorie der vollständigen ck-Räume, siehe (2.2).

Wir wenden uns jetzt einigen besonderen Eigenschaften der Kategorie **EKEV** der einbettbaren linearen k-Räume mit den stetigen linearen Abbildungen als Morphismen zu:

4.5 THEOREM. *Die Kategorie* **EKEV** *ist vollständig und covollständig.*

Beweis. Nach (2.2) müssen wir nur die Vollständigkeit und die Covollständigkeit der Kategorie **CK** der *ck*-Räume zeigen. Aber **CK** ist eine reflektive Unterkategorie von **LCV**, denn der Funktor ck: **LCV** → **CK** ist ein zum Inklusionsfunktor i: **CK** → **LCV** adjungierter Retraktionsfunktor. Aus der bekannten Vollständigkeit und Covollständigkeit von **LCV** folgt daher jene von **CK**.

Genauer gilt folgendes: Der Colimes in **CK** eines Diagramms von *ck*-Räumen stimmt mit dem in **LCV** gebildeten Colimes überein, während man den Limes in **CK** erhält, indem man auf den in **LCV** gebildeten Limes den Funktor *ck* ausübt. Wie wir allerdings später sehen werden, cf. (5.6), kann man sich beim Spezialfall der Produktbildung die Anwendung von *ck* sparen: Die in **LCV** gebildeten Produkte von *ck*-Räumen sind stets wieder *ck*-Räume.

Leicht ergibt sich ferner der

4.6 SATZ. *Jeder in* **KEV** *gebildete Limes von einbettbaren linearen k-Räumen ist einbettbar. Jeder lineare* **KE**-*Unterraum eines einbettbaren linearen k-Raumes ist einbettbar.*

Sind $E_1, \ldots, E_n$ und E kompakt erzeugte Vektorräume, so bezeichnen wir mit

$$\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; E)$$

den mit der universellen (d.h. durch die Inklusion in den Raum $\mathscr{C}(E_1 \Pi \ldots \Pi E_n, E)$ induzierten) kompakt erzeugten Struktur versehenen Vektorraum $L(E_1, \ldots, E_n; E)$ der stetigen multilinearen Abbildungen von $E_1 \Pi \ldots \Pi E_n$ in E. Es ist also

$$\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; E) = kL_{\mathrm{co}}(E_1, \ldots, E_n; E),$$

wobei der Index „co“ wieder auf die kompakt-offene Topologie hinweisen soll. Es folgt sofort aus der universellen Eigenschaft der Funktionenraumstruktur, dass $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_{n-1}; \mathscr{L}(E_n; E))$ und $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; E)$ in kanonischer Weise homöomorph sind. Insbesondere kann man also immer $\mathscr{L}(E_1; E_2^*)$ und $\mathscr{L}(E_2; E_1^*)$ miteinander identifizieren.

Entsprechende Funktoren $\mathscr{L}$ und kanonische Isomorphismen erhält man auch für die Kategorie **EKEV**, denn es gilt der

4.7 SATZ. *Ist von den linearen k-Räumen $E_1, \ldots, E_n$, E der Raum E einbettbar, so ist auch $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; E)$ einbettbar.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus (4.3) und der Separiertheit von $L_{\mathrm{co}}(E_1, \ldots, E_n; E)$, denn es ist ja $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; E) = kL_{\mathrm{co}}(E_1, \ldots, E_n; E)$.

Wir beweisen jetzt:

4.8 THEOREM. *Die Kategorie* **EKEV** *der einbettbaren kompakt erzeugten Vektorräume besitzt bezüglich* $\mathscr{L}$ *ein Tensorprodukt* $\otimes$. *Für* E *und* F *aus* **EKEV** *ist dabei der* $E \otimes F$ *zugrunde liegende Vektorraum* $\underline{E \otimes F}$ *das algebraische Tensorprodukt* $\underline{E} \otimes \underline{F}$, *und die Topologie von* $E \otimes F$ *ist die zu der natürlichen Injektion* $\bar{e}: E \otimes F \to \mathscr{L}(E, F; \mathbb{K})^*$ *gehörende* **KE**-*Teilraumstruktur. Ferner ist* $\underline{E} \otimes \underline{F}$ *(vermöge* $\bar{e}$*) dicht in* $L_{co}\mathscr{L}(E, F; \mathbb{K})$.

Beweis. Für jedes $(x, y) \in \underline{E} \times \underline{F}$ erhält man eine durch $e_{x,y}(b) := b(x, y)$ definierte stetige lineare Abbildung

$$e_{x,y}: \mathscr{L}(E, F; \mathbb{K}) \to \mathbb{K}.$$

Daraus ergibt sich in natürlicher Weise die Abbildung

$$e: E \sqcap F \to \mathscr{L}(E, F; \mathbb{K})^*: (x, y) \mapsto e_{x,y};$$

und es ist unmittelbar klar, dass e bilinear und stetig ist.

Sei nun

$$t: \underline{E} \times \underline{F} \to \underline{E} \otimes \underline{F}$$

„das" algebraische Tensorprodukt. Dann erhält man die durch $e = \bar{e} \circ t$ charakterisierte lineare Abbildung

$$\bar{e}: \underline{E} \otimes \underline{F} \to L\mathscr{L}(E, F; \mathbb{K}) = \underline{\mathscr{L}(E, F; \mathbb{K})^*}$$

Wir zeigen, dass $\bar{e}$ injektiv ist. Sei dazu $0 \neq z \in \underline{E} \otimes \underline{F}$, wobei wir z schreiben als $z = \sum_{i=1}^{n} t(x_i, y_i)$ mit linear unabhängigen $x_1, \ldots, x_n$ aus $\underline{E}$ und linear unabhängigen $y_1, \ldots, y_n$ aus $\underline{F}$. Da E und F konvex-separiert sind, existieren nach dem Satz von Hahn-Banach stetige Linearformen $u: E \to \mathbb{K}$ und $v: F \to \mathbb{K}$ mit $u(x_1) = v(y_1) = 1$ und $u(x_i) = v(y_i) = 0$ $\forall i \in \{2, \ldots, n\}$. Definiert man $b \in \mathscr{L}(E, F; \mathbb{K})$ durch $b(x, y) := u(x) \cdot \cdot v(y)$, so folgt $(\bar{e}z)(b) = 1$ und damit $\bar{e}z \neq 0$.

Wegen der Injektivität von $\bar{e}$ können wir nach (1.1) den Raum $\underline{E} \otimes \underline{F}$ mit der **KE**-Teilraumstruktur von $\mathscr{L}(E, F; \mathbb{K})^*$ versehen. Der so erhaltene kompakt erzeugte Vektorraum $E \otimes F$ ist nach (4.6) einbettbar. Aus der Stetigkeit von $e = \bar{e} \circ t$ folgt die Stetigkeit von $t: E \sqcap F \to E \otimes F$.

Um die universelle Eigenschaft nachzuweisen, müssen wir nur zeigen, dass für einen beliebigen einbettbaren linearen k-Raum G aus der Stetigkeit einer bilinearen Abbildung $b: E \sqcap F \to G$ die Stetigkeit der durch $b = \bar{b} \circ t$ eindeutig bestimmten linearen Abbildung $\bar{b}: E \otimes F \to G$ folgt. Dazu betrachten wir die durch $\tilde{b}(w) := w \circ b$ definierte Abbildung

$$\tilde{b}: G^* \to \mathscr{L}(E, F; \mathbb{K}).$$

Offenbar ist $\tilde{b}$ stetig linear, und damit haben wir die stetig lineare adjungierte Abbildung

$$\tilde{b}^* : \mathscr{L}(E, F; \mathbb{K})^* \to G^{**}.$$

Es ergibt sich das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
E \Pi F \arrow[rr, "b"] \arrow[dr, "t"] & & G \arrow[dd, "e_G"] \\
& E \otimes F \arrow[ur, "\bar{b}"] \arrow[dl, "\bar{e}"'] & \\
\mathscr{L}(E, F; \mathbb{K})^* \arrow[uu, "e"] \arrow[rr, "\tilde{b}^*"'] & & G^{**}
\end{tikzcd}$$

Aus der Definition der betreffenden Abbildungen folgt zunächst $e_G \circ b = \tilde{b}^* \circ e$, also $e_G \circ \bar{b} \circ t = \tilde{b}^* \circ \bar{e} \circ t$, und daraus $e_G \circ \bar{b} = \tilde{b}^* \circ \bar{e}$. Da $\tilde{b}^*$ und $\bar{e}$ stetig sind, ist $e_G \circ \bar{b}$ stetig, und weil G einbettbar ist, folgt die Stetigkeit von $\bar{b}$.

Die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes $t : E \Pi F \to E \otimes F$ impliziert die Adjungiertheit der Funktoren $- \otimes F$ und $\mathscr{L}(F; -)$, $F \in$ **EKEV**. Daraus folgt

$$\mathscr{L}(E \otimes F; G) \cong \mathscr{L}(E; \mathscr{L}(F; G)) \cong \mathscr{L}(E, F; G).$$

Für $G = \mathbb{K}$ hat man insbesondere

$$(E \otimes F)^* \cong \mathscr{L}(E, F; \mathbb{K}).$$

Da nun nach (3.11) $\underline{E} \otimes \underline{F}$ in $L_{co} k L_{co}(E \otimes F) = L_{co}(E \otimes F)^*$ dicht liegt, folgt, dass $\underline{E} \otimes \underline{F}$ in $L_{co} \mathscr{L}(E, F; \mathbb{K})$ dicht liegt.

Nach [16] besitzt sogar **KEV** ein Tensorprodukt, jedoch fehlt hierfür noch eine analoge explizite Beschreibung.

Bezüglich der *stetigen* Abbildungen als Morphismen bilden die einbettbaren kompakt erzeugten Vektorräume eine Kategorie **EKEVs**. Auch diese Kategorie zeichnet sich durch eine Reihe schöner Eigenschaften aus. Zunächst gilt:

4.9 SATZ. *Ist E ein einbettbarer linearer k-Raum, so gilt für jeden kompakt erzeugten Raum Y: $\mathscr{C}(Y, E)$ ist einbettbar. Speziell ist also $\mathscr{C}(Y, \mathbb{K})$ für jedes $Y \in$* **KE** *einbettbar.*

Dies ist wieder eine einfache Konsequenz aus (4.3). Es folgt jedoch aus (4.9), dass $\mathscr{C} : \mathbf{KE}^{op} \times \mathbf{KE} \to \mathbf{KE}$ einen Bifunktor

$$\mathscr{C} : \mathbf{EKEVs}^{op} \times \mathbf{EKEVs} \to \mathbf{EKEVs}$$

induziert. Gemäss (4.6) stimmt das Produkt in **EKEVs** mit jenem in **KEV** bzw. **KE** überein. Ferner ist für lineare k-Räume E, F, G eine Abbildung $f: E \to \mathscr{C}(F, G)$ genau dann stetig, wenn $\hat{f}: E \sqcap F \to G: (x, y) \mapsto f(x)(y)$ stetig ist. Damit ergibt sich:

4.10 THEOREM. *Die Kategorie* **EKEVs** *der einbettbaren kompakt erzeugten Vektorräume mit den stetigen Abbildungen als Morphismen wird durch den Bifunktor* $\mathscr{C}$ *kartesisch abgeschlossen.*

Bemerkung: Wäre, wie wir in [5] zunächst angekündigt haben, für jeden separierten, vollständigen lokalkonvexen Raum F auch ckF vollständig, so hätten wir den Aussagen (4.5)–(4.10) entsprechende Resultate auch für die Kategorie der reflexiven linearen k-Räume. Unser Beweis für die Vollständigkeit von ckF weist indessen eine Lücke auf, so dass diese Ergebnisse vorläufig nicht gesichert sind. Auf der anderen Seite haben wir jedoch auch kein Beispiel eines vollständigen Raumes $F \in$**LCV**, für den ckF nicht vollständig ist. Vergleiche hierzu auch die Aussagen (5.7)–(5.10) dieser Arbeit.

Hingegen ergibt sich leicht, dass $F \in$**LCV** genau dann folgenvollständig ist, wenn ckF diese Eigenschaft hat. Daher erhält man zu (4.5)–(4.10) analoge Aussagen auf alle Fälle für die Kategorie derjenigen kc-Räume E, für welche cE folgenvollständig ist. Diese Räume bilden, wie U. Seip gezeigt hat, eine für die Belange der Analysis hervorragend geeignete Kategorie. Wir verweisen diesbezüglich auf [16]; dort finden sich auch die Beweise für die erwähnten Aussagen. Was aus unseren Betrachtungen zusätzlich folgt, ist die Einbettbarkeit dieser Räume, sowie (4.12).

Für die Dualräume von Coprodukten und von Produkten kompakt erzeugter Vektorräume gelten die folgenden Sätze:

4.11 SATZ. *Für jede Familie* $(E_i)_{i \in I}$ *linearer k-Räume gilt:*

$$\Big(\coprod_{i \in I} E_i\Big)^* \cong \prod_{i \in I} E_i^*.$$

Beweis. Da der Funktor $\mathbf{KEV} \xrightarrow{*} \mathbf{KEV}^{\mathrm{op}}$ wegen $\mathscr{L}(E_1; E_2^*) \cong \mathscr{L}(E_2; E_1^*)$ einen Adjungierten, nämlich $\mathbf{KEV}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{*} \mathbf{KEV}$ besitzt, kommutiert er mit Colimites, also mit Coprodukten. Das Coprodukt in $\mathbf{KEV}^{\mathrm{op}}$ ist aber das Produkt in **KEV**.

Allgemeiner kann man zeigen: Für jeden linearen k-Raum E kommutiert der Funktor $\mathscr{L}(-; E): \mathbf{KEV} \to \mathbf{KEV}^{\mathrm{op}}$ mit Colimites, cf. Satz 16, p. 7 in [16].

4.12 SATZ. *Für jede Familie* $(E_i)_{i \in I}$ *einbettbarer kompakt erzeugter Vektorräume gilt:*

$$\Big(\prod_{i \in I} E_i\Big)^* \cong \coprod_{i \in I} E_i^*.$$

Beweis. Wir schreiben $E_i = kF_i$, wobei die F_i ck-Räume sind, $\forall i \in I$. In (5.6) werden wir zeigen, dass dann auch $\bigtimes_{i \in I} F_i$ ein ck-Raum ist. Insbesondere besitzt also $\bigtimes_{i \in I} F_i$ die Ascoli-Eigenschaft. Ist daher $K \subset L_{co} \bigtimes_{i \in I} F_i$ relativkompakt, so ist K in $L \bigtimes_{i \in I} F_i \cong \bigoplus_{i \in I} LF_i$ gleichstetig und damit in einer endlichen Summe gleichstetiger Teilmengen gewisser LF_i „enthalten". Daraus ergibt sich, dass K relativkompakt „in" $\bigoplus_{i \in I} L_{co}F_i$ ist, d.h. $\bigoplus_{i \in I} L_{co}F_i$ und $L_{co} \bigtimes_{i \in I} F_i$ haben „dieselben" relativkompakten Teilmengen. Es gilt also

$$kL_{co} \bigtimes_{i \in I} F_i \cong k \bigoplus_{i \in I} L_{co}F_i .$$

Aus (2.3) und (3.2) folgt damit

$$\coprod_{i \in I} E_i^* = \coprod_{i \in I} (kF_i)^* = \coprod_{i \in I} kL_{co}F_i = k \bigoplus_{i \in I} L_{co}F_i \cong kL_{co} \bigtimes_{i \in I} F_i .$$

Weil $\bigtimes_{i \in I} F_i$ ein ck-Raum ist, erhalten wir

$$\coprod_{i \in I} E_i^* \cong kL_{co} \bigtimes_{i \in I} F_i = kL_{co}k \bigtimes_{i \in I} F_i = kL_{co} \prod_{i \in I} kF_i = \Big(\prod_{i \in I} E_i\Big)^* .$$

Sind alle E_i sogar reflexiv, so können wir im Beweis von (4.12) die F_i sogar vollständig wählen. Dann ist $\bigtimes_{i \in I} F_i$ ein vollständiger ck-Raum, so dass wegen $\prod_{i \in I} E_i = k \bigtimes_{i \in I} F_i$ aus (4.4) folgt:

4.13 SATZ. *Jedes* **KEV**-*Produkt von reflexiven linearen k-Räumen ist reflexiv.*

Viele der in der Funktionalanalysis wichtigen Räume sind reflexive lineare k-Räume. So gilt z.B.:

4.14 SATZ. *Ist F ein Fréchet-Raum, so ist sowohl F als auch $L_{co}F$ ein reflexiver kompakt erzeugter Vektorraum.*

Beweis. Für F folgt dies unmittelbar aus (4.4): F ist vollständig und erfüllt als metrisierbarer Raum $F = kF$. Daraus folgt, dass auch $F^* = kL_{co}F$ ein reflexiver linearer k-Raum ist. Aus dem Satz von Banach-Dieudonné (cf. [8] oder [10]) folgt aber leicht, dass $L_{co}F = kL_{co}F$ gilt.

Etwas allgemeiner gilt: Für jeden metrisierbaren lokalkonvexen Raum F ist $L_{co}F$ ein reflexiver linearer k-Raum.

§ 5. Weitere Aussagen über *ck*-Räume

In diesem Abschnitt leiten wir einige weitere Eigenschaften der ck-Räume ab, welche sie für die allgemeine Theorie der lokalkonvexen Räume interessant erscheinen lassen.

Ist $F \in$ LCV, so können wir ckF auch beschreiben als denjenigen lokalkonvexen Raum, den wir erhalten, wenn wir den unterliegenden linearen Raum $\underline{F}$ mit der feinsten lokalkonvexen Topologie versehen, welche dieselben kompakten Teilmengen wie F liefert. Dies legt die Frage nach Beziehungen zu anderen Klassen lokalkonvexer Räume nahe, die eine analoge Beschreibung gestatten. Wir denken dabei insbesondere an die *bornologischen Räume* und beweisen:

5.1 SATZ. *Jeder bornologische Raum ist ein ck-Raum.*

(5.1) ist eine einfache Konsequenz und sogar gleichwertig mit der folgenden Aussage, deren Beweis ein Argument benutzt, welches man z.B. bei Buchwalter [4] findet. Wir führen es der Vollständigkeit halber an.

Mit F^x bezeichnen wir den zu $F \in$ LCV *assoziierten bornologischen Raum.* Eine Nullumgebungsbasis von F^x wird gebildet von allen absolutkonvexen Teilmengen von F, welche die beschränkten Mengen in F absorbieren.

5.2 SATZ. *Für jeden separierten lokalkonvexen Raum F gilt*

$$F^x = (ckF)^x.$$

Beweis. Sei U eine absolutkonvexe Nullumgebung in $(ckF)^x$. Dann absorbiert U jede beschränkte Menge in ckF und insbesondere jede relativkompakte Teilmenge von F. Aber U absorbiert sogar jede beschränkte Menge in F. Denn wäre das für eine beschränkte Menge A in F nicht der Fall, so gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in A$ mit $x_n \notin n^2 \cdot U$. Es wäre dann $(1/n \cdot x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in F, welche als relativkompakte Menge in F nicht von U absorbiert würde: Widerspruch. U ist also eine Nullumgebung in F^x.

Ein anderer Beweis findet sich in der soeben erschienen Arbeit [20] von H. Porta.

Nicht jeder *ck*-Raum ist indessen bornologisch. In (6.2) geben wir ein Beispiel eines vollständigen *ck*-Raumes, dessen Topologie nicht die Mackey-Topologie ist. Es gibt weiter vollständige *ck*-Räume mit Mackey-Topologie, die nicht tonneliert sind, und es gibt tonnelierte und vollständige *ck*-Räume, die nicht bornologisch sind, cf. (6.3).

Aus (5.1) und (5.2) erhält man mit Hilfe von [10], §18.4:

5.3 KOROLLAR. *Für jedes $F \in$ LCV ist $L_b F$ Unterraum von $L_b ckF$, und $L_b ckF$ ist vollständig.*

Mit „b“ beschreiben wir die Topologie der beschränkten Konvergenz. – Eine weitere Folgerung ist

5.4 KOROLLAR. *$F \in$ LCV ist genau dann ein semi-Montel-Raum* (*s.* [8]), *wenn ckF diese Eigenschaft hat.*

Denn F und ckF haben dieselben beschränkten Mengen, und diese sind in F bzw. ckF relativkompakt.

Aber selbst in diesem speziellen Fall können $F^{\times}$ und ckF verschieden sein, wie wir in (6.2) sehen werden.

Für *Montel-Räume* ergibt sich das folgende Vollständigkeitskriterium:

5.5 THEOREM. *Es seien F ein Montel-Raum und L_bF sein starker Dualraum.*

(1) *F ist genau dann vollständig, wenn L_bF ein ck-Raum ist.*

(2) *F ist genau dann ein ck-Raum, wenn L_bF vollständig ist.*

Beweis. L_bF ist ebenfalls ein Montel-Raum. Aus der Reflexivität der Montel-Räume folgt, dass (1) und (2) sogar äquivalente Aussagen sind. Wir beweisen (2):

Aus $F=ckF$ folgt die Vollständigkeit von L_bF nach (5.3). Sei umgekehrt L_bF vollständig. Als Montel-Raum ist F quasivollständig. Ferner haben wir $F\cong L_bL_bF=L_{co}L_{co}F$. Also hat F die Ascoli-Eigenschaft, und wir bekommen $F=ckF$ nach (3.10).

Auf Konsequenzen aus (5.5) kommen wir im nächsten Abschnitt zurück.

Jetzt beschäftigen wir uns noch mit „Permanenzeigenschaften" der *ck*-Räume. Für Produkte ist die Situation besser als z.B. bei den bornologischen Räumen:

5.6 SATZ.

(a) *Jeder Colimes in* **LCV** *von ck-Räumen ist wieder ein ck-Raum. Insbesondere sind also die in* **LCV** *gebildeten Quotienten, direkten Summen und induktiven Limites von ck-Räumen wieder ck-Räume.*

(b) *Das in* **LCV** *gebildete Produkt jeder Familie von ck-Räumen ist ein ck-Raum.*

Beweis.

(a) Dies ergibt sich unmittelbar daraus, dass der zugehörige Inklusionsfunktor einen Adjungierten, nämlich *ck*, besitzt.

(b) Ein direkter Beweis für diese Behauptung findet sich in der soeben erschienenen Note [20] von H. Porta. Unter Verwendung eines allgemeinen Satzes von M. de Wilde (cf. Cor. 1.1 in [19]) kann der Beweis etwas eleganter aber auch so geführt werden:

Ist zunächst $(F_i)_{i\in I}$ eine Familie vollständiger *ck*-Räume, so können wir nicht nur $\bigtimes_{i\in I} L_{co}L_{co}F_i$ und $L_{co}\bigoplus_{i\in I} L_{co}F_i$, sondern auch $\bigoplus_{i\in I} L_{co}F_i$ und $L_{co}\bigtimes_{i\in I} F_i$ miteinander identifizieren, cf. z.B. [15], pp. 103–104. Es ist $\bigtimes_{i\in I} F_i$ vollständig und hat die Ascoli-Eigenschaft wegen $\bigtimes_{i\in I} F_i\cong\bigtimes_{i\in I} L_{co}L_{co}F_i\cong L_{co}L_{co}\bigtimes_{i\in I} F_i$. Ferner impliziert die Vollständigkeit aller $L_{co}F_i$ die Vollständigkeit von $L_{co}\bigtimes_{i\in I} F_i\cong\bigoplus_{i\in I} L_{co}F_i$, so dass aus (3.10) die Behauptung $ck\bigtimes_{i\in I} F_i=\bigtimes_{i\in I} F_i$ folgt. Vergleiche hierzu auch mit [3].

Ist jetzt $(F_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie von *ck*-Räumen, so ist für $x=(x_i)_{i\in I}\in\bigtimes_{i\in I} F_i$ mit $x_i\neq 0$, $\forall i\in I$, insbesondere $\bigtimes_{i\in I}[x_i]\cong\mathbb{K}^I$ ein *ck*-Raum. Dabei bezeichnen wir den von x_i in F_i erzeugten linearen Teilraum mit $[x_i]$. Die Voraussetzungen von Cor.

1.1 in [19] sind damit erfüllt, d.h. die Topologie von $ck \bigtimes_{i\in I} F_i$ ist gröber als jene von $\bigtimes_{i\in I} F_i$; q.e.d.

Aus (5.6) folgt sofort, dass jedes Produkt in **LCV** von bornologischen Räumen wenigstens immer ein ck-Raum ist.

Unter der induzierten Topologie ist ein linearer Unterraum eines ck-Raumes allerdings nicht notwendig wieder ein ck-Raum, auch dann nicht, wenn er abgeschlossen ist. Man kann schliesslich jeden separierten lokalkonvexen Raum in ein Produkt von Banach-Räumen, also in einen ck-Raum einbetten. Konkrete Beispiele werden wir in (6.1) und (6.4) angeben.

Insbesondere ist nicht jeder **LCV**-Limes von ck-Räumen wieder ein ck-Raum.

Offen ist die Frage, ob für jeden separierten lokalkonvexen Raum F die Beziehung

$$(ckF)^{\sim} = ck(ckF)^{\sim}$$

gilt. Eine positive Antwort würde implizieren, dass ckF für vollständiges $F \in \mathbf{LCV}$ stets vollständig ist. Vergleiche hierfür die Bemerkung im Anschluss an (4.10) sowie (2.4).

Wir beschäftigen uns jetzt noch kurz mit der oben gestellten sowie einigen verwandten Fragen und beginnen mit

5.7 SATZ. *Für jeden separierten lokalkonvexen Raum F hat $(ckF)^{\sim}$ die Ascoli-Eigenschaft, und es gilt $ckL_{co}ckF = L_{co}(ckF)^{\sim}$.*

Beweis. Wir identifizieren $L(ckF)^{\sim}$ und $LckF$. Aus der Stetigkeit der Inklusion $ckF \to (ckF)^{\sim}$ folgt, dass $L_{co}(ckF)^{\sim} \xrightarrow{1} L_{co}ckF$ stetig ist. Ist also A eine relativkompakte Teilmenge in $L_{co}(ckF)^{\sim}$, so auch in $L_{co}ckF$. Es folgt, dass A in $LckF$ und damit in $L(ckF)^{\sim}$ gleichstetig ist, cf. (3.7). Also besitzen $L_{co}ckF$ und $L_{co}(ckF)^{\sim}$ dieselben relativkompakten Teilmengen, nämlich die gleichstetigen. Weil aber nach (3.3) $L_{co}(ckF)^{\sim}$ ein ck-Raum ist, erhalten wir $L_{co}(ckF)^{\sim} = ckL_{co}ckF$.

Zusammen mit (3.10) folgt:

5.8 KOROLLAR. *Die Vervollständigung $\tilde{F}$ eines ck-Raumes F ist genau dann ein ck-Raum, wenn $L_{co}\tilde{F}$ vollständig ist.*

Dual zu (5.8) gilt:

5.9 SATZ. *Sei F ein vollständiger separierter lokalkonvexer Raum. Genau dann ist ckF vollständig, wenn $L_{co}ckF$ ein ck-Raum ist.*

Beweis. Ist ckF vollständig, so ist $L_{co}ckF$ ein ck-Raum nach (3.3). Sei umgekehrt $L_{co}ckF$ ein ck-Raum. Dann folgt die Behauptung wegen $(\underline{ckF})^{\sim} = LckL_{co}ckF = LL_{co}ckF \cong L(L_{co}F)^{\sim} \cong LL_{co}F \cong \underline{F}$.

Analog zur Situation bei den bornologischen Räumen (cf. [10], §28) hat man das folgende Kriterium:

5.10 SATZ. *Die Vervollständigung $\tilde{F}$ eines ck-Raumes F ist genau dann ein ck-Raum, wenn folgendes gilt:*

$$\forall l \in Lck\tilde{F}: l/F = 0 \Rightarrow l = 0. \tag{*}$$

Beweis. Ist F ein ck-Raum, so ist (*) trivialerweise erfüllt. Es gelte also (*). Sei $l' \in LckF$. Dann ist $l := l'/F \in LF$ und besitzt eine wohlbestimmte stetige lineare Erweiterung $\tilde{l} \in L\tilde{F}$. Es ist $l' - \tilde{l} \in Lck\tilde{F}$ und $(l' - \tilde{l})/F = 0$. Wegen (*) erhalten wir damit $l' = \tilde{l}$. Es ist also $L\tilde{F} = Lck\tilde{F}$, d.h. $L_{co}\tilde{F}$ ist wegen (3.2) vollständig. Aus (5.8) folgt $\tilde{F} = ck\tilde{F}$.

Wir hätten auch (2.4) benutzen können.

Wie schon erwähnt, fehlt uns ein konkretes Beispiel eines vollständigen Raumes $F \in$ **LCV**, für den ckF nicht vollständig ist. Ebenso fehlt uns ein Beispiel eines ck-Raumes F, dessen Vervollständigung $\tilde{F}$ kein ck-Raum ist.

§ 6. Beispiele

Für einen separierten lokalkonvexen Raum F bezeichnen wir mit F_0 den Raum $\underline{F}$, versehen mit der feinsten Schwartz-Topologie, welche gröber ist als die Topologie von F. Die Topologie von F_0 liegt zwischen der Topologie von F und der schwachen Topologie $\sigma(F, LF)$. Insbesondere haben F und F_0 dieselben beschränkten Mengen. Wir nennen F_0 *den zu F assoziierten Schwartz-Raum.* Diese Räume sind zuerst in [14] und [2] näher untersucht worden. Wir wenden die dort erhaltenen Resultate für zwei Spezialfälle an:

6.1. In [10], §31.5, findet sich ein Beispiel eines Fréchet-Montel-Raumes F, der einen abgeschlossenen linearen Teilraum G besitzt, so dass der Quotientenraum F/G kein Fréchet-Montel-Raum mehr ist. Unter Verwendung des Korollars zur Proposition 7 in 3.§15 von [8] sieht man sofort, dass F kein Schwartz-Raum sein kann; F und F_0 sind also verschieden. Nach [2] ist F_0 in diesem Fall jedoch vollständig und damit insbesondere ein semi-Montel-Raum, cf. [8]. Da F ein Montel-Raum ist und da F und F_0 dieselben beschränkten Mengen besitzen, folgt, dass beide Räume auch dieselben kompakten Mengen haben müssen, dass also $F = ckF_0$ und sogar $F = kF_0$ gelten muss. Damit haben wir:

Ist F ein Fréchet-Montel-Raum und kein Schwartz-Raum, so ist der zu F assoziierte Schwartz-Raum F_0 kein ck-Raum.

Aber F_0 ist in natürlicher Weise ein abgeschlossener Unterraum eines Produktes von Banach-Räumen, nach (5.6) also eines ck-Raumes.

6.2. Die Situation ändert sich, wenn wir einen unendlichdimensionalen reflexiven

Banach-Raum F betrachten. Wie Raĭkov in [14] gezeigt hat, gilt für den assoziierten Schwartz-Raum F_0 diesmal

$$F_0 \cong L_{co} L_b F .$$

Als Banach-Raum ist $L_b F$ ein vollständiger ck-Raum. Nach (3.4) ist also auch F_0 ein vollständiger ck-Raum. Weil F unendlichdimensional ist, gilt $F \neq F_0$, Also haben wir:

Der zu einem unendlichdimensionalen reflexiven Banach-Raum F assoziierte Schwartz-Raum F_0 ist ein vollständiger ck-Raum, dessen Topologie nicht die Mackey-Topologie ist.

F_0 ist also insbesondere nicht quasitonneliert und erst recht nicht bornologisch.

6.3. Sei λ ein vollkommener Folgenraum mit α-Dual $\lambda^{\#}$. Dann ist λ unter seiner Mackey-Topologie $\tau(\lambda, \lambda^{\#})$ vollständig, cf. [10], §30.5, und darstellbar in der Form $L_{co} F$, wobei F den Raum $\lambda^{\#}$ unter seiner normalen Topologie bezeichnet, cf. [10], §30.6. Aus §30.1 und §30.5 in [10] folgt, dass F ebenfalls vollständig ist. Nach (3.3) ist deshalb λ unter $\tau(\lambda, \lambda^{\#})$ ein vollständiger ck-Raum.

Dieser Raum muss nicht tonneliert sein, cf. [10], §30,7, und wenn er tonneliert ist, braucht er noch nicht bornologisch zu sein; für ein Beispiel verweisen wir auf [11]. In diesem Beispiel ist übrigens λ unter $\tau(\lambda, \lambda^{\#})$ sogar darstellbar als Vervollständigung eines bornologischen Raumes.

Es gibt also vollständige nicht-tonnelierte ck-Räume mit Mackey-Topologie, und es gibt vollständige tonnelierte ck-Räume, die nicht bornologisch sind.

6.4. *Ist F ein quasivollständiger ck-Raum, aber nicht vollständig, so ist $L_{co} F$ kein ck-Raum.*

Die Topologie von $L_{co} F$ ist in diesem Fall nach dem Satz von Mackey-Arens nämlich gröber als die Mackey-Topologie $\tau(LF, \underline{F})$, wir haben also $\underline{F} \cong L L_{co} F$. Nach (3.5) und (3.11) ist jedoch $\underline{\tilde{F}} \cong L ck L_{co} F$, so dass $L_{co} F$ und $ck L_{co} F$ nicht einmal denselben Dualraum liefern.

6.5. In [12] und [1] gaben Kōmura und Amemiya Beispiele nichtvollständiger Montel-Räume. Für jeden deratigen Raum F ist $L_b F$ nach (5.5) ein *Beispiel eines Montel-Raumes, der kein ck-Raum ist.* Insbesondere ist $L_b F$ dann nicht bornologisch, so dass man auf diese Weise zusätzlich zu den bekannten Beispielen in [11], [13], [17] tonnelierte Räume erhält, die nicht bornologisch sind.

Allerdings liefern die nicht-vollständigen Montel-Räume F in [1] und [12] auch schon solche Beispiele. Nach Konstruktion sind ihre beschränkten Mengen nämlich endlichdimensional, es ist also $F^{\times} = ckF$, und daraus folgt, dass F nicht einmal ein ck-Raum ist. Also ist auch $L_b F$ ein unvollständiger Montel-Raum.

LITERATUR

[1] AMEMIYA, I. und KŌMURA, Y., *Über nicht-vollständige Montelräume,* Math. Ann. *177* (1968), 273–277.
[2] BEREZANSKIĬ, I. A., *Inductively reflexive, locally convex spaces,* Dokl. Akad. Nauk SSSR *182* (1968), 20–22. Engl. Übers. in Soviet Math. Dokl. *9* (1968), 1080–1082.
[3] BUCHWALTER, H., *Topologies et compactologies,* Publ. Dépt. Math. Lyon *6–2* (1969), 1–74.
[4] ——, *Espaces ultrabornologiques et b-réflexivité,* Publ. Dépt. Math. Lyon (1971–72).
[5] FRÖLICHER, A. und JARCHOW, H., *La réflexivité des espaces vectoriels à génération compacte,* C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A *274* (1972), 616–617.
[6] FRÖLICHER, A. und ROULIN, M., *Topologies faibles et topologies à génération compacte,* Erscheint in Enseign. Math.
[7] GABRIEL, P. und ZISMAN, M., *Calculus of fractions and homotopy theory* (Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1967).
[8] HORVÁTH, J., *Topological vector spaces and distributions I* (Reading, Mass., Addison-Wesley 1966).
[9] KELLEY, J. L., *General topology* (Princeton, van Nostrand 1955).
[10] KÖTHE, G., *Topologische lineare Räume I.* 2. Aufl. (Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1966).
[11] KŌMURA, T. und KŌMURA, Y., *Sur les espaces parfaits de suites et leurs généralisations,* J. Math. Soc. Japan *15* (1963), 319–338.
[12] KŌMURA, Y., *Some examples on linear topological spaces,* Math. Ann. *153* (1964), 150–162.
[13] NACHBIN, L., *Topological vector spaces of continuous functions,* Proc. Nat. Acad. Sci. USA *40* (1954) 471–474.
[14] RAĬKOV, D. A., *Einige Eigenschaften vollstetiger linearer Operatoren* (russ.), Učen Zap. Moskov Gos. Ped. Inst. im V. I. Lenina, *188* (1962), 171–191.
[15] ROBERTSON, A. P. und ROBERTSON, W. J., *Topologische Vektorräume,* Mannheim: Bibliographisches Institut 1967. (Uebersetzung).
[16] SEIP, U., *Kompakt erzeugte Vektorräume und Analysis,* Lecture Notes in Math. *273,* 1972.
[17] SHIROTA, T., *On locally convex vector spaces of continuous functions,* Proc. Jap. Acad. *30* (1954), 294–298.
[18] STEENROD, N., *A convenient category of topological spaces,* Mich. Math. J. *14* (1967), 133–152.
[19] DE WILDE, M., *Vector topologies and linear maps on products of topological vector spaces,* Math. Ann. *196* (1972), 117–128.
[20] PORTA, H., *Compactly determined locally convex topologies,* Math. Ann. *196* (1972), 91–100.

Prof. Dr. A. Frölicher, Institut de Mathématiques, Université de Genève
Prof. Dr. H. Jarchow, Mathematisches Institut, Universität Zürich

Eingegangen, 31 Mai 1972