Über ein Problem von Reiter und ein Problem von Derighetti zur Eigenschaft P... lokalkompakter Gruppen

Über ein Problem von Reiter und ein Problem von Derighetti zur Eigenschaft P_1 lokalkompakter Gruppen[1])

Von Harald Rindler

Sei G eine lokalkompakte Gruppe mit linkem Haarmaß dx. Wir setzen für $f \in L^1(G)$, $x, y \in G$ $L_y f(x) = f(y^{-1}x)$ $R_y f(x) = f(xy^{-1})$ $\Delta_G(y^{-1})$ (Δ_G = linker Haarmodul von G). Sei H eine abgeschlossene normale Untergruppe von G. Wir setzen $T_H f(\dot{x}) = \int_H f(xy)\, dy_3$ $f \in L^1(G)$, $\dot{x} = \pi_H(x) \in G/_H$ (dy = linkes Haarmaß von H). T_H ist eine lineare Abbildung von $L^1(G)$ *auf* $L^1(G/_H)$, $\|T_H\| \leqslant 1$ (siehe [3] Ch. 3, §4.4). Den Kern der Abbildung bezeichnen wir wie üblich mit $J^1(G, H)$. Ein Teilraum $E \subseteq L^1(G)$ heißt H-rechtsinvariant, wenn mit $f \in E$ und $y \in H$ auch $R_y f \in E$ gilt.

1. Reiter hat in [3], Ch. 8, §4.6 gezeigt, daß, falls H die Eigenschaft P_1 hat, das Bild jedes abgeschlossenen H-rechtsinvarianten Teilraumes unter der Abbildung T_H ein abgeschlossener Teilraum von $L^1(G/_H)$ ist. (Es wurde dort ein allgemeineres Resultat für nicht notwendig normale Untergruppen bewiesen.) Ist $G/_H$ endlich, dann ist $L^1(G/_H)$ endlichdimensional und daher jeder Teilraum abgeschlossen. Ist die Quotientengruppe $G/_H$ unendlich können wir auch die Unkehrung des obigen Resultates zeigen. Für Spezialfälle hat dies bereits B. Johnson gezeigt [1]; wir können seine Methode verallgemeinern.

Ich möchte H. Reiter, der einen ersten Entwurf dieser Arbeit kritisch gelesen hat, für wertvolle Anregungen herzlich danken.

THEOREM 1. *Sei G eine lokalkompakte Gruppe, H eine abgeschlossene normale Untergruppe, $G/_H$ unendlich, dann hat H die Eigenschaft P_1 genau dann wenn das Bild jedes abgeschlossenen H-rechtsinvarianten Teilraumes von $L_1(G)$ ein abgeschlossener Teilraum von $L^1(G/_H)$ ist.*

Zum Beweis genügt es folgendes zu zeigen: Hat H die Eigenschaft P_1 nicht, dann gibt es einen abgeschlossenen H-rechtsinvarianten Teilraum E, sodaß $T_H E$ nicht abgeschlossen ist. Wir benötigen zunächst folgendes

LEMMA 1. *Sei H eine abgeschlossene Untergruppe, die die Eigenschaft P_1 nicht hat, dann gibt es Elemente $y_1, y_2, \dots y_N \in H$, sodaß für alle $f \in L^1(G)$ mit $\int f = 1$* für *$h_i = L_{y_i} f - f$ eine nur von f abhängige Konstante $C_f > 0$ existiert mit:* $\max_i \|Rh_i -$

---

1) Darüber trug der Autor bei einem mathematischen Kongreß über das Thema „Analyse Harmonique et Représentations Unitaires" in Les Plans sur Bex – Schweiz am 26.3.1973 vor.

$-h_i\|_1 \geqslant C_f$ *für alle* $R \in \mathscr{R}_H^0$

$$(\mathscr{R}_H^0 = \{R : R = \sum_n c_n R_{y'_n}, c_n \in \mathbf{C}, \sum c_n = 0, y'_n \in H\}).$$

Wir führen den Beweis indirekt. (Die Beweismethode ist im wesentlichen dieselbe wie in [2], Lemma.)

Angenommen für jede endliche Menge $\{y_1, y_2, \dots y_N\} \subseteq H$ gibt es zu beliebigen $\varepsilon > 0$ einen Operator $R \in \mathscr{R}_H^0$ mit

$$\|Rh_i - h_i\|_1 < \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \quad h_i = L_{y_i} f - f \tag{1}$$

Es gilt: $R(L_{y_i} x - f) - (L_{y_i} f - f) = Ly_i\, Rf - Rf - (L_{y_i} f - f) = L_{y_i}(Rf - f) - (Rf - f)$, da R und L_{y_i} vertauschen.

Setzt man $s = |Rf - f| / \|Rf - f\|_1$, und beachtet man, daß $\|Rf - f\|_1 \geqslant |\int (Rf - f)| =$ $= ,\int (\Sigma_n c_n - 1) \cdot f| = |\int f| = 1$ gilt erhält man wegen (1)

$$s \geqslant 0, \quad \int s = 1, \quad \|L_{y_i} s - s\|_1 = \frac{1}{\|Rf - f\|_1} \|L_{y_i} |Rf - f| - |Rf - f|\|_1$$
$$\leqslant \|L_{y_i}(Rf - f) - (Rf - f)\|_1 < \varepsilon \quad (1 \leqslant i \leqslant N) \tag{2}$$

(2) besagt nun, daß (G, H) die Eigenschaft $P_*(G, H)$ hat; daher hat H die Eigenschaft P_1 im Widerspruch zur Voraussetzung. (siehe [4] §3, Definition und Proposition 1).

LEMMA 2. *Die normale Untergruppe H besitze die Eigenschaft P_1 nicht und GH sei unendlich. Seien $h_1, h_2, \dots h_N$ wie in Lemma* 1. *Dann gibt es zu jeder offene H-invarianten Menge $X \subseteq G$, die (mindestens) N verschiedenen Restklassen* (mod H) *enthält, ein $\psi \in J^1(G, H)$ mit* $\mathrm{Tr}\,\psi \subseteq X$ *und* $\inf_{R \in \mathscr{R}^0_H} \|R\psi - \psi\|_1 \geqslant 1$. ($\mathrm{Tr}\,\psi =$ *Träger von* ψ).

Beweis. Wir können eine offene Umgebung U von $\{e\}$ mit $UH = U$ und Elemente $a_1, a_2, \dots a_N \in G$ (N wie in Lemma 1) so wählen, daß gilt:

$$a_i \cdot U \subseteq X \quad 1 \leqslant i \leqslant N \quad a_i U \cap a_j U = \emptyset \quad i \neq j$$

(Die Existenz von U und $\{a_1, \dots a_N\}$ erkennt man unmittelbar, wenn man von der offenen Menge $\pi_H(X)$ in der Quotientengruppe ausgeht.)

Sei $f \in L^1(G)$ mit $\mathrm{Tr} f \subseteq U$ und $\int f = 1$ (dies ist möglich, da U positives Maß hat). Es gilt $\mathrm{Tr}\, h_i = \mathrm{Tr}(L_{y_i} f - f) \subseteq y_i\, \mathrm{Tr} f \cup \mathrm{Tr} f \subseteq HU \cup U = U$ (man beachte, daß $y_i \in H$ und $HU = UH$ gilt, hier geht die Normalität von H wesentlich ein.) Sei $\varphi_i = L_{a_i} h_i$ und $\psi = \Sigma_i\, \varphi_i$. Es gilt dann natürlich $\psi \in J^1(G, H)$, weil das für h_i und daher auch für φ_i gilt. ([3], Ch.3, §6.4, §5.3; man beachte, daß man auch hier auf die Normalität von H nicht verzichten kann.) Es gilt $\operatorname{Tr}\varphi_i = \operatorname{Tr} L_{a_i} h_i = a_i \cdot \operatorname{Tr} h_i \subseteq a_i U$ und daher $\operatorname{Tr}\psi \subseteq \bigcup_i a_i U \subseteq X$, außerdem gilt für $i \neq j$ $\operatorname{Tr}\varphi_i \cap \operatorname{Tr}\varphi_j = \emptyset$.

Sei $R \in \mathscr{R}_H^0$, dann gilt $\operatorname{Tr} R\varphi_i \subseteq a_i U$, da $UH = U$ und $Tr R\varphi_i \cap Tr R\varphi_j = \emptyset$ $i \neq j$. Daraus folgt für $R \in \mathscr{R}_H^0$

$$\|R\psi - \psi\|_1 = \|\sum_i (R\varphi_i - \varphi_i)\|_1 = \sum_i \|R\varphi_i - \varphi_i\|_1 \geqslant \max_i \|R\varphi_i - \varphi_i\|_1 \geqslant C_f > 0 .$$

(Beachte: $\|R\varphi_i - \varphi_i\|_1 = \|RL_{a_i}h_i - L_{a_i}h_i\|_1 = \|L_{a_i}(Rh_i - h_i)\|_1 = \|Rh_i - h_i\|_1$!)

Schließlich kann man o.B.d.A. voraussetzen, daß $C_f = 1$ ist (andernfalls ersetze man ψ durch $1/C_f \cdot \psi$).

Wir können nun Theorem 1 beweisen.

Da $G/_H$ unendlich ist gibt es offene paarweise disjunkte Mengen $Y_n \subseteq G/_H$, $n \in \mathbf{Z}$, die jeweils mindestens N Elemente enthalten. Sei $X_n = \pi_H^{-1}(Y_n)$, es gilt dann $X_n H = = HX_n = X_n$. Auf Grund von Lemma 2 gibt es $\psi_n (n \geqslant 1)$, mit

$$\psi_n \in J^1(G, H), \quad \operatorname{Tr}\psi_n \subseteq X_n \quad \text{und} \quad \inf_{R \in \mathscr{R}^0{}_H} \|R\psi_n - \psi_n\|_1 \geqslant 1$$

Für $n \geqslant 1$ sei ψ_{-n} gewählt mit:

$$\operatorname{Tr}\psi_{-n} \subseteq X_{-n} \quad \text{und} \quad \|T_H \psi_{-n}\|_1 = \frac{1}{n} \tag{4}$$

Sei $f_n = \psi_n + \psi_{-n}$ und E_n der von den f_n aufgespannte abgeschlossene H-rechtsinvariante Teilraum von $L^1(G)$. Die Banachsche direkte Summe der Teilräume E_n stimmt mit dem von allen f_n aufgespannten abgeschlossenen H-rechtsinvarianten Teilraum E überein.

$$g \in E \quad g = \sum_n g_n, \quad g_n \in E_n \quad \text{und} \quad \|g\|_1 = \sum_n \|g_n\|_1 \tag{5}$$

Sei nämlich R_1, $R_2 \in \mathscr{R}_H^0$ beliebig, $n \neq m$, n, $m \in \mathbf{N}$, dann gilt:

$$\operatorname{Tr} R_1 f_n \subseteq (\operatorname{Tr} f_n) \cdot H \subseteq X_n H = X_n$$

und daher

$$\operatorname{Tr} R_1 f_n \cap \operatorname{Tr} R_2 f_m \subseteq X_n \cap X_m = \emptyset;$$

daraus folgt (5) unmittelbar.

Wir behaupten nun

$$J^1(G, H) \cap E_n = \{Rf_n, R \in \mathscr{R}_H^0\}^-$$

(Abschluß in der Normtopologie) (6)

Beweis[2]). Die Relation „$\supseteq$" ist unmittelbar klar. ($T_H Rf = \Sigma\, c_k T_H f$). Sei umgekehrt $g \in J^1(G, H) \cap E_n$.

Da $g \in E_n$, gibt es einen Operator $R_1 = \Sigma\, c_k R_{y_k}$, $c_k \in \mathbf{C}$, mit

$$\|R_1 f_n - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2n\,\|f_n\|_1} \leqslant \varepsilon/2$$

weiters gilt:

$$\frac{\varepsilon}{2n\,\|f_n\|_1} > \|R_1 f_n - g\|_1 \geqslant \|T_H(R_1 f_n - g)\|_1 = \|T_H(R_1 f_n - g)\|_1$$
$$+ \|T_H g\|_1 \geqslant \|T_H R_1 f_n\|_1 = |\textstyle\sum c_k|\,\|T_H f_n\|_1 = |\textstyle\sum c_k| \cdot \frac{1}{n}$$

also ist

$$|\textstyle\sum c_k| < \frac{\varepsilon}{2\,\|f_n\|_1}.$$

Sei $R = R_1 - \Sigma_k\, c_k \cdot R_e$, dann ist $R \in \mathscr{R}_H^0$ und $\|Rf_n - R_1 f_n\|_1 \leqslant |\,\Sigma\, c_k|\,\|f_n\|_1 < \varepsilon/2$ und man erhält $\|Rf_n - g\|_1 < \varepsilon$, $R \in \mathscr{R}_H^0$ und (6) ist gezeigt.

$T_H E \simeq E/[E \cap J^1(G, H)]$ ist ein Banachraum bezüglich der Quotientennorm, die wir mit $\|\ \|'$ bezeichnen.

Es gilt natürlich $\|f'\|' \geqslant \|f'\|_{1,G/H}$ für alle $f' \in T_H E$. Ist $T_H E$ abgeschlossen in $L^1(G/_H)$, dann ist $T_H E$ auch bezüglich der Norm $\|\ \|_{1,G/H}$ ein Banachraum. Bekanntlich gilt dann

$$\|f'\|_{1,G/H} \geqslant C\,\|f'\|' \quad (C > 0).$$

Wir zeigen aber

$$d(f_n, E \cap J^1(G, H)) \geqslant 1 \quad \text{und} \quad \|T_H f_n\|_1 \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{7}$$

($d(f_n, E \cap J^1(G,H))$ sei der Abstand von f von $E \cap J^1(G, H)$).
Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} &d(f_n, E \cap J^1(G, H)) \\ &\quad = d(f_n, E_n \cap J^1(G, H)) \quad \text{(dies folgt aus (5))} \\ &\quad \geqslant d(\psi_n, E_n \cap J^1(G, H)) \quad (\operatorname{Tr} R\psi_n \cap \operatorname{Tr} R\psi_{-n} \subseteq X_n \cap X_{-n} = \emptyset) \\ &\quad = \inf\{\|R\psi_n - \psi_n\|_1, R \in \mathscr{R}_H^0\} \geqslant 1 \quad ((3) + (6)) \end{aligned}$$

---

[2]) Aus der Relation $E_n = \{\lambda f_n + Rf_n,\ R \in \mathscr{R}^0{}_H,\ \lambda \text{ komplex}\}^-$ folgt Relation (6) nicht unmittelbar.

Damit ist die erste Relation in (7) gezeigt;

$$\|T_H f_n\|_1 = \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

wie bereits früher gezeigt wurde.

Es gilt daher $\|T_H f_n\|' \geqslant 1$ und $\|T_H f_n\|_{1,G/H} \to 0$, die Normen $\|\ \|'$ und $\|\ \|_{1,G/H}$ sind daher nicht vergleichbar und $T_H E$ ist nicht abgeschlossen, womit Theorem 1 vollständig bewiesen ist.

2. Sei H eine abgeschlossene Untergruppe von G; $\mathscr{L}_H$, $\mathscr{R}_H$ die konvexe Hülle der Operatoren L_y, $R_y (y \in H)$ resp.

Ist H eine normale P_1-Untergruppe dann gilt

$$\inf_{L \in \mathscr{L}_H} \|Lf\|_1 = \|T_H f\| = \inf_{R \in \mathscr{R}_H} \|Rf\|_1$$

(siehe [4], §2, (*) (7), (8)), insbesondere sind beide Infima gleich.

Derighetti stellte in einem Brief an Reiter die Frage nach der Umkehrung. Ist H nicht normal dann gilt noch

$$\inf_{L \in \mathscr{L}_H} \|Lf\|_1 = \|T_{H,q} f^*\| \quad \text{und} \quad \inf_{R \in \mathscr{R}_H} \|Rf\|_1 = \|T_{H,q} f\| \ (f^*(x) = f(x^{-1})\, \Delta_G(x^{-1}))$$

(siehe [4], §2, (4) und (6)). Weiters gilt $D_H{}' L^1(G) \neq D_H L^1(G)$ ([4], §2, Proposition 1). Daher ist $J^1(G, H) = D_H{}' L^1(G) \neq D_H L^1(G) = J^1(G, H)^*$ ([4], §1, (33), (34)) und es gibt ein $f \in L^1(G)$ mit $0 = T_{H,q} f \neq T_{H,q} f^*$; für dieses f stimmen die beiden Infima daher nicht überein.

Wir können jedoch folgendes zeigen:

THEOREM 2. *Eine abgeschlossene normale Untergruppe H hat die Eigenschaft P_1 genau dann wenn für alle $f \in L^1(G)$, $\inf_{L \in \mathscr{L}_H} \|Lf\|_1 = \inf_{R \in \mathscr{R}_H} \|Rf\|_1$ gilt.*

Beweis. Wir brauchen nur mehr eine Richtung zu zeigen und benötigen zunächst folgendes

LEMMA 3. *Sei H eine abgeschlossene Untergruppe von G, H habe nicht die Eigenschaft P_1, dann gibt es ein $f \in L^1(G)$, $f = L_y g - g$, $g \in L^1(G)$, $y \in H$, sodaß. $\inf_{R \in \mathscr{R}_H} \|Rf\|_1 > 0$ gilt.* (Das Resultat ist eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses in [3], Ch. 8, §4.5.)

Wir führen den Beweis indirekt: Angenommen es gelte:

$$\inf_{R \in \mathscr{R}_H} \|R(L_y g - g)\|_1 = 0 \quad \text{für alle} \quad g \in L^1(G), \quad y \in H. \tag{8}$$

Aus (8) folgt

Sei $f_i = L_{y_i} g_i - g_i$, $1 \leqslant i \leqslant N$, N eine beliebige natürliche Zahl, $\varepsilon > 0$ beliebig, dann gibt es $R \in \mathscr{R}_H$ mit $\|Rf_i\|_1 < \varepsilon$, $1 \leqslant i \leqslant N$ (9)

Beweis durch Induktion. Für $N = 1$ ist (9) gleichbedeutend mit (8). Schluß von $N-1$ auf N: Laut Induktionsvoraussetzung gibt es $R_1 \in \mathscr{R}_H$ mit $\|R_1 f_i\|_1 < \varepsilon$ $1 \leqslant i \leqslant N-1$; $R_1 f_N = R_1 (L_{y_N} g_N - g_N) = L_{y_N}(R_1 g_N) - R_1 g_N (RL_y = L_y R)$. Wegen (8) gibt es daher ein R_2 mit $\|R_2(R_1 f_N)\|_1 < \varepsilon$.

Sei $R = R_2 R_1$ dann ist $R \in \mathscr{R}_H$ und $\|Rf_i\|_1 = \|R_2(R_1 f_i)\|_1 \leqslant \|R_1 f_i\|_1 < \varepsilon$ $1 \leqslant i \leqslant$ $\leqslant N-1$, R erfüllt daher die Bedingungen in (9).

Behauptung. $(9) \Rightarrow P_1(H)$.

Sei $g \geqslant 0$ $\int g = 1$, $y_1, y_2, \dots y_N \in H$, $N \in \mathbf{N}$, $\varepsilon > 0$ beliebig, wegen (9) gibt es $R \in \mathscr{R}_H$ mit $\|R(L_{y_i} g - g)\|_1 < \varepsilon$ $1 \leqslant i \leqslant N$.

Sei $s = Rg$, dann gilt $s \geqslant 0$, $\int s = 1$ und $\|L_{y_i} s - s\|_1 < \varepsilon$, $1 \leqslant i \leqslant N$, denn $\|L_{y_i} s - s\|_1$ $= \|L_{y_i} Rg - Rg\|_1 = R(L_{y_i} g - g)\|_1 < \varepsilon$

Wir erhalten daher $(8) \Rightarrow (9) \Rightarrow P_*(G, H) \Rightarrow P_1(H)$ ([4], §3 Proposition 1) im Widerspruch zur Voraussetzung und Lemma 3 ist bewiesen. Damit können wir nun Theorem 2 leicht beweisen.

Hat H nicht die Eigenschaft P_1, dann gibt es ein $g \in L^1(G)$, $y \in H$, sodaß für $f = L_y g - g$, $\inf_{R \in \mathscr{R}_H} \|Rf\|_1 > 0$. Wir zeigen $\inf_{L \in \mathscr{L}_H} \|Lf\|_1 = 0$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, sei N eine natürliche Zahl mit $N > (2\|g\|/\varepsilon)1$, sei $L = 1/N\ \Sigma_{n=0}^{N-1} L_y n$, dann gilt $Lf =$ $= 1/N\ \Sigma_0^{N-1} L_{y^N}(L_y g - g) = 1/N(L_{y^N} g - g)$ und $\|Lf \cdot_1 \leqslant 1/N \cdot (\|L_{y^N} g\|_1 + \|g\|_1) =$ $= 2/N \|g\|_1 < \varepsilon$.

Damit ist Theorem 2 gezeigt.

Bemerkung. Aus der Relation $L_y f^* = (R_{y^{-1}} f)^*$ folgt für jede abgeschlossene Untergruppe H

$$\inf_{L \in \mathscr{L}_H} \|Lf\|_1 = \inf_{R \in \mathscr{R}_H} \|Rf^*\|_1$$

Beachtet man, daß in einer Richtung im Beweis von Theorem 2 die Normalität von H gar nicht eingeht erhält man folgende leichte Verschärfung von Theorem 2: $\inf_{L \in \mathscr{L}_H} \|Lf\|_1 = \inf_{L \in \mathscr{L}_H} \|Lf^*\|_1$ für alle $f \in L^1(G)$ dann und nur dann, wenn H normal ist und die Eigenschaft P_1 hat. (Ist H nicht normal ist Lemma 3 stets richtig.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] JOHNSON, B. E., *Some examples in harmonic analysis.* (To appear in Studia Mathematica (1973).)

[2] REITER, H., *Sur certains idéaux dans L^1 (G)*, C. R. Acad. Sci. Paris, *267*, (1968), A 882–885.

[3] ——, *Classical harmonic analysis and locally compact groups*, Oxford, at the Clarendon Press (1968).

[4] ——, *L^1-algebras and Segal algebras*, Lecture notes in mathematics, *231*, Springer, Berlin (1971).

Mathematisches Institut der Universität Wien.
Strudlhofgasse 4
A-1090 Wien

Eingegangen den 7. Mai 1973.