Gruppen mit Poincaré-Dualität

Gruppen mit Poincaré-Dualität

ROBERT BIERI (Promotionsarbeit)

0. Einleitung

Die vorliegende Arbeit handelt von Gruppen G mit der Eigenschaft, dass zwischen der Homologie und der Cohomologie von G eine der Poincaré-Dualität einer kompakten Mannigfaltigkeit analoge Dualität besteht.

Wir nennen G eine *Poincaré-Dualität-Gruppe* (PD-Gruppe) der Dimension n, wenn es eine (feste) Zahl n, auf der additiven Gruppe der ganzen Zahlen eine G-Modul-Struktur $\tilde{\mathbf{Z}}$ und für jeden G-Modul A eine Folge von natürlichen Isomorphismen

$$f^k : H^k(G, A) \cong H_{n-k}(G, \tilde{\mathbf{Z}} \otimes A), \quad k \in \mathbf{Z},$$

gibt. Dabei operiert G diagonal auf $\tilde{\mathbf{Z}} \otimes A$. Es stellt sich heraus, dass solche Isomorphismen – falls sie existieren – stets durch das *cap-Produkt* mit einem festen 'Fundamentalzyklus' $e \in H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}})$ geliefert werden (Satz 2.6). Wir werden daher schon in der Definition die Isomorphismen f^k als durch das cap-Produkt gegeben voraussetzen, denn die dadurch entstehende Mehrarbeit wird durch bessere Einsicht belohnt. Operiert die PD-Gruppe G trivial auf dem dazugehörigen G-Modul $\tilde{\mathbf{Z}}$, dann heisst sie *orientierbar*, andernfalls *nichtorientierbar*. Jede nichtorientierbare PD-Gruppe enthält genau eine orientierbare PD-Gruppe mit Index 2 (Korollar 2.1.2).

Unsere wichtigsten allgemeinen Resultate sind die folgenden zwei Erweiterungssätze: 1) *PD-Gruppen sind torsionsfrei; und Untergruppen von endlichem Index in PD-Gruppen sind PD-Gruppen. Umgekehrt ist G eine PD-Gruppe, wenn sie torsionsfrei ist und eine PD-Gruppe mit endlichem Index enthält* (Satz 2.1.1 und Satz 2.4.1). 2) *Jede Extension einer PD-Gruppe der Dimension n durch eine PD-Gruppe der Dimension m ist eine PD-Gruppe der Dimension m+n* (Satz 2.5).

Mit diesen zwei Erweiterungssätzen lassen sich die auflösbaren PD-Gruppen vollständig bestimmen: *Eine auflösbare Gruppe ist genau dann eine PD-Gruppe, wenn sie torsionsfrei und polyzyklisch ist* (Satz 3.1.2 und Satz 3.3.1). Zur Untersuchung der Orientierbarkeit drängt sich eine Verallgemeinerung auf: Man kann die Homologie einer Gruppe über einem beliebigen kommutativen Koeffizientenring R mit Einselement betrachten und damit genau wie oben die Klasse der 'PD-Gruppen über R' definieren. Wir hoffen, später auf diese Verallgemeinerung zurückzukommen, und verwenden in diesem Zusammenhang nur die Tatsache, dass eine PD-Gruppe (über $\mathbf{Z}$) auch eine PD-Gruppe über dem Körper $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen ist, wobei sich an der Orientierbarkeit nichts ändert. Nun ist aber jede polyzyklische Gruppe G eine PD-Gruppe über $\mathbf{Q}$ (Satz 3.2.2). Ob G orientierbar oder nichtorientierbar ist, lässt sich an Hand einer invarianten Reihe mit abelschen Faktoren entscheiden (Satz 3.2.4). Speziell sind alle endlich erzeugten, nilpotenten Gruppen orientierbar.

Natürlich ist G eine PD-Gruppe, wenn der Eilenberg-MacLane-Raum $K(G, 1)$ homotopieäquivalent zu einer kompakten Mannigfaltigkeit ist. Es ist somit leicht, auch nichtauflösbare PD-Gruppen anzugeben, etwa die Fundamentalgruppen der 2-dimensionalen geschlossenen Flächen vom Geschlecht $\geqslant 2$ im $\mathbf{R}^3$. Wir werden aber den Eilenberg-MacLane-Raum in der vorliegenden Arbeit nie verwenden, sondern rein algebraisch argumentieren. Immerhin sei bemerkt, dass schon allein die Analogie zur Poincaré-Dualität der kompakten Mannigfaltigkeiten eine Reihe von Resultaten liefert, etwa: Ist die Dimension n einer orientierbaren PD-Gruppe G ungerade, dann ist die Euler-Charakteristik $\chi(G)=0$; ist $n=2k$ gerade aber nicht durch 4 teilbar, dann ist der Rang von $H_k(G, \mathbf{Z})$ und damit auch $\chi(G)$ gerade; u.s.w.

Da das cap-Produkt ein ausserordentlich starkes Werkzeug bei der Behandlung der Poincaré-Dualität ist, stellen wir im ersten Kapitel die Definition und einige wohlbekannte Eigenschaften zusammen, tun dies aber – im Hinblick darauf, dass es sich doch nur um ein Werkzeug handelt – möglichst kurz und elementar mit Hilfe der Barresolution. U.a. wird dabei auch die cap-Produkt-Struktur der Spektralreihen von Lyndon-Hochschild-Serre diskutiert. Wer sich nicht für Einzelheiten im Zusammenhang mit dem cap-Produkt interessiert, kann ohne weiteres mit der Lektüre des zweiten Kapitels beginnen. Hier folgen Definition und allgemeine Eigenschaften der PD-Gruppen, wobei das Schwergewicht auf den beiden Erweiterungssätzen liegt. Schliesslich bestimmen wir im dritten Kapitel die auflösbaren PD-Gruppen und diskutieren die Orientierbarkeit der polyzyklischen Gruppen.

Im zweiten und dritten Kapitel wird intensiv die Spektralreihe von Lyndon-Hochschild-Serre verwendet. Wir machen aber darauf aufmerksam, dass man (etwa zum Beweis von Lemma 2.2) auch die Spektralreihe von Dold [4, 2.12] heranziehen könnte. F. Ischebeck [7] verwendet die Dold'sche Spektralreihe zur Herleitung einer formalen Dualität zwischen den Funktoren Ext und Tor in einer abelschen Kategorie. Für Gruppen mit noetherschem Gruppenring ist Lemma 2.2 im wesentlichen die Aussage von [7, Satz 1.14].

In der Terminologie halten wir uns nach Möglichkeit an MacLane [8] und an Gruenberg [5]. Unter 'Homologie' ist in der Regel 'Homologie und Cohomologie' zu verstehen.

An erster Stelle möchte ich Herrn Professor Dr. B. Eckmann für sein Interesse an meiner Arbeit, für seine Anregungen und für die mir in jeder Hinsicht entgegengebrachte Unterstützung herzlich danken. Zu grossem Dank verpflichtet bin ich aber auch Herrn Professor Dr. U. Stammbach. Auch er war immer bereit, über Probleme im Zusammenhang mit meiner Arbeit zu diskutieren, und hat mir wertvolle Hinweise gegeben.

Inhaltsverzeichnis

1. Das cap-Produkt

1.1 *Definition*

Es sei G eine Gruppe, A ein G-Modul. Wir setzen $xa = ax^{-1}$ ($x \in G$, $a \in A$), was uns ermöglicht, A nach Belieben als links- oder als rechts-G-Modul aufzufassen. Sei $\mathbf{Z}$ die additive Gruppe der ganzen Zahlen mit trivialer G-Modul-Struktur, und sei X eine G-projektive Auflösung von $\mathbf{Z}$ mit Differential d. Die Homologiegruppen von G mit Koeffizienten in A sind definiert als

$$H_n(G, A) = H_n(A \otimes_G X), \qquad H^n(G, A) = H^n(\mathrm{Hom}_G(X, A)).$$

Dabei nimmt man im Kettenkomplex $A \otimes_G X$ die Homologie bezüglich dem Differential $\partial_n = 1_A \otimes d_n$, im Cokettenkomplex $\mathrm{Hom}_G(X, A)$ bezüglich dem Corandoperator $\delta^n = (-1)^{n+1} \mathrm{Hom}_G(d_n, 1_A)$.

Zur Definition des cap-Produkts wählen wir für X speziell die normalisierte Barresolution $B(G)$. $B_n(G)$ ist die freie abelsche Gruppe über den $(n+1)$-Tupeln $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in G$, mit $x_{i-1} \neq x_i$, versehen mit der durch $x(x_0, x_1, \dots, x_n) = (xx_0, \dots, xx_n)$, $x \in G$, gegebenen G-Modul-Struktur. Das Differential $d: B_n \to B_{n-1}$ ist gegeben durch

$$d(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n).$$

Sei C ein rechts-G-Modul. Das cap-Produkt

$$\cap: (C \otimes_G B_n) \otimes \mathrm{Hom}_G(B_k, A) \to (C \otimes A) \otimes_G B_{n-k}$$

ist auf den Elementen $e = c \otimes (x_0, \dots, x_n) \in C \otimes_G B_n$ und $f \in \mathrm{Hom}_G(B_k, A)$ wie folgt definiert:

$$e \cap f = (c \otimes (x_0, \ldots, x_n)) \cap f = (c \otimes f(x_0, \ldots, x_k)) \otimes (x_k, \ldots, x_n).$$

Dabei operiert G diagonal auf $C \otimes A$, d.h. es ist $(c \otimes a)x = cx \otimes ax$, für alle $c \in C$, $a \in A$, $x \in G$. Nun gilt $\partial(e \cap f) = (-1)^k \partial e \cap f + e \cap \delta f$, $k = \deg(f)$, also induziert das cap-Produkt in den Komplexen ein cap-Produkt in der Homologie

$$\cap : H_n(G, C) \otimes H^k(G, A) \to H_{n-k}(G, C \otimes A).$$

Bemerkung. Verwendet man zur Berechnung der Homologie von G die Barresolution einer grösseren Gruppe $\bar{G} \supset G$, dann induziert die Einbettung $B(G) \subset B(\bar{G})$ einen Isomorphismus. Man kann also mit genau derselben Formel das cap-Produkt auch mit Hilfe von $B(\bar{G})$ berechnen.

1.2 *Elementare Eigenschaften*

Das cap-Produkt liefert Homomorphismen zwischen der Cohomologie und der Homologie einer Gruppe G. Um Aussagen über diese Homomorphismen zu gewinnen, wollen wir hier einige elementare Eigenschaften des cap-Produkts zusammenstellen.

LEMMA 1.2.1. *Es seien A, A', C, C' G-Moduln, und seien $\alpha : A \to A'$ und $\gamma : C \to C'$ zwei G-Homomorphismen. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ:*

$$\begin{array}{ccc} H_n(G, C) \otimes H^k(G, A) & \xrightarrow{\cap} & H_{n-k}(G, C \otimes A) \\ {\scriptstyle \alpha_* \otimes \gamma_*} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle (\alpha \otimes \gamma)_*} \\ H_n(G, C') \otimes H^k(G, A') & \xrightarrow{\cap} & H_{n-k}(G, C' \otimes A'). \end{array}$$

LEMMA 1.2.2. *Sei $E : 0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ eine kurze exakte Folge von G-Moduln. Sei C ein G-Modul mit der Eigenschaft, dass die Folge $C \otimes E : 0 \to C \otimes A' \to C \otimes A \to \to C \otimes A'' \to 0$ immer noch exakt ist. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ:*

$$\begin{array}{ccc} H_n(G, C) \otimes H^k(G, A'') & \xrightarrow{\cap} & H_{n-k}(G, C \otimes A'') \\ {\scriptstyle 1 \otimes \Delta_E} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \Delta_{C \otimes E}} \\ H_n(G, C) \otimes H^{k+1}(G, A') & \xrightarrow{\cap} & H_{n-k-1}(G, C \otimes A'). \end{array}$$

Dabei ist Δ der zur entsprechenden kurzen exakten Folge gehörige 'connecting homomorphism'.

Lemma 1.2.1 ist fast trivial; Lemma 1.2.2 beruht auf der Formel $\partial(e \cap f) = (-1)^k \partial e \cap f + e \cap \delta f$, $e \in C \otimes_G B$, $f \in \mathrm{Hom}_G(B, A)$. Vertauscht man in Lemma 1.2.2 die Rollen des G-Moduls C und Folge E, dann erhält man eine analoge Aussage: Das entsprechende Diagramm ist bis auf ein Vorzeichen $(-1)^k$ ebenfalls kommutativ. Aus Lemma 1.2.1 und 1.2.2 folgt direkt:

LEMMA 1.2.3. *Sei C ein G-Modul, dessen unterliegende abelsche Gruppe torsionsfrei ist. Dann liefert das cap-Produkt mit einem festen Element* $e \in H_n(G, C)$ *eine natürliche Transformation der zusammenhängenden Folge von Funktoren*

$$(e \cap -): H^k(G, -) \to H_{n-k}(G, C \otimes -), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Um die folgenden Eigenschaften übersichtlich darstellen zu können, verwenden wir die Adjungiertheit von Tensorprodukt und Hom-Funktor und schreiben das cap-Produkt als Abbildung

$$\cap : H_n(G, C) \to \operatorname{Hom}(H^k(G, A), H_{n-k}(G, C \otimes A)), \quad n, k \in \mathbf{Z}.$$

LEMMA 1.2.4. *Sei* $\varphi : G_1 \to G$ *ein Gruppenhomomorphismus. Fasst man die G-Moduln A und C mit Hilfe von* φ *auch als* G_1*-Moduln auf, dann ist das folgende Diagramm kommutativ*:

$$\begin{array}{ccc} H_n(G_1, C) & \xrightarrow{\cap} & \operatorname{Hom}(H^k(G_1, A), H_{n-k}(G_1, C \otimes A)) \\ {\scriptstyle \varphi_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \operatorname{Hom}(\varphi^*, \varphi_*)} \\ H_n(G, C) & \xrightarrow{\cap} & \operatorname{Hom}(H^k(G, A), H_{n-k}(G, C \otimes A)). \end{array}$$

Der Beweis von Lemma 1.2.4 ist evident. In den meisten Fällen ist φ die Einbettung einer Untergruppe in G, und wir schreiben $\varphi_* = \operatorname{cor}_*$ und $\varphi^* = \operatorname{res}^*$.

Sei U eine Untergruppe von endlicheom Index in G. Dann gibt es bekanntlich Abbildungen $\operatorname{res}_* : H_*(G, C) \to H_*(U, C)$ und $\operatorname{cor}^* : H^*(U, A)$. Wir wollen das Verhalten des cap-Produkts bezüglich dieser Abbildungen studieren. Sei C ein G-Modul, A ein U-Modul. Dann induziert die Kettenäquivalenz $s^{-1} : (C \otimes (A \otimes_U \mathbf{Z}G)) \otimes_G B(G) \to$ $\to (C \otimes A) \otimes_U B(G)$, mit $s^{-1}((c \otimes (a \otimes x)) \otimes b) = (cx^{-1} \otimes a) \otimes xb$, $c \in C$, $a \in A$, $x \in G$, $b \in B(G)$, einen natürlichen Isomorphismus

$$\sigma_*^{-1} : H_*(G, C \otimes (A \otimes_U \mathbf{Z}G)) \to H_*(U, C \otimes A).$$

Dabei ist $A \otimes_U \mathbf{Z}G$ via rechts-G-Struktur von $\mathbf{Z}G$ als G-Modul aufzufassen, G operiert diagonal auf $C \otimes (A \otimes_U \mathbf{Z}G)$, und U operiert diagonal auf $C \otimes A$. Ist C der triviale Modul $\mathbf{Z}$, dann liefert σ_* die wohlbekannte Isomorphie $H_*(U, A) \cong H_*(G, A \otimes_U \mathbf{Z}G)$. Der dazu duale Isomorphismus

$$\tau^* : H^*(U, A) \to H^*(G, \operatorname{Hom}_U(\mathbf{Z}G, A))$$

wird durch die Cokettenäquivalenz $t : \operatorname{Hom}_U(B(G), A) \to \operatorname{Hom}_G(B(G), \operatorname{Hom}_U(\mathbf{Z}G, A))$, mit $tf(b)(x) = f(xb)$, $f \in \operatorname{Hom}_U(B, A)$, $b \in B(G)$, $x \in G$, induziert.

LEMMA 1.2.5. *Sei U eine Untergruppe von endlichem Index in der Gruppe G. Sei*

C ein G-Modul und A ein U-Modul. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} H_n(G, C) & \xrightarrow{\frown} & \operatorname{Hom}(H^k(G, \operatorname{Hom}_U(\mathbf{Z}G, A)), H_{n-k}(G, C \otimes \operatorname{Hom}_U(\mathbf{Z}G, A))) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{res}_*} & & \downarrow{\scriptstyle \operatorname{Hom}(\tau^*, \sigma_*{}^{-1}\theta_*)} \\ H_n(U, C) & \xrightarrow{\frown} & \operatorname{Hom}(H^k(U, A), H_{n-k}(U, C \otimes A)). \end{array}$$

Dabei wird θ_* vom wohlbekannten Isomorphismus $\theta: \operatorname{Hom}_U(\mathbf{Z}G, A) \to A \otimes_U \mathbf{Z}G$ induziert. θ wird mit Hilfe eines links-Repräsentantensystems $\{r_i\}$ von G modulo U definiert: Für $f \in \operatorname{Hom}_U(\mathbf{Z}G, A)$ ist $\theta(f) = \sum_i f(r_i) \otimes r_i$. Nachdem nun alle beteiligten Homomorphismen explizite angegeben wurden, kann Lemma 1.2.5 durch einfache Verifikation von $s^{-1}\theta(e \frown tf) = \mathrm{res}_* e \frown f$, $e \in C \otimes_G B(G)$, $f \in \operatorname{Hom}_U(B(G), A)$, bewiesen werden.

Ist N ein Normalteiler der Gruppe G, dann operiert bekanntlich G auf der Homologie von N mit Koeffizienten in einem G-Modul. Es gilt:

LEMMA 1.2.6. *Sei N ein Normalteiler der Gruppe G, seien A und C G-Moduln. Dann gilt für alle $g \in G$, $e \in H_n(N, C)$, $f \in H^k(N, A)$: $(e \frown f)g = eg \frown g^{-1}f$.*

Beweis. Sei $\bar{e} = c \otimes (x_0, \ldots, x_n) \in C \otimes_N B_n(G)$, $\bar{f} \in \operatorname{Hom}_N(B_k(G), A)$. Dann ist $\bar{e}g = cg \otimes (g^{-1}x_0, \ldots, g^{-1}x_n)$ und $(g^{-1}\bar{f})(x_0, \ldots, x_k) = g^{-1}\bar{f}(gx_0, \ldots, gx_k)$, also

$$\begin{aligned} \bar{e}g \frown g^{-1}\bar{f} &= (cg \otimes g^{-1}\bar{f}(x_0, \ldots, x_k)) \otimes (g^{-1}x_k, \ldots, g^{-1}x_n) \\ &= (c \otimes \bar{f}(x_0, \ldots, x_k))\, g \otimes (g^{-1}x_k, \ldots, g^{-1}x_n) \\ &= (\bar{e} \frown \bar{f})\, g, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

1.3 *Die cap-Produkt-Struktur der Lyndonspektralreihe*

Es sei N ein Normalteiler der Gruppe G, und sei A ein G-Modul. Dann gibt es nach Lyndon-Hochschild-Serre Spektralreihen

$$\begin{aligned} &H_r(G/N, H_s(N, A)) \cong E^2_{r,s} \Rightarrow H_{r+s}(G, A) \\ &H^p(G/N, H^q(N, A)) \cong E_2^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(G, A). \end{aligned}$$

Im vorliegenden Abschnitt werden wir die cap-Produkt-Struktur dieser Spektralreihen untersuchen. Dabei wäre es ohne weiteres möglich, genau dual dazu auch das cup-Produkt zu behandeln. Das wollen wir aber nicht tun. Erstens sind wir im Hinblick auf die Poincaré-Dualität hauptsächlich am cap-Produkt interessiert, und zweitens wurde die cup-Produkt-Struktur der Lyndonspektralreihe schon 1953 von Hochschild-Serre [6] untersucht. Der Beweis von Hochschild-Serre ist allerdings nicht derselbe, sondern verwendet eine direkte Filtrierung der Cokettengruppe von G.

Wir betrachten die zwei Bikomplexe

$$K^{p,q}(A) = \operatorname{Hom}_G(B_p(G/N) \otimes B_q(G), A) \cong \operatorname{Hom}_{G/N}(B_p(G/N), \operatorname{Hom}_N(B_q(G), A)),.$$

mit den partiellen Differentiationen δ', δ'',

$$(\delta' f)(b' \otimes b'') = (-1)^{p+q+1} f(db' \otimes b''), \qquad f \in K^{p,q},\ b' \in B_{p+1},\ b'' \in B_q,$$
$$(\delta'' f)(b' \otimes b'') = (-1)^{q+1} f(b' \otimes db''), \qquad f \in K^{p,q},\ b' \in B_p,\ b'' \in B_{q+1},$$

und

$$K_{s,r}(A) = A \otimes_G (B_s(G) \otimes B_r(G/N)) \cong (A \otimes_N B_s(G)) \otimes_{G/N} B_r(G/N),$$

mit den partiellen Differentiationen ∂', ∂'',

$$\left.\begin{aligned} \partial'(a \otimes b' \otimes b'') &= a \otimes db' \otimes b'' \\ \partial''(a \otimes b' \otimes b'') &= (-1)^s a \otimes b' \otimes db'' \end{aligned}\right\} \quad a \in A,\ b' \in B_s,\ b'' \in B_r.$$

K^* und K_* sind Funktoren von der Kategorie der G-Moduln in die Kategorie der Bikomplexe. Zu zwei G-Moduln A und C definieren wir ein cap-Produkt in den Bikomplexen

$$\cap : K_{s,r}(C) \otimes K^{p,q}(A) \to K_{s-q,r-p}(C \otimes A)$$

wie folgt: Für die Elemente $e = c \otimes (x_0, \ldots, x_s) \otimes (y_0, \ldots, y_r) \in K_{s,r}(C)$ und $f \in K^{p,q}(A)$ sei

$$e \cap f = (-1)^{sp}(c \otimes f((y_0, \ldots, y_p) \otimes (x_0, \ldots, x_q))) \otimes ((x_q, \ldots, x_s) \otimes (y_p, \ldots, y_r)).$$

Man überzeugt sich leicht, dass die folgenden Formeln gelten:

$$\left.\begin{aligned} \partial''(e \cap f) &= (-1)^{p+q} \partial' e \cap f + e \cap \delta'' f \\ \partial'(e \cap f) &= (-1)^{p+q} \partial'' e \cap f + e \cap \delta' f. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

$\cap$ induziert in den Totalen Komplexen $\operatorname{Tot} K^*$ und $\operatorname{Tot} K_*$ ein Produkt

$$\cap : (\operatorname{Tot} K_*(C))_n \otimes (\operatorname{Tot} K^*(A))^k \to (\operatorname{Tot} K_*(C \otimes A))_{n-k},$$

und aus (*) folgt für die totalen Differentiale $\delta = \delta' + \delta''$ und $\partial = \partial' + \partial''$, $\partial(e \cap f) = (-1)^k \partial e \cap f + e \cap \delta f$. Damit wird auch in der Homologie der totalen Komplexe ein Produkt $\cap$ induziert. Die Homologie der totalen Komplexe ist aber isomorph zur Homologie von G, wobei diese Isomorphismen durch die folgenden Kettentransformationen induziert werden:

$$\xi : \operatorname{Hom}_G(B(G), A) \xrightarrow{\xi'} K^{0,*}(A) \subset \operatorname{Tot} K^*(A)$$
$$\eta : \operatorname{Tot} K_*(C) \twoheadrightarrow K_{*,0}(C) \xrightarrow[\eta']{} C \otimes_G B(G).$$

Dabei ist $(\xi' f)(b' \otimes b'') = f(b'')$, für $f \in \operatorname{Hom}_G(B, A)$, $b' \in B_0$, $b'' \in B$, und $\eta'(c \otimes (b' \otimes b'')) = c \otimes b'$, für $c \in C$, $b' \in B$, $b'' \in B_0$. Nun verifiziert man leicht:

LEMMA 1.3.1. *Das über die Bikomplexe K^*, K_* definierte cap-Produkt fällt mit* *dem gewöhnlichen cap-Produkt in der Homologie von G zusammen, d.h., das folgende Diagramm ist kommutativ:*

$$\begin{array}{ccc} H_n(\operatorname{Tot} K_*(C)) & \xrightarrow{\cap} & \operatorname{Hom}(H^k(\operatorname{Tot} K^*(A)), H_{n-k}(\operatorname{Tot} K_*(C \otimes A))) \\ {\scriptstyle \eta_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \operatorname{Hom}(\xi^*, \eta_*)} \\ H_n(G, C) & \xrightarrow{\cap} & \operatorname{Hom}(H^k(G, A), H_{n-k}(G, C \otimes A)). \end{array}$$

Zu den Bikomplexen K^* und K_* gehören je zwei Spektralreihen, die beide gegen die Homologie des entsprechenden totalen Komplexes konvergieren. Die eine der beiden Spektralreihen ist jeweils trivial. Die anderen, nicht trivialen Spektralreihen bezeichnen wir als

$$E_{r,s} \Rightarrow H_{r+s}(\operatorname{Tot} K_*) \quad \text{und} \quad E^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(\operatorname{Tot} K^*).$$

Dank den Formeln (*) induziert das in den Bikomplexen definierte cap-Produkt ein Produkt in den Spektralreihen, d.h., für jedes $\omega = 2, 3, \ldots$ eine Abbildung

$$\cap : E^{\omega}_{r,s}(C) \otimes E^{p,q}_{\omega}(A) \to E^{\omega}_{r-p,s-q}(C \otimes A).$$

Andererseits gilt für die Anfangsterme ($\omega = 2$) bekanntlich

$$\varrho_* : E^2_{r,s}(C) \cong H_r(G/N, H_s(N, C))$$
$$\varrho^* : E^{p,q}_2(A) \cong H^p(G/N, H^q(N, A)),$$

und durch das cap-Produkt in der Homologie von N und G/N wird in der iterierten Homologie in naheliegender Weise ebenfalls ein Produkt

$$\cap : H_r(G/N, H_s(N, C)) \otimes H^p(G/N, H^q(N, A)) \to H_{r-p}(G/N, H_{s-q}(N, C \otimes A))$$

induziert. Aus der Definition folgt nun fast trivialerweise:

LEMMA 1.3.2. *Das folgende Diagramm ist bis auf ein Vorzeichen* $(-1)^{sp}$ *kommutativ:*

$$\begin{array}{ccc} E^2_{r,s}(C) \otimes E^{p,q}_2(A) & \xrightarrow{\cap} & E_{r-p,s-q}(C \otimes A) \\ {\scriptstyle \varrho_* \otimes \varrho^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varrho_*} \\ H_r(G/N, H_s(N, C)) \otimes H^p(G/N, H^q(N, A)) & \xrightarrow{\cap} & H_{r-p}(G/N, H_{s-q}(N, C \otimes A)), \end{array}$$

d.h. für alle $e \in E^2_{r,s}(C)$ *und* $f \in E^{p,q}_2(A)$ *gilt*

$$\varrho_*(e \cap f) = (-1)^{sp} \varrho_*(e) \cap \varrho^*(f).$$

2. Poincaré-Dualität-Gruppen

2.1 *Definition – Orientierbarkeit*

DEFINITION. Eine Gruppe G heisst eine *Poincaré–Dualität-Gruppe* (kurz: eine PD-Gruppe) *der Dimension n*, wenn es auf der additiven Gruppe der ganzen Zahlen eine (triviale oder nichttriviale) G-Modul-Struktur $\tilde{\mathbf{Z}}$ gibt, derart dass das cap-Produkt mit einem festen Element $e \in H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}})$ für jeden G-Modul A Isomorphismen

$$(e \cap -): H^k(G, A) \cong H_{n-k}(G, \tilde{A}), \qquad k \in \mathbf{Z},$$

liefert. Dabei ist $\tilde{A}$ der G-Modul $\tilde{\mathbf{Z}} \otimes A$ mit diagonaler Operation. e heisst ein *Fundamentalzyklus* der Gruppe G. Wir nennen G eine *orientierbare* PD-Gruppe, wenn $\tilde{\mathbf{Z}}$ der triviale G-Modul $\mathbf{Z}$ ist; hat $\tilde{\mathbf{Z}}$ eine nichttriviale G-Struktur, dann heisst G eine *nicht-orientierbare* PD-Gruppe.

Bemerkungen. 1) Wenn eine Gruppe G die Eigenschaft hat, dass für jeden G-Modul A und für alle $k>n$ $H_k(G, A)=0$ ist, dass es aber einen G-Modul B mit $H_n(G, B) \neq 0$ gibt, dann ist n die *homologische Dimension* von G, und wir schreiben $hdG = n$. Gilt analog für jeden G-Modul A und für alle $k>m$ $H^k(G, A)=0$, aber $H^m(G, B) \neq 0$ für einen gewissen G-Modul B, dann ist m die *cohomologische Dimension von* G, und wir schreiben $cdG = m$. Für jede PD-Gruppe G der Dimension n gilt offenbar $hdG = cdG = n$. *PD-Gruppen sind also torsionsfrei.*

2) Für eine PD-Gruppe der Dimension n gilt offensichtlich: $H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}})$ ist unendlich-zyklisch und wird von jedem Fundamentalzyklus e erzeugt. *G ist genau dann orientierbar, wenn $H_n(G, \mathbf{Z}) \neq 0$* ist.

3) Ist der Eilenberg-MacLane-Raum $K(G, 1)$ einer Gruppe G homotopieäquivalent zu einer n-dimensionalen, kompakten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, dann ist G eine PD-Gruppe der Dimension n und genau dann orientierbar, wenn $\mathfrak{M}$ eine orientierbare Mannigfaltigkeit ist. Wir werden aber den Eilenberg-MacLane-Raum nie verwenden, sondern alle Beweise rein algebraisch führen.

SATZ 2.1.1. *Sei G eine PD-Gruppe, $U \subset G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Dann ist U eine PD-Gruppe derselben Dimension. Ferner ist die Untergruppe U genau dann orientierbar, wenn sie im Kern der Abbildung $G \to \mathrm{Aut}(\tilde{\mathbf{Z}})$ liegt.*

Beweis. Es sei n die Dimension von G und $e \in H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}})$ ein Fundamentalzyklus. Wir berechnen das cap-Produkt mit dem festen Element $\mathrm{res}_* e \in H_n(U, \tilde{\mathbf{Z}})$ in der Homologie von U. Nach Lemma 1.2.5. ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc}
H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}}) & \xrightarrow{\cap} & \mathrm{Hom}\big(H^k(G, \mathrm{Hom}_U(\mathbf{Z}G, A)), H_{n-k}(G, \mathrm{Hom}_U(\mathbf{Z}G, A))\big) \\
{\scriptstyle \mathrm{res}_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(\tau^*, \sigma_*^{-1}\theta_*)} \\
H_n(U, \tilde{\mathbf{Z}}) & \xrightarrow{\cap} & \mathrm{Hom}\big(H^k(U, A), H_{n-k}(U, A)\big).
\end{array}$$

τ^*, σ_*^{-1} und θ_* sind Isomorphismen. Da nach Voraussetzung $(e \cap -)$ ein Isomorphismus ist, muss auch $(\mathrm{res}_* e \cap -)$ ein Isomorphismus sein. U ist also eine PD-Gruppe der Dimension n, mit dem Fundamentalzyklus $\mathrm{res}_* e \in H_n(U, \tilde{\mathbf{Z}})$. Offensichtlich ist U genau dann orientierbar, wenn $\tilde{\mathbf{Z}}$ als U-Modul trivial ist. Damit ist der Satz bewiesen.

KOLLAR 2.1.2. *Jede nichtorientierbare PD-Gruppe enthält genau eine orientierbare PD-Gruppe mit Index* 2.

2.2 *Ein nützliches Lemma*

Das folgende Lemma erweist sich oft als ein recht nützliches Werkzeug, wenn es darum geht, von einer gegebenen Gruppe nachzuweisen, dass sie eine PD-Gruppe ist.

LEMMA 2.2. *Die Gruppe G ist dann und nur dann eine PD-Gruppe der Dimension n, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $cdG \leqslant n$

(ii) $H^k(G, F)=0$, *für jeden freien G-Modul F und für alle* $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

(iii) *Es gibt auf der additiven Gruppe der ganzen Zahlen eine G-Modul-Struktur* $\tilde{\mathbf{Z}}$, *und es gibt ein (festes) Element* $e \in H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}})$, *derart dass das cap-Produkt mit e für jeden freien G-Modul F einen Isomorphismus* $(e \frown -)$: $H^n(G, \tilde{F}) \cong H_0(G, F)$ *liefert.*

Beweis. Sei G eine PD-Gruppe der Dimension n. Dann ist (i) trivialerweise erfüllt. Ferner gilt $\tilde{\tilde{A}} \cong A$ für jeden G-Modul A, also ist auch (iii) evident. Sei B eine beliebige abelsche Gruppe. Wir betrachten den durch die rechts-G-Struktur von $\mathbf{Z}G$ definierten G-Modul $B_* = B \otimes \mathbf{Z}G$. B_* heisst ein *induzierter* G-Modul. Nun ist die Abbildung f : $: B_* \to \tilde{B}_*$, auf den Elementen $b \otimes g \in B_*$ gegeben durch

$$f(b \otimes g) = \begin{cases} 1 \otimes b \otimes g, & \text{für} \quad g \in \operatorname{Ker}(G \to \operatorname{Aut}(\tilde{\mathbf{Z}})) \\ -1 \otimes b \otimes g, & \text{für} \quad g \notin \operatorname{Ker}(G \to \operatorname{Aut}(\tilde{\mathbf{Z}})), \end{cases}$$

ein G-Isomorphismus. Speziell sind alle freien G-Moduln F induziert, also ist $H^k(G, F) \cong H_{n-k}(G, \tilde{F})=0$, für $k \neq n$, womit auch (ii) verifiziert ist.

Sei umgekehrt G eine Gruppe mit (i), (ii) und (iii). Wir betrachten den Funktor $h_k(G, -) = H^{n-k}(G, \tilde{\mathbf{Z}} \otimes -)$, $k \in \mathbf{Z}$, von der Kategorie der G-Moduln in die Kategorie der abelschen Gruppen. $h_k(G, -)$ hat die folgenden drei Eigenschaften:

1) Zu jeder kurzen exakten Sequenz $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ von G-Moduln gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \to h_k(G, A') \to h_k(G, A) \to h_k(G, A'') \to h_{k-1}(G, A') \to \cdots,$$

gegeben durch die zur exakten Folge $0 \to \tilde{A}' \to \tilde{A} \to \tilde{A}'' \to 0$ gehörigen 'Cohomologiesequenz'.

2) Ist F ein freier G-Modul, dann gilt $h_k(G, F)=0$, für alle $k>0$. Das folgt aus (ii) und der Tatsache, dass F und $\tilde{F}$ isomorphe G-Moduln sind.

3) Für jeden G-Modul A liefert das cap-Produkt mit e einen Isomorphismus $h_0(G, A) \cong H_0(G, A)$. Um das zu zeigen, betrachten wir eine kurze exakte Folge $0 \to K \to F \to A \to 0$ von G-Moduln, wobei F G-frei sein soll. Dann ist auch die Folge

$0 \to \tilde{K} \to \tilde{F} \to \tilde{A} \to 0$ exakt und induziert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \to H^n(G, \tilde{K}) & \to & H^n(G, \tilde{F}) & \to & H^n(G, \tilde{A}) & \to & 0 \\
{\scriptstyle (e\cap -)}\downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \\
\cdots \to H_0(G, K) & \to & H_0(G, F) & \to & H_0(G, A) & \to & 0.
\end{array}$$

Die obere Zeile ist exakt wegen $cdG = n$. F ist frei, also ist β nach Voraussetzung (iii) ein Isomorphismus. Dann ist aber α epimorph. Diese Überlegung gilt für beliebige G-Moduln A, also ist γ ebenfalls epimorph. Dann muss aber α ein Monomorphismus sein.

Aus 1), 2), 3) und der durch Lemma 1.2.3 garantierten Natürlichkeit folgt die Existenz einer Folge von natürlichen Isomorphismen $f_k: h_k(G, A) \cong H_k(G, A)$, $k \in \mathbf{Z}$ ($h_k(G, -)$ ist ein *minimaler homologischer Funktor*; siehe Gruenberg [5, chapter 2.2]). Man kann aber noch viel mehr sagen: Die Erweiterung des natürlichen Homomorphismus $f_0: h_0(G, A) \to H_0(G, A)$ zu einer natürlichen Transformation der minimalen homologischen Funktoren ist eindeutig bestimmt. Aus $f_0 = (e\cap -)_0$ folgt daher $f_k = (e\cap -)_k$ für alle k, womit Lemma 2.2 bewiesen ist.

2.3 *Operation auf der Homologie eines Normalteilers*

Es sei N eine PD-Gruppe der Dimension n und Normalteiler in der Gruppe G. Die Homologiegruppen von N mit Koeffizienten in einem G-Modul A haben bekanntlich eine G-Modul-Struktur. Im allgemeinen respektieren die durch das cap-Produkt gegebenen Isomorphismen $H^k(N, A) \cong H_{n-k}(N, \tilde{A})$ die G-Modul-Struktur nicht. Diese Unzulänglichkeit lässt sich allerdings leicht korrigieren:

LEMMA 2.3. *Sei N eine PD-Gruppe der Dimension n und Normalteiler in der Gruppe G; sei $H_n(N, \tilde{\mathbf{Z}}) \cong \mathbf{Z}$. Dann kann man $\tilde{\mathbf{Z}}$ als G-Modul auffassen, und die durch das cap-Produkt gegebenen Isomorphismen*

$$H^k(N, A) \cong H_{n-k}(N, H_n(N, \tilde{\mathbf{Z}}) \otimes \tilde{A}), \quad k \in \mathbf{Z},$$

sind für jeden G-Modul A mit der G-Modul-Struktur der Homologiegruppen verträglich. Dabei operiert G diagonal auf $H_n(N, \tilde{\mathbf{Z}}) \otimes \tilde{A}$.

Beweis. Sei $\bar{N} = \mathrm{Ker}(N \to \mathrm{Aut}(\tilde{\mathbf{Z}}))$. Nach Satz 2.1.1 ist $\bar{N}$ eine orientierbare PD-Gruppe, und wegen Korollar 2.1.2 charakteristisch in N, also normal in G. Daher hat $H_n(\bar{N}, \mathbf{Z})$ eine wohldefinierte G-Modul-Struktur. Wir wollen zeigen, dass $H_n(\bar{N}, \mathbf{Z})$ und $\tilde{\mathbf{Z}}$ als N-Moduln isomorph sind. Das ist trivial, wenn N selber orientierbar, also $N = \bar{N}$ ist. Sei N nichtorientierbar, und sei $x \in N$, $x \notin \bar{N}$. Nach Cartan-Eilenberg [3, XII, Corollary 9.2] ist die zusammengesetzte Abbildung

$$H_n(\bar{N}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\mathrm{cor}_*} H_n(N, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\mathrm{res}_*} H_n(\bar{N}, \mathbf{Z})$$

gerade die Multiplikation mit der Norm $1+x\bar{N}$ der Faktorgruppe $N/\bar{N}\cong \mathbf{Z}_2$. Da aber $H_n(N, \mathbf{Z})=0$ ist, folgt daraus $(1+x\bar{N})a=0$, also $(x\bar{N})a=-a$, für alle $a\in H_n(\bar{N}, \mathbf{Z})$, was zu beweisen war. Damit haben wir $\tilde{\mathbf{Z}}$ zu einem G-Modul erweitert. Der Rest der Behauptung ist eine direkte Konsequenz von Lemma 1.2.6.

2.4 *Extensionen von PD-Gruppen durch endliche Faktorgruppen*

PD-Gruppen sind torsionsfrei, und wir haben gezeigt, dass die Untergruppen von endlichem Index in einer PD-Gruppe wieder PD-Gruppen sind (Satz 2.1.1). In diesem Abschnitt werden wir die Umkehrung beweisen:

SATZ 2.4.1. *Jede torsionsfreie Gruppe, die eine PD-Gruppe als Untergruppe von endlichem Index enthält, ist selber eine PD-Gruppe.*

Sei U eine Untergruppe von endlichem Index in der Gruppe G. Dann enthält U einen Normalteiler N_1 von G mit endlicher Faktorgruppe G/N_1. Mit U ist auch N_1 eine PD-Gruppe und enthält daher eine orientierbare PD-Gruppe N vom Index $|N_1:N|\leqslant 2$. N ist nach Korollar 2.1.2 charakteristisch in N_1, also normal in G. Es genügt somit, das folgende Korollar zu beweisen:

KOROLLAR 2.4.2. *Sei $S:1\to N\to G\to E\to 1$ eine kurze exakte Folge von Gruppen. Sei E endlich, G torsionsfrei und N eine orientierbare PD-Gruppe. Dann ist G eine (ev. nichtorientierbare) PD-Gruppe.*

ZUSATZ. *Es sei n die Dimension von N. G ist dann und nur dann orientierbar, wenn E trivial auf $H_n(N, \mathbf{Z})\cong\mathbf{Z}$ operiert.*

Beweis. Nach dem Satz von Serre (siehe [10, Theorem 9.2]) haben N und G dieselbe cohomologische (und homologische) Dimension n. Ist F ein freier G-Modul, dann ist F auch als N-Modul frei, also $H^k(N, F)\cong H_{n-k}(N, F)=0$, für $k\neq n$. Durch Betrachten der zur Sequenz S gehörigen Spektralreihe folgt daraus, $H^k(G, F)=0$, für $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$. Damit sind die Voraussetzungen (i) und (ii) von Lemma 2.2 erfüllt. Die Verifikation der Voraussetzung (iii) führen wir in zwei Schritten.

BEHAUPTUNG 1. Es bezeichne $\tilde{\mathbf{Z}}$ den G-Modul $H_n(N, \mathbf{Z})$. Dann gilt:

(1) $H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}})=\mathbf{Z}$, (2) $\operatorname{cor}_* H_n(N, \tilde{\mathbf{Z}})=|E|\, H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}})$.

Beweis. Es sei $\varepsilon:\mathbf{Z}G\to\mathbf{Z}$ die Augmentationsabbildung $\varepsilon(g)=1$, $g\in G$, und $I_G=\operatorname{Ker}\varepsilon$ das Augmentationsideal. Für jeden G-Modul A bezeichne A_G den Faktor A/AI_G und A^G die Fixpunkte $\{a\in A;\, ga=a\ \forall g\in G\}$ von A unter G. Wir erinnern ferner an die Tatsache, das die Restriktionsabbildungen in die Homologie eines Normalteilers wie folgt faktorisieren:

$$\operatorname{res}^*: H^*(G, A)\xrightarrow{r} H^*(N, A)^E\to H^*(N, A)$$
$$\operatorname{cor}_*: H_*(N, A)\to H_*(N, A)_E\xrightarrow{c} H_*(G, A).$$

Nun betrachten wir speziell die G-Moduln $\tilde{\mathbf{Z}}_* = \tilde{\mathbf{Z}}G$ und $\tilde{\mathbf{Z}}^* = \widetilde{\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}G, \mathbf{Z})}$. $\tilde{\mathbf{Z}}_*$ ist N-frei. $\tilde{\mathbf{Z}}^*$ ist als N-Modul isomorph zu $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}N, \oplus\mathbf{Z})$, also coinduziert (siehe Gruenberg [5, chapter 2.1]). Da N eine PD-Gruppe ist, gilt damit für $k \neq n: H^k(N, \tilde{\mathbf{Z}}_*) = 0$ und $H_k(N, \tilde{\mathbf{Z}}^*) = 0$. Durch Betrachten der zur Folge S gehörigen Spektralreihen folgt daraus, dass die Abbildungen

$$r: H^n(G, \tilde{\mathbf{Z}}_*) \to H^n(N, \tilde{\mathbf{Z}}_*)^E \quad \text{und} \quad c: H_n(N, \tilde{\mathbf{Z}}^*)_E \to H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}}^*)$$

Isomorphismen sind.

Die durch die Augmentationsabbildung ε induzierten Homomorphismen $\varphi: \tilde{\mathbf{Z}}_* \to \tilde{\mathbf{Z}}$ und $\psi: \tilde{\mathbf{Z}} \to \tilde{\mathbf{Z}}^*$ induzieren in der Homologie die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^n(G, \tilde{\mathbf{Z}}_*) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "\mathrm{res}^*"'] & H^n(G, \tilde{\mathbf{Z}}) \arrow[d] \\
H^n(N, \tilde{\mathbf{Z}}_*) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & H^n(N, \tilde{\mathbf{Z}}) \arrow[d] \\
H_0(N, \mathbf{Z}_*) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & H_0(N, \mathbf{Z}) \arrow[d] \\
\mathbf{Z}E \arrow[r, "\varepsilon"'] & \mathbf{Z}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}}) \arrow[r, "\psi_*"] & H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}}^*) \\
H_n(N, \tilde{\mathbf{Z}}) \arrow[r] \arrow[u] & H_n(N, \tilde{\mathbf{Z}}^*) \arrow[u, "\mathrm{cor}_*"'] \\
H^0(N, \mathbf{Z}) \arrow[r] \arrow[u] & H^0(N, \mathbf{Z}^*) \arrow[u, "\cong"'] \\
\mathbf{Z} \arrow[r, "1 \to \varepsilon"'] \arrow[u] & \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}E, \mathbf{Z}) \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Die beiden obersten und die beiden untersten Quadrate sind trivialerweise kommutativ, und die Kommutativität der mittleren Quadrate folgt aus Lemma 1.2.1. Man beachte, dass nach Lemma 2.3 sämtliche Homomorphismen der beiden Diagramme mit der E-Modul-Struktur verträglich sind. Demzufolge werden die beiden folgenden kommutativen Quadrate induziert:

$$\begin{tikzcd}
H^n(G, \tilde{\mathbf{Z}}_*) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "\cong"'] & H^n(G, \tilde{\mathbf{Z}}) \arrow[d, "\mathrm{res}^*"] \\
\mathbf{Z}E^E \arrow[r] & \mathbf{Z}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}}) \arrow[r, "\psi_*"] & H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}}^*) \\
\mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{cor}_*"] & \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}E, \mathbf{Z})_E . \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Sowohl $\mathbf{Z}E^E$ als auch $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}E, \mathbf{Z})_E \cong \mathbf{Z}E_E$ ist unendlich-zyklisch. Aus dem linken Quadrat folgt leicht: φ_* ist ein Isomorphismus, und das Bild von $H^n(G, \tilde{\mathbf{Z}})$ unter res^* ist gleich dem Bild von $\mathbf{Z}E^E$, also gleich $|E| \cdot \mathbf{Z}$. Auf der rechten Seite ist die Situation nicht ganz so einfach, und wir bemerken lediglich, dass ψ_* nicht die Nullabbildung ist. Daher ist $H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}}) \cong \mathbf{Z}$. Mehr zu sagen scheint vorerst nicht möglich zu sein. Nun kommt uns aber eine etwas allgemeinere Form des Universellen-Koeffizienten-Theorems zu Hilfe: Zu jedem trivialen G-Modul A gibt es eine natürliche, kurze exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(G, \tilde{\mathbf{Z}}), A) \to H^n(G, \tilde{A}) \to \mathrm{Hom}(H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}}), A) \to 0,$$

welche in nichtnatürlicher Weise spaltet. Dabei muss G nicht notwendigerweise trivial auf $\tilde{\mathbf{Z}}$ operieren. Die üblichen Beweise des Theorems liefern auch diese leichte Verallgemeinerung. Für uns folgt daraus die Existenz eines natürlichen Isomorphismus $H^n(G, \tilde{\mathbf{Z}}) \cong \mathrm{Hom}(H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}}), \mathbf{Z})$. Nun folgt Behauptung 1 (2) aus der entsprechenden Eigenschaft in der Cohomogie.

BEHAUPTUNG 2. Es gibt ein Element $e' \in H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}})$, derart dass das cap-Produkt mit e' für jeden freien G-Modul F einen Isomorphismus $(e' \cap -): H^n(G, \tilde{F}) \cong F_G$ liefert.

Beweis. Es sei $F = \mathbf{Z}G \otimes B$, B eine frei-abelsche Gruppe. Ferner sei daran erinnert, dass $\tilde{\mathbf{Z}}$ den G-Modul $H_n(N, \mathbf{Z})$ bezeichnet. Nach Lemma 1.2.4 ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} H_n(N, \tilde{\mathbf{Z}}) & \xrightarrow{\cap} & \mathrm{Hom}(H^n(N, \tilde{F}), H_0(N, F)) \\ {\scriptstyle \mathrm{cor}_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(\mathrm{res}^*, \mathrm{cor}_*)} \\ H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}}) & \xrightarrow{\cap} & \mathrm{Hom}(H^n(G, \tilde{F}), H_0(G, F)). \end{array}$$

Sei $e \in H_n(N, \tilde{\mathbf{Z}})$ ein Fundamentalzyklus von N. Für das cap-Produkt mit dem Element $\mathrm{cor}_* e \in H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}})$ gilt $(\mathrm{cor}_* e \cap -) = \mathrm{cor}_*(e \cap -)\, \mathrm{res}^*$. Dabei sind nach Lemma 2.3 alle Homomorphismen mit der E-Modul-Struktur verträglich, also wird das folgende kommutative Diagramm induziert:

$$\begin{array}{ccccccc} H^n(G, \tilde{F}) & \xrightarrow{\mathrm{res}^*} & H^n(N, \tilde{F}) & \xrightarrow[\cong]{(e \cap -)} & F_N & \xrightarrow{\mathrm{cor}_*} & F_G \\ \| & & \cup & & \cup & & \| \\ H^n(G, \tilde{F}) & \xrightarrow[r]{} & H^n(N, \tilde{F})^E & \xrightarrow[\cong]{} & (F_N)^E & \xrightarrow[i]{} & (F_N)_E. \end{array}$$

F ist frei als N-Modul, also gilt für $k \neq n: H^k(N, \tilde{F}) = H_{n-k}(N, F) = 0$. Daraus folgt durch Betrachten der zur Sequenz S gehörigen Spektralreihe, dass r ein Isomorphismus ist. Ferner ist $F_N = (\mathbf{Z}G \otimes B)_N \cong \mathbf{Z}E \otimes B$, weil E eine endliche Gruppe ist also $(F_N)^E \cong B$ und $(F_N)_E \cong B$. Dabei entspricht die durch die Identität von F_N induzierte Abbildung i der Multiplikation mit $|E|$. Zusammengefasst haben wir damit ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^n(G, \tilde{F}) & \xrightarrow{(\mathrm{cor}_* e \cap -)} & F_G \\ \wr\| & & \wr\| \\ B & \xrightarrow[|E|]{} & B \end{array}$$

Nach Behauptung 1 gibt es ein Element $e' \in H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}})$ mit $|E| e' = \mathrm{cor}_* e$. Dann muss aber die Abbildung $(e' \cap -): H^n(G, \tilde{F}) \to F_G$ ein Isomorphismus sein. Damit ist Behauptung 2, also nach Lemma 2.2 auch Korollar 2.4.2, bewiesen.

2.5 *Extensionen von PD-Gruppen durch PD-Gruppen*

SATZ 2.5. *Sei $S: 1 \to G' \to G \to G'' \to 1$ eine kurze exakte Folge von Gruppen. Sei G' eine PD-Gruppe der Dimension n und G'' eine PD-Gruppe der Dimension m. Dann ist G eine PD-Gruppe der Dimension $m+n$.*

ZUSATZ. *Es sei $\tilde{\mathbf{Z}}''$ diejenige G''-Modul-Struktur auf $\mathbf{Z}$, für welche $H_m(G'', \tilde{\mathbf{Z}}'') \cong \mathbf{Z}$ ist. Dann gilt: G ist dann und nur dann orientierbar, wenn G' orientierbar und die diagonale Operation von G'' auf $\tilde{\mathbf{Z}}'' \otimes H_n(G', \mathbf{Z})$ trivial ist.*

Beweis. Es bezeichne $\tilde{\mathbf{Z}}'$ diejenige G'-Struktur auf $\mathbf{Z}$, für welche $H_n(G', \tilde{\mathbf{Z}}') \cong \mathbf{Z}$ ist. Dann ist nach Lemma 2.3 $\tilde{\mathbf{Z}}'$ ein G-Modul, also auch $H_n(G', \tilde{\mathbf{Z}}')$. Wir setzen

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \tilde{\mathbf{Z}}'' \otimes H_n(G', \tilde{\mathbf{Z}}') \otimes \tilde{\mathbf{Z}}',$$

mit diagonaler G-Struktur, und versuchen wieder, die Voraussetzungen von Lemma 2.2 zu verifizieren.

1) $cd G \leqslant cd G' + cd G'' = n+m$ folgt mit dem 'Maximumprinzip' aus der Spektralreihe von Hochschild-Serre.

2) Sei F ein freier G-Modul. Dann sind auch die Moduln $\tilde{F}' = \tilde{\mathbf{Z}}' \otimes F$ und $\tilde{F} = \tilde{\mathbf{Z}} \otimes F$ G-frei, also G'-frei. Weil G' eine PD-Gruppe ist, gilt daher $H^k(G', F) \cong H_{n-k}(G', \tilde{F}') = 0$ für $k \neq n$. Mit Hilfe der zur Sequenz S gehörigen Spektralreihe folgt daraus:

$$\begin{aligned} H^k(G, F) &\cong H^{k-n}(G'', H^n(G', F)), \qquad k \in \mathbf{Z}, \\ &\cong H^{k-n}(G'', H_0(G', H_n(G', \tilde{\mathbf{Z}}') \otimes \tilde{F}')), \qquad \text{nach Lemma 2.3}, \\ &\cong H_{m+n-k}(G'', H_0(G', \tilde{F})). \end{aligned}$$

Nun ist $H_0(G', \tilde{F}) \cong \tilde{F}_{G'}$ frei als G''-Modul, also ist $H^k(G, F) = 0$ für $k \neq m+n$.

3) Sei A ein beliebiger G-Modul. Wir betrachten die zu S gehörigen Spektralreihen E^* und E_*. Nach Lemma 1.3.1 und 1.3.2 ist das folgende Diagramm bis auf ein Vorzeichen kommutativ:

$$\begin{array}{ccc}
H_{m+n}(G, \tilde{\mathbf{Z}}) \otimes H^{m+n}(G, A) & \xrightarrow{\frown} & H_0(G, \tilde{A}) \\
{\scriptstyle \eta_* \otimes \xi^*}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \cong}\downarrow{\scriptstyle \eta_*} \\
E^{\infty}_{m,n}(\tilde{\mathbf{Z}}) \otimes E_{\infty}^{m,n}(A) & \xrightarrow{\frown} & E^{\infty}_{0,0}(\tilde{A}) \\
\downarrow{\scriptstyle =} & & {\scriptstyle \cong}\downarrow \\
E^{2}_{m,n}(\tilde{\mathbf{Z}}) \otimes E_{2}^{m,n}(A) & \xrightarrow{\frown} & E^{2}_{0,0}(\tilde{A}) \\
{\scriptstyle \varrho_* \otimes \varrho^*}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \cong}\downarrow{\scriptstyle \varrho_*} \\
H_m(G'', H_n(G', \tilde{\mathbf{Z}})) \otimes H^m(G'', H^n(G', A)) & \xrightarrow{\frown} & H_0(G'', H_0(G', \tilde{A}))
\end{array}$$

Sei $e' \in H_n(G', \tilde{\mathbf{Z}}')$ ein Fundamentalzyklus von G' und $e'' \in H_m(G'', \tilde{\mathbf{Z}}'')$ ein Fundamentalzyklus von G''. $\tilde{\mathbf{Z}}$ ist als G'-Modul isomorph zu $\tilde{\mathbf{Z}}'$ und $H_n(G', \tilde{\mathbf{Z}})$ ist als G''-Modul isomorph zu $\tilde{\mathbf{Z}}''$, also definiert das Paar e', e'' ein Element $\bar{e} \in H_m(G'', H_n(G', \tilde{\mathbf{Z}}))$. Das cap-Produkt mit $\bar{e}$ ist definiert durch die zusammengesetzte Abbildung

$$(\bar{e} \frown -) = H_0(G'', (e' \frown -)) \circ (e'' \frown -)$$

und liefert daher einen Isomorphismus. Folglich liefert das cap-Produkt mit dem Element $e=\eta_*^{-1}\,\varrho_*^{-1}(\bar{e})\in H_{m+n}(G, \tilde{\mathbf{Z}})$ einen Isomorphismus $(e\cap -): H^{m+n}(G, A)\cong$ $\cong H_0(G, \tilde{A})$.

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 2.2 erfüllt, G ist also eine PD-Gruppe der Dimension $m+n$. Ist G' nichtorientierbar, dann ist $H_n(G', \mathbf{Z})=0$, also ist auch $H_{m+n}(G, \mathbf{Z})=H_m(G'', H_n(G', \mathbf{Z}))=0$, d.h. G ist ebenfalls nichtorientierbar. Für orientierbare G' gilt nach Definition: G ist genau dann orientierbar, wenn $\tilde{\mathbf{Z}}=\tilde{\mathbf{Z}}''\otimes H_n(G', \mathbf{Z})$ der triviale G-Modul $\mathbf{Z}$ ist. Damit ist Satz 2.5 bewiesen.

2.6 *Definition einer PD-Gruppe ohne Verwendung des cap-Produkts*

In [2] nennen wir G eine 'Gruppe mit Poincaré-Dualität', wenn es eine ganze Zahl $n\geqslant 0$ und zu jedem G-Modul A natürliche Isomorphismen $H^k(G, A)\cong H_{n-k}(G, A)$, $k\in\mathbf{Z}$, gibt. Diese Definition ist scheinbar schwächer als die Definition einer (orientierbaren) PD-Gruppe. Wir werden aber in diesem Abschnitt zeigen, dass die 'Gruppen mit Poincaré-Dualität' im Sinne von [2] genau die orientierbaren PD-Gruppen sind.

SATZ 2.6. *Sei G eine Gruppe, und sei $\tilde{\mathbf{Z}}$ die additive Gruppe der ganzen Zahlen mit einer (trivialen oder nichttrivialen) G-Modul-Struktur. Wenn es eine Zahl $n\geqslant 0$ und für jeden G-Modul A eine Folge von natürlichen Isomorphismen*

$$f_A^k: H^k(G, A)\cong H_{n-k}(G, \tilde{A}), \qquad k\in\mathbf{Z},$$

gibt, dann ist G eine PD-Gruppe der Dimension n. Genauer: Es existiert ein Fundamentalzyklus $e\in H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}})$, derart dass das cap-Produkt mit e gerade die Abbildungen f_A^k liefert. Dabei bezeichnet $\tilde{A}$ den G-Modul $\tilde{\mathbf{Z}}\otimes A$ mit diagonaler Operation.

Beweis. Wir werden wieder die Voraussetzungen von Lemma 2.2 verifizieren. Die Voraussetzungen (i) und (ii) sind trivialerweise erfüllt. Die Verifikation von (iii) führen wir in zwei Schritten.

BEHAUPTUNG 1. Es gibt ein Element $e\in H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}})$, derart dass das cap-Produkt mit e, $(e\cap -)_{\tilde{\mathbf{Z}}}^n: H^n(G, \tilde{\mathbf{Z}})\to\mathbf{Z}$, gerade die Abbildung $f_{\tilde{\mathbf{Z}}}^n$ liefert.

Beweis. Die im Beweis von Korollar 2.4.2 bereits erwähnte, etwas allgemeinere Form des Universellen-Koeffizienten-Theorems liefert einen Epimorphismus α: $: H^n(G, \tilde{\mathbf{Z}})\to \mathrm{Hom}(H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}}), \mathbf{Z})$. Beide Gruppen sind unendlich-zyklisch, also muss α ein Isomorphismus sein. Die cap-Produkt-Abbildung $\cap: H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}})\to \mathrm{Hom}(H^n(G, \tilde{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z})$ kann als Zusammensetzung der Evaluationsabbildung $H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}})\to\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}}), \mathbf{Z}), \mathbf{Z})$ mit dem induzierten Homomorphismus $\mathrm{Hom}(\alpha, \mathbf{Z})$ beschrieben werden. Beide Abbildungen sind in unserem Falle Isomorphismen, und daher gibt es sicher ein Element $e\in H_n(G, \tilde{\mathbf{Z}})$, das dabei auf den Homomorphismus $f_{\tilde{\mathbf{Z}}}^n\in\mathrm{Hom}(H^n(G, \tilde{\mathbf{Z}}), \mathbf{Z})$ abgebildet wird.

BEHAUPTUNG 2. Das cap-Produkt mit e liefert für jeden freien G-Modul F einen Isomorphismus $(e\cap -)^n_{\tilde F}: H^n(G, \tilde F) \cong H_0(G, F)$, der gerade mit f^n_F übereinstimmt.

Beweis. Wir betrachten die kurze exakte Folge $0 \to I_G \xrightarrow{i} \mathbf{Z}G \to \mathbf{Z} \to 0$, wo I_G das Augmentationsideal von G bezeichnet. Die Abbildungen f^n und $(e\cap -)^n$ sind beide natürlich, also ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} H^n(G, \tilde I_G) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "f^n_{I_G}"'] & H^n(G, \tilde{\mathbf{Z}}G) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f^n_{\mathbf{Z}G}"'] \arrow[d, shift left, "(e\cap -)^n_{\mathbf{Z}G}"] & H^n(G, \tilde{\mathbf{Z}}) \arrow[r] \arrow[d, "f^n_{\mathbf{Z}} = (e\cap -)^n_{\mathbf{Z}}"] & 0 \\ H_0(G, I_G) \arrow[r, "0"'] & H_0(G, \mathbf{Z}G) \arrow[r] & H_0(G, \mathbf{Z}) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Die Einbettung i induziert in der Homologie die Nullabbildung $H_0(G, i) = 0$. Da $f^n_{I_G}$ und $f^n_{\mathbf{Z}G}$ Isomorphismen sind, ist auch $i^* = H^n(G, i) = 0$. Dann muss aber $f^n_{\mathbf{Z}G}$ mit $(e\cap -)^n_{\mathbf{Z}G}$ zusammenfallen. Damit ist Behauptung 2 für endlich erzeugte freie G-Moduln F bewiesen. Der Beweis ist für beliebige freie G-Moduln F erbracht, wenn wir zeigen, dass unter den Voraussetzungen von Satz 2.6 der Cohomologiefunktor $H^k(G, -)$ mit dem direkten Limes vertauscht. Das ist aber fast trivial, denn er ist nach Voraussetzung ja natürlich äquivalent zum Funktor $H_{n-k}(G, \tilde{\mathbf{Z}} \otimes -)$. Damit ist Behauptung 2 bewiesen, nach Lemma 2.2 also auch Satz 2.6.

Bemerkung. Man könnte mit Hilfe von Satz 2.6 die PD-Gruppen ohne Verwendung des cap-Produkts definieren. Dadurch würden sich einzelne Beweise etwas vereinfachen lassen, insbesondere müsste man zum Beweis von Satz 2.5 die cap-Produkt-Struktur der Lyndonspektralreihe nicht mehr verwenden. Da aber andererseits das cap-Produkt derart eng mit dem Begriff der PD-Gruppe verknüpft ist, scheint mir eine Definition, die diesen Zusammenhang von Anfang an in den Mittelpunkt stellt, berechtigt zu sein.

3. Anwendungen

3.1 *Polyzyklische Gruppen*

Die Gruppe G sei unendlich-zyklisch und vom Element x erzeugt. Dann ist der Eilenberg-MacLane-Raum $K(G, 1)$ homotopieäquivalent zur Sphäre S^1. Es gilt also:

LEMMA 3.1.1. *Die unendlich-zyklische Gruppe ist eine orientierbare PD-Gruppe der Dimension* 1.

Der Vollständigkeit halber wollen wir diese fast triviale Tatsache auch algebraisch beweisen. Es sei I_G das Augmentationsideal von G, und sei A ein beliebiger G-Modul. I_G ist als G-Modul frei auf dem Element $1-x$, also gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\begin{aligned} f_A^1 : H^1(G, A) &\cong \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_G(\mathbf{Z}G, A) \to \mathrm{Hom}_G(I_G, A)) \\ &= \mathrm{Coker}(A \xrightarrow{1-x} A) \\ &= A_G . \end{aligned}$$

Ferner gilt für jeden freien G-Modul $F = \oplus \mathbf{Z}G : H^0(G, F) = F^G \cong \oplus (\mathbf{Z}G)^G = 0$, man kann also f_A^1 zu einer Folge von natürlichen Isomorphismen $f_A^k : H^k(G, A) \cong H_{1-k}(G, A)$ erweitern. Nach Satz 2.6 folgt daraus die Behauptung.

Bemerkung. Die unendlich-zyklische Gruppe ist die einzige PD-Gruppe der Dimension 1. In der Tat muss eine solche Gruppe G nach Stallings-Swan frei sein, und wegen $H_1(G, \mathbf{Z}) \cong G/G'$ ist erstens G orientierbar und zweitens die Anzahl der freien Erzeugenden gleich 1.

Eine Gruppe G heisst *auflösbar*, wenn sie eine (endliche) Normalreihe $G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd \cdots \rhd G_r = 1$ mit abelschen Faktoren G_{k-1}/G_k, $1 \leqslant k \leqslant r$, besitzt. Es bezeichne hG die Summe der Ränge dieser Faktoren (ev. ∞). hG ist unabhängig von der gewählten Normalreihe und heisst die '*Hirschzahl von G*'. Die Gruppe G heisst *polyzyklisch*, wenn sie eine (endliche) Normalreihe mit lauter zyklischen Faktoren besitzt. Lemma 3.1.1, zusammen mit den Erweiterungssätzen 2.4.1 und 2.5, impliziert:

SATZ 3.1.2. *Jede torsionsfreie, polyzyklische Gruppe G ist eine PD-Gruppe der Dimension hG.*

Bemerkungen. 1) Satz 2.4.1 liefert sogar etwas mehr: Eine torsionsfreie Gruppe G, die eine polyzyklische Untergruppe G_1 von endlichem Index enthält, ist eine PD-Gruppe der Dimension hG_1. Ein Spezialfall davon ist die (von der topologischen Betrachtungsweise her natürlich wohlbekannte) Tatsache, dass alle torsionsfreien, kristallographischen Gruppen des $\mathbf{R}^n$ PD-Gruppen der Dimension n sind; siehe [11, Theorem 3.3.2].

2) Satz 3.1.2 enthält ein Resultat von Gruenberg [5, chapter 8.8], wonach die cohomologische Dimension einer torsionsfreien, polyzyklischen Gruppe gleich ihrer Hirschzahl ist.

3) Wir werden im Abschnitt 3.3 sehen, dass mit den torsionsfreien, polyzyklischen Gruppen schon alle auflösbaren PD-Gruppen gefunden sind.

3.2 *Die Orientierbarkeit polyzyklischer Gruppen*

Es geht nun darum, ein rein gruppentheoretisches Kriterium zu finden, das uns erlaubt zu entscheiden, ob eine gegebene, torsionsfreie, polyzyklische Gruppe orientierbar oder nichtorientierbar ist. Hier drängt sich eine Verallgemeinerung auf: Es sei G eine beliebige Gruppe, und sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Ein

RG-Modul ist gegeben durch einen R-Modul A, zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus $\Phi: G \to \mathrm{Aut}_R(A)$. Wir sagen, A sei ein fasttrivialer RG-Modul, wenn das Bild $\Phi(G)$ in der Untergruppe $\{Id, -Id\} \subset \mathrm{Aut}_R(A)$ liegt.

DEFINITION. G heisst eine '*PD-Gruppe der Dimension n über R*', wenn es auf R eine fasttriviale RG-Modul-Struktur $\tilde{R}$ gibt, derart dass das cap-Produkt mit einem festen Element $e \in H_n(G, \tilde{R})$ für jeden RG-Modul A R-Isomorphismen

$$(e \cap -): H^k(G, A) \cong H_{n-k}(G, \tilde{R} \otimes_R A), \quad k \in \mathbf{Z},$$

liefert. Dabei operiert G diagonal auf $\tilde{R} \otimes_R A$. Ist $\tilde{R}$ der triviale RG-Modul R, dann heisst G *orientierbar*, andernfalls *nichtorientierbar über R*.

Wir hoffen, später auf diese allgemeinere Situation zurückzukommen, und machen in diesem Zusammenhang nur die folgenden Bemerkungen: Eine PD-Gruppe der Dimension n (über $\mathbf{Z}$) ist eine PD-Gruppe der Dimension n über jedem Ring R. Wenn die Charakteristik von R nicht 2 ist, dann ändert sich dabei nichts an der Orientierbarkeit. Zur Untersuchung der Orientierbarkeit einer PD-Gruppe G braucht man also G nur als PD-Gruppe über dem Körper $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen zu betrachten. Das hat zwei Vorteile: Erstens werden die Rechnungen einfacher, und zweitens wird das Resultat allgemeiner, da man sich dank dem folgenden Lemma nicht mehr auf torsionsfreie Gruppen zu beschränken braucht.

LEMMA 3.2.1. *Jede endliche Gruppe ist eine orientierbare PD-Gruppe der Dimension* 0 *über* $\mathbf{Q}$.

Beweis. Lemma 3.2.1 ist im wesentlichen die Aussage des Maschke'schen Satzes. Sei G eine endliche Gruppe und sei A ein $\mathbf{Q}G$-Modul. $i: A^G \to A_G$ sei die durch die Identität von A induzierte Abbildung. Dann ist der Homomorphismus

$$j: A_G \to A^G, \; j(a + AI_G) = \frac{1}{|G|}\left(\sum_{g \in G} g\right) a, \quad a \in A,$$

zu i invers.

Da sich die Sätze von Kapitel 2 ausnahmslos auf PD-Gruppen über $\mathbf{Q}$ übertragen lassen, folgt daraus:

SATZ 3.2.2. *Jede polyzyklische Gruppe G ist eine PD-Gruppe der Dimension hG über* $\mathbf{Q}$.

Es sei N eine *frei-abelsche* Gruppe mit den freien Erzeugenden $x_1, \ldots, x_n$, und sei $E = E_{\mathbf{Z}N}[x_1, \ldots, x_n]$ die äussere Algebra über $\mathbf{Z}N$. Diese hat die Form einer exakten Sequenz

$$0 \to X_n \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} X_1 \xrightarrow{d} X_0 \to \mathbf{Z} \to 0,$$

wobei die $\mathbf{X}_p$ freie N-Moduln auf den Erzeugenden $x_{k_1} \wedge x_{k_2} \cdots \wedge x_{k_p}$, mit $1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_p \leqslant n$, sind. Für das Differential d vergleiche man MacLane [8, VI.6, p. 189]. Ist A ein trivialer N-Modul, dann ist $A \otimes_N d = 0$, also folgt $H_n(N, \mathbf{Z}) = H_n(\mathbf{Z} \otimes_N E) \cong \mathbf{Z}$, d.h. N ist eine orientierbare PD-Gruppe.

Nun sei zusätzlich N Normalteiler in einer Gruppe G. Dann ist die Operation von G für jeden G-Modul A bis auf ein Vorzeichen mit dem Isomorphismus $H_n(N, A) \cong A^N$ verträglich (Lemma 2.3). Wir wollen dieses Vorzeichen gruppentheoretisch deuten. Zu einem festen Element $g \in G$ betrachten wir die Abbildung $\varphi_g : E \to E$, auf den Elementen $x(x_{k_1} \wedge \cdots \wedge x_{k_p}) \in \mathbf{X}_p$, $x \in N$, gegeben durch

$$\varphi_g^p(x(x_{k_1} \wedge \cdots \wedge x_{k_p})) = \sum_{[v]} x^g \frac{\partial(x_{k_1}^g, \ldots, x_{k_p}^g)}{\partial(x_{v_1}, \ldots, x_{v_p})} (x_{v_1} \wedge \cdots \wedge x_{v_p}).$$

Dabei ist $x^g = g^{-1}xg$, die Funktionaldeterminante besteht aus partiellen Ableitungen im Sinne der Fox-Derivationen, und summiert wird über alle Kombinationen $[v] = [v_1, v_2, \ldots, v_p]$ mit $1 \leqslant v_1 < v_2 < \cdots < v_p \leqslant n$. Eine kleine Rechnung zeigt, dass φ_g mit dem Differential d kommutiert. Ferner ist $\mathbf{X}_0 \cong \mathbf{Z}N$, und die Abbilduug φ_g^0 fällt mit dem Automorphismus $f : \mathbf{Z}N \to \mathbf{Z}N$, $f(x) = x^g$, $x \in N$, zusammen.

Uns interessiert hauptsächlich die Dimension n. Es ist $\mathbf{X}_n \cong \mathbf{Z}N$, und nach Definition gilt für $x \in N$

$$\varphi_g^n(x) = x^g \frac{\partial(x_1^g, x_2^g, \ldots, x_n^g)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Für jeden G-Modul A kann die Operation von g auf $H_*(N, A) = H_*(A \otimes_N E)$ beschrieben werden durch $(a \otimes e) \circ g = ag \otimes \varphi_g(e)$, $a \in A$, $e \in E$. In der Dimension n ist $H_n(N, A) \cong A^N$, und wir haben $a \circ g = (a \otimes 1) \circ g = ag \otimes \varphi_g^n(1) = ag\varphi_g^n(1) = \varepsilon(\varphi_g^n(1)) \cdot ag$. Dabei ist $\varepsilon : \mathbf{Z}N \to \mathbf{Z}$ die Augmentationsabbildung.

Der durch Konjugation mit g in N induzierte Automorphismus wird in der Basis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch eine unimodulare Matrix α_{ik}, $\det(\alpha_{ik}) = \pm 1$, beschrieben: $x_k^g = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_{ik}}$. Mit den Rechenregeln für Fox-Derivationen findet man:

$$\varepsilon(\varphi_g^n(1)) = \varepsilon\left(\det\left(\frac{\partial x_k^g}{\partial x_i}\right)\right) = \det(\alpha_{ik}) = \pm 1.$$

Damit haben wir bewiesen, dass *die Operation von g mit dem Isomorphismus* $H_n(N, A) \cong A^N$ *bis auf das Vorzeichen* $\det(\alpha_{ik})$ *verträglich ist.*

Nun betrachten wir eine etwas allgemeinere Situation. Sei N ein *endlich erzeugter, abelscher Normalteiler* in der Gruppe G, und sei tN die Torsionsuntergruppe von N. Zu jedem Element $g \in G$ definieren wir ein Vorzeichen bezüglich N:

DEFINITION. Zu jedem Element $g \in G$ sei $\mathrm{sign}_N(g)$ die Determinante der durch Konjugation mit g in N/tN induzierten Abbildung. Ist $N/tN = 1$, dann sei $\mathrm{sign}_N(g) = +1$ für alle $g \in G$.

LEMMA 3.2.3. *Sei N ein endlich erzeugter, abelscher Normalteiler vom Rang n in der Gruppe G, und sei A ein $\mathbf{Q}G$-Modul. Dann ist N eine orientierbare PD-Gruppe der Dimension n über $\mathbf{Q}$, und jedes Element $g \in G$ operiert auf $H_n(N, A) \cong A^N$ wie $a \circ g = \mathrm{sign}_N(g) ag$, $a \in A^N$.*

Beweis. Nach Lemma 2.3 und 3.2.1 ist $H_n(N, A) \cong H_n(N/tN, H_0(tN, A)) \cong H_n(N/tN, A^{tN})$. Diese Isomorphismen respektieren die G-Struktur. Für den freiabelschen Normalteiler $N/tN \lhd G/tN$ ist aber die Behauptung schon bewiesen.

Es sei nun G eine polyzyklische Gruppe, und sei $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_r = 1$ eine invariante Reihe von G (d.h. alle G_k sind Normalteiler von G) mit abelschen Faktoren. Wir versehen jedes Element $g \in G$ mit einem Vorzeichen

DEFINITION.

$$\mathrm{sign}(g) = \prod_{k=1}^{r} \mathrm{sign}_{G_{k-1} \backslash G_k}(gG_k).$$

ferner sagen wir, g sei positiv, wenn $\mathrm{sign}(g) = +1$, negativ, wenn $\mathrm{sign}(g) = -1$ ist. Aus unserem nächsten Satz folgt unmittelbar, dass diese Definition von der speziellen Wahl der invarianten Reihe unabhängig ist.

SATZ 3.2.4. *Eine polyzyklische Gruppe G ist (als PD-Gruppe über $\mathbf{Q}$) dann und nur dann orientierbar, wenn alle Elemente $g \in G$ positiv sind. Ist G nichtorientierbar, dann bilden alle positiven Elemente von G die eindeutig bestimmte orientierbare Untergruppe vom Index 2.*

Beweis. Sei $hG = n$, $h(G_{k-1}/G_k) = h_k$. Wir zeigen mit vollständiger Induktion nach der Länge r der invarianten Reihe

$$H_n(G, H_{h_1}(G/G_1, \mathbf{Q}) \otimes \cdots \otimes H_{h_r}(G_{r-1}, \mathbf{Q})) \cong \mathbf{Q}.$$

Aus dieser Formel folgt dann unmittelbar die Behauptung. Ist $r = 1$, dann ist G abelsch und die Formel richtig. Für $r \geqslant 2$ ist

$$\begin{aligned} &H_n(G, H_{h_1}(G/G_1, \mathbf{Q}) \otimes \cdots \otimes H_{h_r}(G_{r-1}, \mathbf{Q})) \cong \\ &\qquad \cong H_{n-h_r}(G/G_{r-1}, H_{h_r}(G_{r-1}, H_{h_1}(G/G_1, \mathbf{Q}) \otimes \cdots \otimes H_{h_r}(G_{r-1}, \mathbf{Q}))), \\ &\qquad \cong H_{n-h_r}(G/G_{r-1}, H_{h_1}(G/G_1, \mathbf{Q}) \otimes \cdots \otimes H_{h_r}(G_{r-1}, \mathbf{Q}) \otimes H_{h_r}(G_{r-1}, \mathbf{Q})), \\ &\qquad \cong H_{n-h_r}(G/G_{r-1}, H_{h_1}(G/G_1, \mathbf{Q}) \otimes \cdots \otimes H_{h_{r-1}}(G_{r-2}/G_{r-1}, \mathbf{Q}\ ), \\ &\qquad \cong \mathbf{Q}, \text{ nach Induktionsvoraussetzung}. \end{aligned}$$

KOROLLAR 3.2.5. *Jede endlich erzeugte, nilpotente Gruppe ist eine orientierbare PD-Gruppe über* **Q**.

Beweis. Jede endlich erzeugte, nilpotente Gruppe G ist polyzyklisch. Sei $g \in G$. Man berechnet sign(g) mit Hilfe einer beliebigen Zentralreihe von G. Da G auf jedem zentralen Faktor trivial operiert, folgt sign$(g) = +1$.

3.3 *Die auflösbaren PD-Gruppen*

Im vorliegenden Abschnitt werden wir die Umkehrung von Satz 3.1.2 beweisen:

SATZ 3.3.1. *Jede auflösbare PD-Gruppe ist polyzyklisch.*

Dazu brauchen wir zwei Hilfsresultate.

LEMMA 3.3.2. *Sei G eine torsionsfreie, nilpotente Gruppe. Dann ist die homologische Dimension hdG gleich der Hirschzahl hG. Ist $hG = n < \infty$, dann gilt überdies: $H_n(G, \mathbf{Z})$ ist torsionsfrei vom Rang* 1 *und genau dann zyklisch, wenn G endlich erzeugbar ist.*

Beweis. G ist der direkte Limes der endlich erzeugten Untergruppen. Der direkte Limes vertauscht mit dem Homologiefunktor, also folgt aus Satz 3.1.2 $hdG = hG$. Es sei nun $hG = n < \infty$. Den Rest der Behauptung beweisen wir mit vollständiger Induktion nach n. Ist $n = 1$, dann ist G eine torsionsfreie, abelsche Gruppe vom Rang 1, und die Behauptung ist wegen $H_1(G, \mathbf{Z}) \cong G$ trivial. Es sei also $n \geqslant 2$. Dann enthält G eine zentrale Untergruppe S vom Rang 1 mit torsionsfreier Faktorgruppe G/S. Weil S zentral ist, folgt

$$\begin{aligned} H_n(G, \mathbf{Z}) &\cong H_{n-1}(G/S, H_1(S, \mathbf{Z})) \\ &\cong H_{n-1}(G/S, \mathbf{Z}) \otimes S. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung schliessen wir daraus: $H_n(G, \mathbf{Z})$ ist torsionsfrei vom Rang 1 und genau dann zyklisch, wenn G/S und S endlich erzeugbar sind, d.h. wenn G endlich erzeugbar ist.

Bemerkung. Man vergleiche Lemma 3.3.2 mit dem Resultat von Gruenberg [5, chapter 8.8, Theorem 5]: Sei G eine torsionsfreie, nilpotente Gruppe mit endlicher Hirschzahl hG. Dann gilt für die cohomologische Dimension von G $cdG = hG$, wenn G endlich erzeugbar ist, und $cdG = hG + 1$, wenn G nicht endlich erzeugbar ist.

LEMMA 3.3.3. *Die homologische Dimension hdG einer torsionsfreien, auflösbaren Gruppe G ist gleich der Hirschzahl hG.*

Bemerkung. Man vergleiche dazu das Resultat von Stammbach [9], wonach die homologische Dimension $hd_{\mathbf{Q}}G$ einer auflösbaren Gruppe G über dem Körper $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen gleich der Hirschzahl hG ist. Man könnte dieses Resultat zum Beweis der Ungleichung $hdG \geqslant hG$ heranziehen.

Beweis. Wenn G abelsche Untergruppen vom Rang ∞ enthält, dann ist trivialerweise $hG = hdG = \infty$. Haben alle abelschen Untergruppen endlichen Rang, dann enthält G nach Baer-Heineken [1, Prop. 5.5] einen nilpotenten Normalteiler N (das Hirsch-Plotkin-Radikal) mit endlich erzeugter, fast abelscher Faktorgruppe G/N. Sei $\bar{G}/N$ eine frei-abelsche Untergruppe von endlichem Index in G/N, und sei $h(\bar{G}/N) = h(G/N) = m$. Ist $hG = \infty$, dann muss $hN = hdN = \infty$ sein, also auch $hdG = \infty$.

Es sei nun $hG < \infty$, und sei $hN = n$. Dann ist $hdG = hd\bar{G} \leqslant hdN + hd(\bar{G}/N) = hN + h(\bar{G}/N) = h(\bar{G}) = h(G) = m + n$. Es bleibt zu zeigen, dass für einen gewissen $\bar{G}$-Modul A $H_{m+n}(\bar{G}, A) \neq 0$ ist. Dazu betrachten wir die additive Gruppe der rationalen Zahlen $\hat{\mathbf{Q}}$, mit einer noch näher zu beschreibenden $\bar{G}/N$-Struktur. Auf alle Fälle ist $H_{m+n}(\bar{G}, \hat{\mathbf{Q}}) \cong H_m(\bar{G}/N, H_n(N, \hat{\mathbf{Q}})) \cong H_m(\bar{G}/N, H_n(N, \mathbf{Z}) \otimes \hat{\mathbf{Q}})$. Nach Lemma 3.3.2 ist dabei $H_n(N, \mathbf{Z})$ eine Untergruppe von $\mathbf{Q}$, und die freien Erzeugenden x_i von $\bar{G}/N$ operieren darauf durch Multiplikation mit gewissen rationalen Zahlen q_i. Wir definieren nun die Operation von x_i auf $\hat{\mathbf{Q}}$ als Multiplikation mit q_i^{-1}. Dadurch wird $H_n(N, \mathbf{Z}) \otimes \hat{\mathbf{Q}}$ zum trivialen $\bar{G}/N$-Modul $\mathbf{Q}$, und wir erhalten $H_{m+n}(\bar{G}, \hat{\mathbf{Q}}) \cong \mathbf{Q}$. Daher ist $hd\bar{G} = m + n$, also auch $hdG = m + n$, womit Lemma 3.3.3 bewiesen ist.

Beweis von Satz 3.3.1. Sei G eine auflösbare PD-Gruppe der Dimension n. G enthält eine orientierbare PD-Gruppe $\bar{G}$ vom Index $|G:\bar{G}| \leqslant 2$. Die abelschen Untergruppen von $\bar{G}$ haben endlichen Rang, also gibt es nach Baer-Heineken [1, Prop. 5.5] einen nilpotenten Normalteiler $N \lhd \bar{G}$ (das Hirsch-Plotkin-Radikal) mit endlich erzeugter, fast abelscher Faktorgruppe $\bar{G}/N$. Sei $\bar{\bar{G}}/N$ eine frei-abelsche Untergruppe von endlichem Index in $\bar{G}/N$. $\bar{\bar{G}}$ ist von endlichem Index in $\bar{G}$, also nach Satz 2.1.1 selber eine orientierbare PD-Gruppe der Dimension n. Sei $hN = hdN = k$ und $h(\bar{\bar{G}}/N) = hd(\bar{\bar{G}}/N) = m$. Dann ist nach Lemma 3.3.3 $n = hd\bar{\bar{G}} = h\bar{\bar{G}} = m + k$. Es folgt

$$\mathbf{Z} \cong H_n(\bar{\bar{G}}, \mathbf{Z}) \cong H_m(\bar{\bar{G}}/N, H_k(N, \mathbf{Z})) \cong H_k(N, \mathbf{Z})^{\bar{\bar{G}}/N},$$

denn $\bar{\bar{G}}/N$ ist eine orientierbare PD-Gruppe. $H_k(N, \mathbf{Z})$ ist nach Lemma 3.3.2 isomorph zu einer Untergruppe der additiven Gruppe der rationalen Zahlen, versehen mit einer gewissen $\bar{\bar{G}}/N$-Struktur. Als Fixpunkte kommen jedenfalls nur 0 oder ganz $H_k(N, \mathbf{Z})$ in Frage; daher ist $H_k(N, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$. Dann ist aber N nach Lemma 3.3.2 endlich erzeugbar, also polyzyklisch. Somit ist auch G polyzyklisch, womit Satz 3.3.1 bewiesen ist.

LITERATUR

[1] R. Baer und H. Heineken, *Radical Groups of Finite Abelian Subgroup Rank*, Illinois J. of Math., erscheint demnächst.

[2] R. BIERI, *Groupes à dualité de Poincaré*, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, *273* (5 juillet 1971), p. 6–8.
[3] H. CARTAN and S. EILENBERG, *Homological Algebra*, (Princeton University Press, 1957).
[4] A. DOLD, *Universelle Koeffizienten*, Math. Z. *80* (1962), 63–88.
[5] K. W. GRUENBERG, *Cohomological Topics in Group Theory*, Lecture Notes in Math., (Springer-Verlag Berlin-Heidelberg, 1970).
[6] G. HOCHSCHILD and J. P. SERRE, *Cohomology of Group Extensions*, Trans. Amer. Math. Soc. *74* (1953), 110–134.
[7] F. ISCHEBECK, *Eine Dualität zwischen den Funktoren Ext und Tor*, J. of Algebra *11* (1969) 510–531.
[8] S. MACLANE, *Homology*, (Springer-Verlag, Berlin, 1963).
[9] U. STAMMBACH, *On the Weak Homological Dimension of the Group Algebra of Solvable Groups*, J. London Math. Soc. (2) *2* (1970), 567–570.
[10] R. G. SWAN, *Groups of Cohomological Dimension One*, J. of Algebra *12* (1969), 585–610.
[11] J. A. WOLF, *Spaces of Constant Curvature*, (McGraw-Hill, 1967).

Eingegangen den 20. Juni 1972.

Anmerkung bei der Korrektur. In einer Arbeit von F. E. A. Johnson und C. T. C. Wall, von welcher ich nachträglich Kenntnis erhielt und die in Ann. of Math. erscheinen soll, werden unsere Sätze 2.1.1, 2.4.1, 2.5 und 3.1.2 mit teilweise anderen Methoden bewiesen. Wir möchten hervorheben, dass der Begriff „Poincaré duality group" bei Johnson-Wall sich auf endlich präsentierte Gruppen mit endlicher projektiver Auflösung bezieht, während bei uns keinerlei Endlichkeitsannahmen gemacht werden. Aus unseren Erweiterungssätzen (2.1.1, 2.4.1 und 2.5) können diejenigen von Johnson-Wall leicht abgeleitet werden.