

# Abzählbarkeit und Wohlordenbarkeit

Autor(en): **Felgner, Ulrich**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **49 (1974)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-37982>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Abzählbarkeit und Wohlordenbarkeit

VON ULRICH FELGNER

In dieser Arbeit wollen wir die Beziehungen zwischen den folgenden beiden Axiomen untersuchen:

*(UW)* Die Union einer wohlgeordneten Menge von wohlordenbaren Mengen ist wohlordenbar.

*(UA)* Die Union einer abzählbaren Menge von abzählbaren Mengen ist abzählbar.

Die beiden Axiome sind unmittelbare Konsequenzen des Auswahlaxiomes, und es ist wohlbekannt, daß weder *(UW)* noch *(UA)* in der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre beweisbar sind. Die beiden Axiome haben den Charakter von Induktions-Axiomen. P. E. Howard, H. und J. E. Rubin haben in [5] die interessante Frage gestellt, ob *(UA)* eine Konsequenz von *(UW)* ist. Diese Frage soll hier beantwortet werden:

*Die Implikation  $(UW) \Rightarrow (UA)$  ist im System ZF nicht beweisbar.*

Wir bemerken, daß auch die Implikation  $(UA) \Rightarrow (UW)$  in ZF nicht beweisbar ist. Das Axiom *(UA)* folgt aus dem abzählbaren Auswahlaxiom  $(AC^\omega)$ . Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Wir werden zeigen:

*$(AC^\omega)$  ist vom System  $ZF + (UA) + (UW) + (BPI)$  unabhängig. Dabei ist *(BPI)* das Boolesche Primideal Theorem. Die Beweise werden mittels der Erzwingungs-Methode (forcing) von P. J. Cohen geführt. Wir nehmen an, daß der Leser mit den Grundzügen der Erzwingungs-Technik vertraut ist, wie sie etwa in [3] oder in [7] dargestellt ist.*

Frau Jean E. Rubin möchte ich für eine Reihe hilfreicher Bemerkungen und Hinweise bei der Abfassung dieser Arbeit danken.

### 1. Einführung

ZF sei das System der Zermelo-Fraenkelschen Axiome der Mengenlehre (einschließlich Ersetzungsaxiom und Fundierungsaxiom, aber ohne Auswahlaxiom). Mit *(AC)* bezeichnen wir das übliche Auswahlaxiom. Wenn  $\alpha$  eine Kardinalzahl ist, dann sei  $(AC^\alpha)$  das folgende eingeschränkte Auswahlaxiom:

*$(AC^\alpha)$ : Zu jeder wohlgeordneten Menge  $s$  der Kardinalität  $\alpha$  existiert eine Funktion  $f$  derart, daß  $f(x) \in x$  für alle  $x \in s$  gilt.*

Sei  $\omega$  die Menge aller endlichen Ordinalzahlen. Wir bemerken:

(I) *(UA)* ist im System  $ZF + (AC^\omega)$  beweisbar;

(II) *(UW)* ist im System  $ZF + (AC^{\omega_0})$  beweisbar.

Dabei ist  $(AC^{\omega_0})$  das Auswahlaxiom für wohlgeordnete Familien nicht-leerer Mengen,

also  $(AC^{\omega}) \Leftrightarrow (\forall \alpha: AC^{\alpha})$ . Unter der Voraussetzung der Konsistenz von  $ZF$  gilt das folgende

LEMMA 1. (a) *Es gibt ein ZF-Modell  $\mathfrak{M}_1$  so daß*

$$\mathfrak{M}_1 \models (UW) \wedge (UA) \wedge \neg (AC).$$

(b) *Es gibt ein ZF-Modell  $\mathfrak{M}_2$  so daß*

$$\mathfrak{M}_2 \models \neg (UW) \wedge \neg (UA) \wedge \neg (AC^{\omega}).$$

*Beweis.* Zu (a): Sei  $\mathfrak{M}$  ein abzählbares Standard-Modell von  $ZF+V=L$  und seien  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots (n \in \omega)$  Cohen-generische Teilmengen von  $\omega$ . Sei  $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]_{n \in \omega}$  Feferman's Modell (siehe [2] S.343–344, oder [3] S.160–166). R. Solovay hatte gezeigt, daß  $(AC^{\omega})$  in  $\mathfrak{M}_1$  gilt. Daher ist  $\mathfrak{M}_1$  ein Modell von  $(UW)$  und von  $(UA)$ . Andererseits ist das Ordnungstheorem und daher auch  $(AC)$  in  $\mathfrak{M}_1$  verletzt.

Zu (b): Sei  $\mathfrak{M}_2$  das Modell von A. Levy, in dem die Menge  $\mathbb{R}$  aller reellen Zahlen eine abzählbare Union abzählbarer Mengen ist. Es gilt also  $\mathfrak{M}_2 \models \neg (UA)$ . Aus  $(AC^{\omega}) \Rightarrow (UA)$  ergibt sich damit ferner  $\mathfrak{M}_2 \models \neg (AC^{\omega})$ . Levy zeigt, daß in  $\mathfrak{M}_2$  jede wohlordenbare Menge reeller Zahlen höchstens abzählbar ist. Daher gilt  $\mathfrak{M}_2 \models \neg (UW)$ . Das Modell  $\mathfrak{M}_2$  wird in Levy [6] und in Cohen [1] S.143–147 beschrieben. Q.E.D.

In dem Modell  $\mathfrak{M}_2$  ist  $\aleph_1$  mit  $\aleph_0$  konfinal. Dies zeigt, daß die Regularität von  $\aleph_1$  in  $ZF$  nicht beweisbar ist. Im Zusammenhang mit der Frage, ob  $(UA)$  aus  $(UW)$  folgt, zeigen wir jetzt:

LEMMA 2. *Die Implikation  $(UW) \Rightarrow (UA)$  ist im System  $ZF + „\aleph_1$  ist regulär“ beweisbar.*

*Beweis.* Sei  $S = \{t_n; n \in \omega\}$  eine Menge derart, daß alle  $t_n$  abzählbar sind. Setze  $u_0 = t_0$ ,  $u_{n+1} = t_{n+1} - \bigcup \{t_i; 0 \leq i \leq n\}$ , dann gilt  $\bigcup S = \bigcup \{u_n; n \in \omega\}$  und alle  $u_n$  sind paarweise disjunkt. Aus  $(UW)$  folgt, daß  $\bigcup S$  wohlordenbar ist. Sei also  $\preceq$  eine Wohlordnung von  $\bigcup S$ . Für jedes  $n \in \omega$  gibt es genau eine abzählbare Ordinalzahl  $\beta_n$  und genau einen Ordnungs-Isomorphismus  $f_n$  von  $\langle u_n, \preceq \rangle$  auf  $\langle \beta_n, \in \rangle$ . Eine Funktion  $g$  sei wie folgt definiert: falls  $x \in u_n$ , dann sei  $g(x) = \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{n-1} + f_n(x)$ . Offenbar ist  $g$  eine ein-eindeutige Abbildung von  $\bigcup S$  in  $\omega_1$ . Laut Annahme ist  $\omega_1$  keine abzählbare Union abzählbarer Ordinalzahlen. Also wird  $\bigcup S$  mittels  $g$  nicht auf  $\omega_1$  abgebildet.  $\{g(x); x \in \bigcup S\}$  ist also ein echter Anfangs-Abschnitt von  $\omega_1$ . Also ist  $\bigcup S$  abzählbar. Q.E.D.

*Bemerkung 1.* A. Tarski hat in [9] die folgenden beiden Fragen gestellt:

(A<sub>1</sub>) *Ist  $ZF + „Die Menge  $\mathbb{R}$  aller reellen Zahlen ist abzählbare Union abzählbarer Mengen“ konsistent?$*

(A<sub>2</sub>) Ist  $ZF+$  „Jede unendliche Menge ist abzählbare Union von abzählbaren Unionen von abzählbaren Mengen“ konsistent?

Mit der Konstruktion des Modelles  $\mathfrak{M}_2$  hat A. Levy die Frage (A<sub>1</sub>) positiv beantwortet. Aus der Konsistenz von  $ZF+$  „ $\aleph_1$  ist singulär“ folgt, daß es keinen Term  $t(x)$  von  $ZF$  gibt, so daß „ $\forall r$  [ $r$  ist eine Wohlordnung auf einer abzählbaren Menge  $s \Rightarrow t(r)$  ist eine ein-eindeutige Abbildung von  $s$  auf  $\omega$ ]“ in  $ZF$  beweisbar ist.

Die Frage (A<sub>2</sub>) hat E. P. Specker [10] Seite 207 negativ beantwortet. Sei  $D_0 = \{x; x \text{ ist abzählbar}\}$  und durch Induktion:  $D_{n+1} = \{x; \exists C(C \subseteq D_n \wedge C \text{ ist abzählbar} \wedge x = \bigcup C)\}$ . Es gilt  $\omega_1 \notin D_0$  und wie Specker zeigt:  $\omega_{n+1} \notin D_n$ . Der Beweis unseres Lemmas 2 ist im Wesentlichen nichts anderes als ein Beweis für  $\omega_2 \notin D_1$ .

*Bemerkung 2.* Herr H. Rubin hat kürzlich den folgenden Satz bewiesen: *Die Implikation  $(UW) \Rightarrow (UA)$  ist im System  $ZF+$  „Die Menge  $\mathbb{R}$  aller reellen Zahlen ist wohlordenbar“ beweisbar.* In jedem Permutations-Modell im Sinne von Fraenkel-Mostowski ist  $\mathbb{R}$  wohlordenbar. Daher ergibt sich das folgende Korollar (H. Rubin): *In jedem Permutations-Modell gilt  $(UW) \Rightarrow (UA)$ .*

## 2. Das erste Unabhängigkeits-Resultat

Wir werden jetzt zeigen, daß  $(UA)$  im System  $ZF$  vom Axiom  $(UW)$  unabhängig ist. Dazu werden wir zu einem gegebenen abzählbaren Standard-Modell  $\mathfrak{M}$  von  $ZF$  für jede natürliche Zahl  $n$  unendlich viele generische Bijektionen  $\varphi: \aleph_0 \rightarrow \aleph_n^{\mathfrak{M}}$  (collapsing functions) adjungieren, so daß in der Erweiterung  $\mathfrak{N}$  all diese Funktionen eine unendliche, aber Dedekind-endliche Menge bilden. Daraus folgt dann  $\mathfrak{N} \models (UW)$ . Andererseits sind die Kardinalzahlen  $\aleph_n^{\mathfrak{M}}$  (für  $n \in \omega$ ) in  $\mathfrak{N}$  abzählbar, und  $\aleph_\omega^{\mathfrak{M}}$  ist in  $\mathfrak{N}$  die erste überabzählbare Kardinalzahl:  $\aleph_\omega^{\mathfrak{M}} = \aleph_1^{\mathfrak{N}}$ . Also ist  $\aleph_1$  in  $\mathfrak{N}$  singulär und es folgt  $\mathfrak{N} \models \neg (UA)$ .

**SATZ 1.** *Jedes abzählbare Standard-Modell  $\mathfrak{M}$  von  $ZF+V=L$  kann zu einem abzählbaren Standard-Modell  $\mathfrak{N}$  von  $ZF$  erweitert werden, so daß  $\aleph_\omega^{\mathfrak{M}} = \aleph_1^{\mathfrak{N}}$  und*

- (i) *in  $\mathfrak{N}$  besitzt jede Menge eine lineare Ordnung,*
- (ii)  *$\mathfrak{N} \models (UW) \wedge \neg (UA)$ .*

*Beweis.* Definiere in  $\mathfrak{M}$  eine verzweigte Sprache  $\mathcal{L}$ , welche neben den üblichen  $ZF$ -Symbolen (Variable,  $\varepsilon$ , logische Zeichen  $\vee$ ,  $\neg$ ,  $\forall$  (oder, nicht, es gibt) und Klammern) noch limitierte Existenz-Quantoren  $\forall^\alpha$ , limitierte Komprehensions-Operatoren  $E^\alpha$  (für jede Ordinalzahl  $\alpha \in \mathfrak{M}$ ), Namen  $x$  für jede Menge  $x \in \mathfrak{M}$ , zweistellige Prädikate  $\dot{\Phi}_{m,n}$  (für  $n \in \omega$  und  $1 \leq m \in \omega$ ) und ein zweistelliges Prädikat  $\dot{B}$  enthält. Die Formeln und Terme von  $\mathcal{L}$  werden wie üblich definiert (siehe etwa [3] S.78–80). Operationen und Begriffe, die im Sinne von  $\mathfrak{M}$  gemeint sind, schreiben wir im Folgenden mit einem hochgestellten  $\mathfrak{M}$ . So ist z.B.  $\aleph_m^{\mathfrak{M}}$  diejenige Ordinalzahl von  $\mathfrak{M}$ , die in  $\mathfrak{M}$  die Rolle von  $\aleph_m$  spielt.



Eine endliche Teilmenge  $p$  von  $(\omega - \{0\}) \times \omega \times \omega \times \aleph_\omega^{\aleph_m}$  wird *Bedingung* genannt, falls für alle  $n \in \omega$  and alle  $1 \leq m \in \omega$ ,  $p_{m,n} = \{\langle \alpha, \beta \rangle; \langle m, n, \alpha, \beta \rangle \in p\}$  eine ein-eindeutige Abbildung von  $pr_1(p_{m,n}) = \{\alpha; \exists \beta \in \aleph_\omega^{\aleph_m}: \langle \alpha, \beta \rangle \in p_{m,n}\} \subseteq \omega$  in  $\aleph_m^{\aleph_m}$  ist.

In  $\mathcal{L}$  werden die logischen Zeichen  $\wedge$  (und),  $\rightarrow$  (impliziert),  $\leftrightarrow$  (ist äquivalent mit),  $\bigwedge$  (für alle) und der limitierte universelle Quantor  $\bigwedge_x^\alpha$  per definitionem eingeführt.  $\bigwedge_x^\alpha \Psi(x)$  steht beispielsweise als Abkürzung für  $\neg \bigvee_x^\alpha \neg \Psi(x)$ . Demgegenüber gehören die Zeichen  $\Rightarrow, \Leftrightarrow, \&, \forall, \exists$  (Implikation, Äquivalenz, Konjunktion, für alle, es gibt) der Meta-Sprache an.

Zwischen  $\mathcal{L}$ -Aussagen  $\Psi$  und Bedingungen  $p$  wird eine Erzwingungsbeziehung (strong forcing)  $p \Vdash \Psi$  wie üblich erklärt (siehe etwa [3] S. 81–82). Sie enthält die folgenden beiden wesentlichen Zeilen – dabei sind  $t_1, t_2$  konstante Terme von  $\mathcal{L}$  und  $t_1 \simeq t_2$  steht für die limitierte  $\mathcal{L}$ -Aussage  $\bigwedge_x^\alpha (x \varepsilon t_1 \leftrightarrow x \varepsilon t_2)$ , wobei  $\alpha = \text{Max}(\text{Rang}(t_1), \text{Rang}(t_2))$ :

$$\begin{aligned} p \Vdash \dot{\Phi}_{m,n}(t_1, t_2) &\Leftrightarrow \exists \alpha \in \omega \exists \beta \in \aleph_m^{\aleph_m} [\langle \alpha, \beta \rangle \in p_{m,n} \text{ und } p \Vdash t_1 \simeq \alpha \text{ und } p \Vdash t_2 \simeq \beta], \\ p \Vdash \dot{B}(t_1, t_2) &\Leftrightarrow \exists n \in \omega \exists m \in \omega [1 \leq m \text{ und } p \Vdash t_1 \simeq m \text{ und} \\ &\forall \alpha \forall \beta: p \Vdash (\langle \alpha, \beta \rangle \in t_2 \leftrightarrow \dot{\Phi}_{m,n}(\alpha, \beta))]. \end{aligned}$$

Sei  $\mathcal{P}$  eine vollständige Folge von Bedingungen und  $val$  die kanonische Bewertung (valuation) der konstanten Terme von  $\mathcal{L}$ :  $val(t) = \{val(t'); \text{Rang}(t') < \text{Rang}(t), \mathcal{P} \Vdash t' \varepsilon t\}$ . Sei  $\mathfrak{N} = \{val(t); t \text{ ist ein konstanter Term von } \mathcal{L}\}$ .  $\mathfrak{N}$  ist die gesuchte Erweiterung von  $\aleph$ . Setze

$$\begin{aligned} \varphi_{m,n} &= val(E^{\omega m} x [\bigvee_\alpha^\omega \bigvee_\beta^{\omega m} x = \langle \alpha, \beta \rangle \wedge \dot{\Phi}_{m,n}(\alpha, \beta)]), \\ B &= val(E^{\omega \omega} x [\bigvee_m^\omega \bigvee_y^{\omega \omega} 1 \leq m \varepsilon \omega \wedge x = \langle m, y \rangle \wedge \dot{B}(m, y)]), \\ B_m &= \{\varphi; \langle m, \varphi \rangle \in B\} \quad \text{und} \quad B^\circ = \{\varphi; \exists m \in \omega: \langle m, \varphi \rangle \in B\}. \end{aligned}$$

Aus der Definition der Erzwingungs-Relation  $\Vdash$  folgt sofort, daß jedes  $\varphi_{m,n}$  in  $\mathfrak{N}$  eine ein-eindeutige Abbildung von  $\aleph_0$  auf  $\aleph_m^{\aleph_m}$  ist. Meta-sprachlich gilt ferner

$$\begin{aligned} B &= \{\langle m, \varphi_{m,n} \rangle; 1 \leq m \in \omega \ \& \ n \in \omega\}, \\ B_m &= \{\varphi_{m,n}; n \in \omega\} \quad \text{für } 1 \leq m \in \omega, \\ B^\circ &= \{\varphi_{m,n}; 1 \leq m \in \omega \ \& \ n \in \omega\}. \end{aligned}$$

*Automorphismen.* Sei  $G$  in  $\aleph$  die Gruppe aller ein-eindeutigen Abbildungen von  $\omega$  auf  $\omega$ . Sei  $H = \{\sigma_i; \sigma \in G \ \& \ 1 \leq i \in \omega\}$ . Falls  $p$  eine Bedingung ist und  $\Psi$  eine  $\mathcal{L}$ -Formel,  $\sigma_i \in H$ , dann sei

$$\sigma_i(p) = \{\langle i, \sigma(n), \alpha, \beta \rangle; \langle i, n, \alpha, \beta \rangle \in p\} \cup \{\langle m, n, \alpha, \beta \rangle \in p; m \neq i\},$$

$\sigma_i(\Psi)$  = diejenige Formel, die aus  $\Psi$  entsteht, indem man alle vorkommenden Symbole  $\dot{\Phi}_{i, n}$  durch  $\dot{\Phi}_{i, \sigma(n)}$  ersetzt. Die Symbole  $\dot{\Phi}_{m, n}$ , wobei  $m \neq i$ , werden dabei nicht durch andere ersetzt.

Mit  $p$  ist auch  $\sigma_i(p)$  eine Bedingung und durch Induktion nach dem Formelaufbau folgt:

**SYMMETRIE-LEMMA.** Für alle  $\sigma_i \in H$ , alle Bedingungen  $p$  und alle  $\mathcal{L}$ -Aussagen  $\Psi: p \Vdash \Psi \Leftrightarrow \sigma_i(p) \Vdash \sigma_i(\Psi)$ .

**RESTRIKTIONS-LEMMA.** Sei  $\Psi$  eine  $\mathcal{L}$ -Aussage,  $p$  eine Bedingung und  $\hat{p} = \{ \langle m, n, \alpha, \beta \rangle \in p; \dot{\Phi}_{m, n} \text{ kommt in } \Psi \text{ vor} \}$ . Falls  $p \Vdash \Psi$ , dann gilt auch  $\hat{p} \Vdash^* \Psi$ . Dabei ist  $\Vdash^*$  die schwache Erzwingungs-Beziehung, die durch  $q \Vdash^* \Psi \Leftrightarrow q \Vdash (\neg \neg \Psi)$  definiert ist. Der Beweis ist standard (vergl. [3] S. 132).

**LEMMA A.** Sei  $t$  ein limitierter Komprehensionsterm von  $\mathcal{L}$ , so daß  $t$  in  $\mathfrak{N}$  eine Abbildung von  $\aleph_\alpha^{\mathfrak{M}}$  auf  $\aleph_\beta^{\mathfrak{M}}$  ist. Falls  $k = \text{Max}\{m \in \omega; \exists n \in \omega [\dot{\Phi}_{m, n} \text{ kommt in } t \text{ vor}]\}$ , dann ist entweder  $\beta \leq k$  oder  $\beta \leq \alpha$ .

*Beweis.* Für  $\langle x, y \rangle \in t$  schreiben wir  $\Psi(x, y)$ . Nach Voraussetzung kommen Symbole der Form  $\dot{\Phi}_{m, n}$  höchstens für  $m \leq k$  in  $\Psi$  vor. Weil  $t$  in  $\mathfrak{N}$  eine Abbildung von  $\aleph_\alpha^{\mathfrak{M}}$  auf  $\aleph_\beta^{\mathfrak{M}}$  ist, gilt:

$$\forall \gamma < \aleph_\alpha^{\mathfrak{M}} \exists \delta < \aleph_\beta^{\mathfrak{M}}: \mathfrak{N} \models \Psi(\gamma, \delta) \wedge \bigwedge_{\xi}^{\delta} \neg \Psi(\gamma, \xi), \quad (*)$$

d.h. zu  $\gamma \in \aleph_\alpha^{\mathfrak{M}}$  existiert ein kleinstes  $\delta \in \aleph_\beta^{\mathfrak{M}}$  so daß  $\langle \gamma, \delta \rangle \in t$  und für alle  $\xi < \delta$  gilt  $\neg \langle \gamma, \xi \rangle \in t$ . Zu jedem  $\gamma < \aleph_\alpha^{\mathfrak{M}}$  existiert also ein  $\delta < \aleph_\beta^{\mathfrak{M}}$  und eine Bedingung  $p = p(\gamma, \delta)$ , die von  $\gamma$  und  $\delta$  abhängt,  $p \in \mathcal{P}$ , so daß

$$p \Vdash^* \Psi(\gamma, \delta) \wedge \bigwedge_{\xi}^{\delta} \neg \Psi(\gamma, \xi). \quad (**)$$

Nach dem Restriktions-Lemma können wir annehmen, daß  $p = p(\gamma, \delta) \subseteq (k+1) \times \omega \times \omega \times \aleph_k^{\mathfrak{M}}$  (wir schreiben  $k+1 = \{0, 1, \dots, k\}$ ).

Definiere jetzt in  $\mathfrak{M}$ :

$$C_{k, \alpha} = \{ \delta; \exists q \subseteq (k+1) \times \omega \times \omega \times \aleph_k^{\mathfrak{M}} \exists \gamma < \aleph_\alpha^{\mathfrak{M}} [q \text{ ist eine Bedingung \& } q \Vdash^* \Psi(\gamma, \delta) \wedge \bigwedge_{\xi}^{\delta} \neg \Psi(\gamma, \xi)] \}.$$

In  $\mathfrak{M}$  gibt es höchstens  $\aleph_k^{\mathfrak{M}}$  viele Bedingungen  $q$  für die  $q \subseteq (k+1) \times \omega \times \omega \times \aleph_k^{\mathfrak{M}}$  gilt. Nach (\*) und (\*\*) gibt es zu jeder Bedingung  $q$  und jedem  $\gamma < \aleph_\alpha^{\mathfrak{M}}$  höchstens ein  $\delta < \aleph_\beta^{\mathfrak{M}}$  so daß  $q \Vdash^* \Psi(\gamma, \delta) \wedge \bigwedge_{\xi}^{\delta} \neg \Psi(\gamma, \xi)$  gilt. Daher hat  $C_{k, \alpha}$  in  $\mathfrak{M}$  höchstens eine Mächtigkeit  $\aleph_k^{\mathfrak{M}} \cdot \aleph_\alpha^{\mathfrak{M}}$ . Andererseits ist  $t$  in  $\mathfrak{N}$  surjektiv. Also gilt  $\omega_\beta^{\mathfrak{M}} \subseteq C_{k, \alpha}$ . Daher gilt  $\aleph_\beta^{\mathfrak{M}} \leq \aleph_k^{\mathfrak{M}} \cdot \aleph_\alpha^{\mathfrak{M}}$ . Daraus folgt, daß entweder  $\beta \leq k$  oder  $\beta \leq \alpha$  gilt, denn  $\mathfrak{M} \models (AC)$ .

KOROLLAR.  $\aleph_\omega^{\aleph_1} = \aleph_1^{\aleph_1}$ , also  $cf^{\aleph_1}(\aleph_1^{\aleph_1}) = \aleph_0$ .

*Beweis.* In  $\aleph$  sind  $\aleph_1^{\aleph_1}, \aleph_2^{\aleph_1}, \dots, \aleph_m^{\aleph_1}, \dots$  ( $m \in \omega$ ) abzählbare Ordinalzahlen, denn für jedes  $m \in \omega$ ,  $1 \leq m$ , und für jedes  $n \in \omega$  ist  $\varphi_{m,n}$  in  $\aleph$  eine ein-eindeutige Abbildung von  $\aleph_0$  auf  $\aleph_m^{\aleph_1}$ . Nach Lemma A gibt es aber keine Funktion in  $\aleph$ , die  $\aleph_0$  ein-eindeutig auf  $\aleph_\omega^{\aleph_1}$  abbildet. Also ist die Ordinalzahl  $\aleph_\omega^{\aleph_1}$  in  $\aleph$  die erste überabzählbare Kardinalzahl:  $\aleph_\omega^{\aleph_1} = \aleph_1^{\aleph_1}$ . Weil  $\aleph_\omega^{\aleph_1}$  in  $\aleph$  mit  $\aleph_0$  konfinal ist, ist es auch  $\aleph_1^{\aleph_1}$ .

KOROLLAR.  $\aleph \models \neg(UA) \wedge \neg(AC^\omega)$ .

Dies folgt sofort, weil  $\aleph_1$  in  $\aleph$  eine abzählbare Union abzählbarer Ordinalzahlen ist.

*Bezeichnung.* Sei  $t = E^\alpha x \Psi(x)$  ein limitierter Komprehensions-Term von  $\mathcal{L}$  und  $\text{occ}(t) = \text{occ}(\Psi) = \{\langle m, n \rangle; \dot{\Phi}_{m,n} \text{ kommt in } \Psi \text{ vor}\}$ . Wir schreiben  $t = t(c)$ , für  $c = \text{occ}(t)$ , um anzudeuten, daß Symbole  $\dot{\Phi}_{m,n}$  dann und nur dann in  $t$  vorkommen, wenn  $\langle m, n \rangle \in c$ .

SUPPORT-LEMMA. Seien  $t_1(c_1)$  und  $t_2(c_2)$  limitierte Komprehensions-Terme von  $\mathcal{L}$  so daß  $\aleph \models t_1(c_1) = t_2(c_2)$ . Dann existiert ein limitierter Komprehensions-Term  $t_3 = t_3(c_3)$  so daß  $c_1 \cap c_2 = c_3 = \text{occ}(t_3)$  und  $\aleph \models t_1(c_1) = t_3(c_3)$ .

Der Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis des entsprechenden Support-Lemmas in Mathias[8] (siehe auch [3] S. 118–120). Statt auf  $A$  bezieht man sich hier jedoch auf  $\dot{B}(m, x)$  und das Support-Lemma folgt durch Induktion nach  $m$ .

LEMMA B. In  $\aleph$  besitzt jede Menge eine lineare Ordnung.

*Beweis.* Definiere in  $\aleph$  eine verzweigte Sprache  $\mathcal{L}^*$ , welche neben den üblichen ZF-Symbolen Namen  $x^*$  für jede Menge  $x \in \aleph$ , Namen  $\varphi^*$  für jede Funktion  $\varphi \in B^\circ$ , Namen  $B_m^*$  (für  $1 \leq m \in \omega$ ), einen Namen  $B^*$ , limitierte Existenz-Quantoren  $\vee^\alpha$  und limitierte Komprehensions-Operatoren  $E^\alpha$  für jede Ordinalzahl  $\alpha \in \aleph$  enthält. Aus  $\aleph \models V = L$  folgt, daß  $\aleph$  in der Erweiterung  $\aleph$  definierbar ist.  $\{\langle x, x^* \rangle; x \in \aleph\}$  ist also eine  $\aleph$ -definierbare Klasse, und es folgt, daß auch  $\mathcal{L}^*$  in  $\aleph$  definierbar ist. Im Gegensatz zu  $\mathcal{L}$  hat  $\mathcal{L}^*$  eine  $\aleph$ -definierbare Interpretation  $\Omega^*$ : setze

$$\begin{aligned} \Omega^*(x^*) &= x \quad \text{für } x \in \aleph, \\ \Omega^*(\varphi^*) &= \varphi \quad \text{für } \varphi \in B^\circ \\ \Omega^*(B^*) &= B \quad \text{und} \\ \Omega^*(B_m^*) &= \{y; \langle m, y \rangle \in B\} \quad \text{für } 1 \leq m \in \omega, \end{aligned}$$

und setze  $\Omega^*$  induktiv fort, so daß  $\Omega^*$  eine  $\aleph$ -definierbare Interpretation aller limitierten Komprehensions-Terme  $t$  von  $\mathcal{L}^*$  ist. Für einen Term  $t$  von  $\mathcal{L}^*$  sei  $\text{occ}^*(t)$  die Menge aller  $\varphi \in B^\circ$  derart, daß  $\varphi^*$  in  $t$  vorkommt. Für jede Menge  $z \in \aleph$  sei  $\text{supp}^*(z)$

$= \bigcap \{ \text{occ}^*(t); \Omega^*(t)=z, t \text{ ein Term von } \mathcal{L}^* \}$ . Da  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  Standard-Modelle sind, sind die Mengen  $\text{occ}^*(t)$  nicht nur im Sinne von  $\mathfrak{N}$  endlich, sondern auch endlich im absoluten Sinne. Da  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  dieselben Ordinalzahlen haben, kann  $\mathcal{L}^*$  in  $\mathcal{L}$  übersetzt werden und umgekehrt. Ausgehend von  $z \in \mathfrak{N}$  und einem beliebigen  $\mathcal{L}^*$ -Term  $t$  mit  $z = \Omega^*(t)$  können wir also durch Anwendung des Support-Lemmas in endlich vielen Schritten einen limitierten Komprehensions-Term  $t'$  von  $\mathcal{L}^*$  finden mit der Eigenschaft  $\Omega^*(t')=z$  und  $\text{occ}^*(t')=\text{supp}^*(z)$ . Für eine endliche Teilmenge  $d$  von  $B^\circ$  sei  $V_d = \{z \in \mathfrak{N}; \text{supp}^*(z)=d\}$ . Da jede Menge  $z \in V_d$  durch einen Term  $t_z$  von  $\mathcal{L}^*$  mit  $\text{occ}^*(t_z)=d$  und  $\Omega^*(t_z)=z$  beschrieben werden kann und da ferner die Menge  $T_d$  aller Terme  $t$  von  $\mathcal{L}^*$  mit  $\text{occ}^*(t)=d$  eine  $\mathfrak{N}$ -definierbare Wohlordnung hat, folgt, daß  $\Omega^*$  die Wohlordnung von  $T_d$  auf  $V_d$  überträgt. Sei  $W_d$  diese Wohlordnung auf  $V_d$ . Jede Menge  $B_m (1 \leq m \in \omega)$  hat eine lineare Ordnung. Sei  $R$  die übliche lexikographische lineare Ordnung auf der Menge aller endlichen Teilmengen von  $B^\circ = \bigcup \{B_m; 1 \leq m \in \omega\}$ . Sei jetzt  $u$  eine beliebige Menge von  $\mathfrak{N}$ . Setze:

$$D(u) = \{ \langle x, y \rangle; x \in u \wedge y \in u \wedge [ \langle \text{supp}^*(x), \text{supp}^*(y) \rangle \in R \vee \\ \vee (\text{supp}^*(x) = d = \text{supp}^*(y) \wedge \langle x, y \rangle \in W_d) ] \}.$$

Wir nehmen an, daß  $R$  irreflexiv ist, d.h. für kein  $d$  ist  $\langle d, d \rangle \in R$ . Es folgt, daß  $D(u)$  eine lineare Ordnung auf  $u$  ist.

**LEMMA C.** *Eine Menge  $z \in \mathfrak{N}$  ist in  $\mathfrak{N}$  wohlordenbar genau dann wenn es eine endliche Teilmenge  $d$  von  $B^\circ$  gibt, so daß  $\text{supp}^*(z) \subseteq d$  und  $\text{supp}^*(x) \subseteq d$  für alle  $x \in z$ .*

*Beweis.* Angenommen  $z$  besitzt in  $\mathfrak{N}$  eine Wohlordnung  $\preceq$ . Sei  $d = \text{supp}^*(\preceq)$ .  $z$  kann als das Feld von  $\preceq$  beschrieben werden; daraus folgt  $\text{supp}^*(z) \subseteq d$ . Zu jedem  $x \in z$  existiert eine Ordinalzahl  $\nu$  so daß  $x$  eindeutig als das  $\nu$ -te Element von  $z$  in der Wohlordnung  $\preceq$  beschrieben werden kann. Daher gilt  $\text{supp}^*(x) \subseteq d$  für alle  $x \in z$ . – Die Umkehrung folgt sofort, weil jede Klasse  $V_d$  für endliches  $d$  eine  $\mathfrak{N}$ -definierbare Wohlordnung hat.

**KOROLLAR.** *Eine Menge  $u \in \mathfrak{N}$  ist in  $\mathfrak{N}$  genau dann wohlordenbar wenn  $D(u)$  eine Wohlordnung von  $u$  ist.*

Dies folgt sofort aus den Lemmata B und C. Daraus folgt außerdem sofort, daß  $(UW)$  in  $\mathfrak{N}$  gilt. Sei nämlich  $z$  eine wohlgeordnete Menge wohlordenbarer Mengen,  $z = \{u_\nu; \nu < \lambda\} \in \mathfrak{N}$ , dann ist  $\{ \langle x, y \rangle; x, y \in \bigcup z \wedge \exists \nu_1 < \lambda \exists \nu_2 < \lambda [x \in u_{\nu_1} \wedge y \in u_{\nu_2} \wedge (\nu_1 < \nu_2 \vee (\nu_1 = \nu_2 \wedge \langle x, y \rangle \in D(u_{\nu_1})))] \}$  eine Wohlordnung von  $\bigcup z$ . Also  $\mathfrak{N} \models (UW)$ , Damit ist Satz 1 bewiesen.

*Bemerkung.* Neben dem schon vorher diskutierten Axiom  $(AC^{\omega_0})$  betrachten wir noch das folgende Axiom:

$(AC_{\omega_0})$ : Zu jeder Menge  $z$ , derart daß alle  $y \in z$  nicht-leere wohlordenbare Mengen sind, existiert eine Funktion  $f$  so daß  $f(y) \in y$  für alle  $y \in z$ .

Aus dem oben stehenden Korollar folgt, daß  $\aleph \models (AC_{\omega_0})$ . In der Tat, wenn  $z \in \aleph$  gegeben ist so, daß alle Elemente  $y$  von  $z$  wohlordenbar sind, dann ist  $D$  eine Funktion, die jedem  $y \in z$  eine Wohlordnung  $D(y)$  zuordnet. Dann ist  $f(y) = \text{Min}(D(y))$  eine auf  $z$  definierte Auswahlfunktion.

Es gilt  $ZF \vdash (AC^{\omega_0}) \Rightarrow (UW)$  und nach J. E. Rubin auch  $ZF \vdash (AC_{\omega_0}) \Rightarrow (UW)$ . In Satz 1 haben wir gezeigt, daß  $\aleph \models (UW) \wedge \neg(AC^{\omega})$ , also  $\aleph \models \neg(AC^{\omega_0})$ . Daraus folgt, daß  $(AC^{\omega_0})$  von  $(UW)$  unabhängig ist.

In Fefermans Modell  $\aleph_1$  (siehe Lemma 1) ist das Auswahlaxiom für Mengen von ungeordneten Paaren  $(AC_2)$  nicht gültig (siehe [2] S. 344). Es gilt  $(AC_{\omega_0}) \Rightarrow (AC_2)$ , also  $\aleph_1 \models \neg(AC_{\omega_0})$  und  $\aleph_1 \models (UW) \wedge (AC^{\omega_0})$ . Es folgt, daß auch  $(AC_{\omega_0})$  von  $(UW)$  unabhängig ist.

### 3. Weitere Unabhängigkeits-Resultate

Wir wollen jetzt zeigen, daß auch die Implikation  $(UA) \Rightarrow (UW)$  in  $ZF$  nicht beweisbar ist.

**SATZ 2.** Jedes abzählbare Standard-Modell  $\aleph$  von  $ZF + V=L$  kann zu einem Modell  $\aleph$  von  $ZF + (UA) + \neg(UW)$  erweitert werden.

*Beweis-Skizze.* Sei  $\omega^\alpha$  die Menge aller Funktionen von  $\alpha$  in  $\omega$ . Definiere in  $\aleph$ :  $B = \{f; \exists \alpha < \omega_1: f \in \omega^\alpha\}$ .  $\langle B, \subseteq \rangle$  ist ein Baum mit der Eigenschaft, daß jeder Punkt  $f \in B$  genau  $\aleph_0$  viele unmittelbare Nachfolger hat. Eine Teilmenge  $C \subseteq B$  heißt Teilbaum, wenn  $\forall x \forall y [(y \subseteq x \in C \wedge y \in B) \Rightarrow y \in C]$ . Ein Teilbaum  $C$  von  $B$  heißt klein, wenn eine Ordinalzahl  $\beta < \omega_1$  existiert derart, daß  $pr_1(f) = \{\alpha; \exists n \in \omega; \langle \alpha, n \rangle \in f\} \subseteq \beta$  für alle  $f \in C$ .

Definiere in  $\aleph$  eine verzweigte Sprache  $\mathcal{L}$ , die neben den üblichen  $ZF$ -Symbolen Konstante  $\mathbf{x}$  für jede Menge  $x \in \aleph$ , Konstante  $\mathbf{a}_f$  für jedes  $f \in B$ , zweistellige Prädikate  $\dot{T}_C$  für jeden kleinen Teilbaum  $C$  von  $B$ , ein zweistelliges Prädikat  $\dot{\leq}$  und limitierte Existenz-Quantoren  $\dot{\vee}^\alpha$  und limitierte Komprehensions-Operatoren  $E^\alpha$  für jede Ordinalzahl  $\alpha \in \aleph$  enthält. Endliche partielle Abbildungen  $p$  von  $\omega \times B$  in  $2 = \{0, 1\}$  werden Bedingungen genannt. Eine Erzwingungs-Beziehung  $\Vdash$  wird wie üblich definiert – sie enthält die folgenden Zeilen:

$$p \Vdash t \in \mathbf{a}_f \Leftrightarrow \exists n \in \omega [p \Vdash t \simeq \mathbf{n} \ \& \ p(n, f) = 1],$$

$$p \Vdash t_1 \dot{\leq} t_2 \Leftrightarrow \exists f \in B \exists g \in B [p \Vdash t_1 \simeq \mathbf{a}_f \ \& \ p \Vdash t_2 \simeq \mathbf{a}_g \ \& \ f \subseteq g],$$

$$p \Vdash \dot{T}_C(t_1, t_2) \Leftrightarrow \exists f \in C [p \Vdash t_1 \simeq \mathbf{a}_f \ \& \ p \Vdash t_2 \simeq \mathbf{f}].$$

Wähle eine vollständige Folge von Bedingungen,  $\mathcal{P}$ , und definiere wie üblich eine

Bewertung  $val(t)$  der konstanten Terme  $t$  von  $\mathcal{L}$ . Das resultierende Modell sei  $\mathfrak{A}$ . Sei

$$\begin{aligned} a_f &= val(\dot{a}_f), \\ T_C &= val(E^{\omega+3}x(\bigvee_y^{\omega+1} \bigvee_z^{\omega+1} x \simeq \langle y, z \rangle \wedge \dot{T}_C(y, z))), \\ \preceq &= val(E^{\omega+3}x(\bigvee_y^{\omega+1} \bigvee_z^{\omega+1} x \simeq \langle y, z \rangle \wedge y \dot{\leq} z)), \end{aligned}$$

und sei  $A$  das Feld von  $\preceq : A = pr_1(\preceq) \cup pr_2(\preceq)$ . Es gilt  $A = \{a_f; f \in B\}$  und  $\preceq$  ist eine partielle Ordnung auf  $A$  derart, daß  $\langle A, \preceq \rangle$  ein Baum ist.  $T_C = \{\langle a_f, f \rangle; f \in C\}$  ist in  $\mathfrak{A}$  eine ein-eindeutige Abbildung mit Bildbereich  $C$ . Da  $C \subseteq B$  in  $\mathfrak{M}$  eine Wohlordnung hat, wird diese auf  $pr_1(T_C) = \{a_f; f \in C\}$  übertragen.

Für jedes  $x \in A$  ist  $\hat{x} = \{y \in A; y \triangleleft x\}$  wohlgeordnet. Der Ordnungstyp von  $\hat{x}$  wird *Ordnung von  $x$*  genannt und mit  $o(x)$  bezeichnet. Sei  $A_\alpha = \{x \in A; o(x) = \alpha\}$ . Für jedes  $\alpha < \omega_1^{\mathfrak{M}}$  gibt es einen kleinen Teilbaum  $C_\alpha \subseteq B$ , so daß  $A_\alpha \subseteq pr_1(T_{C_\alpha})$ . Jede Menge  $A_\alpha$  ( $\alpha < \omega_1^{\mathfrak{M}}$ ) ist daher in  $\mathfrak{A}$  wohlordenbar. Ein Symmetrie-Argument zeigt, daß  $A$  im Modell  $\mathfrak{A}$  nicht wohlordenbar ist. Es gilt  $A = \bigcup \{A_\alpha; \alpha < \omega_1^{\mathfrak{M}}\}$ , und daher folgt  $\mathfrak{A} \models \neg(UW)$ .

Sei  $G$  in  $\mathfrak{M}$  die Gruppe aller Automorphismen von  $\langle B, \subseteq \rangle$ . Für  $\sigma \in G$  und eine Bedingung  $p$  sei

$$\sigma(p) = \{\langle n, \sigma(f), e \rangle; \langle n, f, e \rangle \in p\},$$

und für eine  $\mathcal{L}$ -Formel  $\Psi$  sei  $\sigma(\Psi)$  diejenige Formel, die aus  $\Psi$  entsteht indem man an allen Stellen  $\dot{a}_f$  durch  $\dot{a}_{\sigma(f)}$  und  $\dot{T}_C$  durch  $\dot{T}_{\sigma(C)}$  ersetzt. Es gilt das folgende

**SYMMETRIE-LEMMA.** *Für alle  $\sigma \in G : p \Vdash \Psi \Leftrightarrow \sigma(p) \Vdash \sigma(\Psi)$ .*

Im nächsten Schritt beweist man wie üblich das folgende Kombinatorische Lemma: *Sei  $K$  in  $\mathfrak{M}$  eine Menge von Bedingungen. Dann gibt es in  $\mathfrak{M}$  eine Teilmenge  $K^x$  von  $K$  so daß  $K^x$  in  $\mathfrak{M}$  abzählbar ist und so daß zu jedem  $p \in K$  ein  $q \in K^x$  existiert derart, daß  $p \cup q$  eine Bedingung ist. (siehe etwa [3] S. 157). Es folgt, daß  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{A}$  dieselben Alephs haben. Insbesondere folgt  $cf_{\mathfrak{A}}(\aleph_1^{\mathfrak{A}}) = cf_{\mathfrak{M}}(\aleph_1^{\mathfrak{M}}) = \aleph_1^{\mathfrak{M}} = \aleph_1^{\mathfrak{A}}$ .*

Für einen kleinen Teilbaum  $C$  von  $B$  sei  $\mathcal{L}(C)$  diejenige Teilsprache von  $\mathcal{L}$ , die Konstante  $\dot{a}_f$  nur für  $f \in C$  und Prädikate  $\dot{T}_D$  nur für  $D \subseteq C$  enthält. Es gibt eine  $\mathfrak{A}$ -definierbare Interpretation  $\Omega_C$  von  $\mathcal{L}(C)$  in  $\mathfrak{A}$  so daß  $val(t) = \Omega_C(t)$  für konstante Terme  $t$  der Sprache  $\mathcal{L}(C)$ . Dies ist der Fall, weil  $T_C$  eine Menge von  $\mathfrak{A}$  ist. Sei  $V(C) = \{\Omega_C(t); t \text{ ist ein konstanter Term von } \mathcal{L}(C)\}$ .  $\mathcal{L}(C)$  hat eine  $\mathfrak{M}$ -definierbare Wohlordnung;  $\Omega_C$  induziert daher eine  $\mathfrak{A}$ -definierbare Wohlordnung auf  $V(C)$ . Für jede einzelne gegebene unlimitierte  $\mathcal{L}$ -Aussage  $\Psi$  ist bekanntlich die Erzwingungs-Relation  $p \Vdash \Psi$  in  $\mathfrak{M}$ . Daher gilt:

**LEMMA.** (in  $\mathfrak{M}$ ) *Zu jedem konstanten Term  $t$  von  $\mathcal{L}$  existiert ein kleiner Teilbaum  $C$  von  $B$  so daß für jede Bedingung  $p$ ,  $p \Vdash (t \neq \emptyset \rightarrow t \cap V(C) \neq \emptyset)$  gilt.*

*Beweis.* Betrachte  $K = \{q; q \Vdash^* \bigvee_x x \in t\} \in \mathfrak{M}$ . Nach dem Kombinatorischen Lemma existiert eine in  $\mathfrak{M}$  abzählbare Teilmenge  $K^x \subseteq K$  so daß zu jedem  $p \in K$  eine mit  $p$  verträgliche Bedingung  $q \in K^x$  existiert. Sei  $K^x = \{q_0, q_1, q_2, \dots\}$  und wähle in  $\mathfrak{M}$  zu jedem  $q_n \in K^x$  einen limitierten Komprehensionsterm  $t_n$  so daß  $q_n \Vdash^* t_n \in t$ . Für jeden Term  $t_n$  sei  $D_n$  der kleinste kleine Teilbaum von  $B$  so daß  $a_f$  nur für  $f \in D_n$  und  $T_E$  nur für  $E \subseteq D_n$  in  $t_n$  vorkommen. Sei  $C = \bigcup \{D_n; n \in \omega\}$ , dann ist  $C$  der gesuchte kleine Teilbaum von  $B$ .

LEMMA.  $\mathfrak{A} \models (AC^\omega)$ .

*Beweis.* Sei  $z = \{y_n; n \in \omega\}$  in  $\mathfrak{A}$  eine abzählbare Menge nicht-leerer Mengen. Es existiert ein Term  $t_F$  von  $\mathcal{L}$  derart daß  $F = \text{val}(t_F)$  eine ein-eindeutige Abbildung von  $\omega$  auf  $z$  ist,  $z = \{F(n); n \in \omega\}$ . Sei  $y_n = F(n) = \text{val}(t_F(\mathbf{n}))$ . Aus dem vorangegangenen Lemma folgt für jedes  $n \in \omega$  die Existenz eines kleinen Teilbaums  $C_n$  derart, daß für alle Bedingungen  $p$ ,  $p \Vdash^* (t_F(\mathbf{n}) \neq \emptyset \rightarrow t_F(\mathbf{n}) \cap V(C_n) \neq \emptyset)$ . Da auch die Relation  $\{\langle p, n \rangle; p \Vdash^* \Psi(\mathbf{n}) \ \& \ n \in \omega\}$  für jede einzelne  $\mathcal{L}$ -Formel  $\Psi(x)$  in  $\mathfrak{M}$  vorhanden ist, können wir in  $\mathfrak{M}$  für jedes  $n \in \omega$  einen solchen Teilbaum  $C_n$  wählen und  $C = \bigcup \{C_n; n \in \omega\}$  ist wieder ein kleiner Teilbaum von  $B$  so daß für jede Bedingung  $p$  und jede natürliche Zahl  $n$ :  $p \Vdash^* (t_F(\mathbf{n}) \neq \emptyset \rightarrow t_F(\mathbf{n}) \cap V(C) \neq \emptyset)$  gilt. Daher folgt  $\mathfrak{A} \models (t_F(\mathbf{n}) \neq \emptyset \rightarrow t_F(\mathbf{n}) \cap V(C) \neq \emptyset)$  für alle  $n \in \omega$ . Nach Voraussetzung gilt  $\mathfrak{A} \models y_n \neq \emptyset$  für alle  $n \in \omega$ . Also hat jede Menge  $y_n$  einen nicht-leeren Durchschnitt mit  $V(C)$  in  $\mathfrak{A}$ .  $V(C)$  hat jedoch eine Wohlordnung in  $\mathfrak{A}$  und wir erhalten die gesuchte Auswahlfunktion, wenn wir aus jeder Menge  $y_n \cap V(C)$  das kleinste Element auswählen.

KOROLLAR:  $\mathfrak{A} \models (UA)$ .

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Wir diskutieren abschließend die Frage, in welcher Beziehung die Axiome  $(UA)$  und  $(AC^\omega)$  zueinander stehen. Es gilt in  $ZF$ :  $(AC^\omega) \Rightarrow (UA)$ . Wir wollen zeigen, daß  $(AC^\omega)$  in  $ZF$  nicht einmal aus  $(UA) \wedge (UW) \wedge (BPI) \wedge (KW-AC)$  ableitbar ist. Dabei ist  $(BPI)$  das Boolesche Prim-Ideal Theorem („Jede Boolesche Algebra besitzt ein Prim-Ideal“) und  $(KW-AC)$  ist das Selektions-Prinzip von Kinna und Wagner („Zu jeder Menge  $z$ , deren sämtliche Elemente mindestens zwei Elemente enthalten, existiert eine Funktion  $f$  so daß  $\emptyset \neq f(y) \subset y$  für alle  $y \in z$ .“ Dabei steht  $a \subset b$  für  $a \neq b \wedge a \subseteq b$ ). Unter der Voraussetzung der Existenz eines  $ZF$ -Modelles gilt:

SATZ 3. Es gibt ein  $ZF$ -Modell  $\mathfrak{B}$  so daß

$$\mathfrak{B} \models (UW) \wedge (UA) \wedge (BPI) \wedge (KW-AC) \wedge \neg (AC^\omega).$$

*Beweis.* Sei  $\mathfrak{M}$  ein abzählbares Standard-Modell und  $\mathfrak{B} = \mathfrak{M}[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, A]$  diejenige Cohen-Erweiterung von  $\mathfrak{M}$ , die entsteht, indem man zu  $\mathfrak{M}$  Cohen-generische Mengen  $a_n \subset \omega (n \in \omega)$  und eine Menge  $A = \{a_n; n \in \omega\}$  adjungiert. J. D. Halpern und



A. Levy [4] haben gezeigt, daß das Boolesche Prim-Ideal Theorem (*BPI*) und das Kinna-Wagnersche Selektions-Prinzip (*KW-AC*) in  $\mathfrak{B}$  gelten (siehe auch [3] S. 131–144).  $A$  ist in  $\mathfrak{B}$  unendlich, aber Dedekind-endlich. Daher gilt  $\mathfrak{B} \models \neg(AC^\omega)$ . Wie im Beweis von Satz 1 zeigt man, daß  $\mathfrak{B} \models (AC_{wo})$  und folglich  $\mathfrak{B} \models (UW)$  gilt. In  $\mathfrak{B}$  ist  $\aleph_1$  regulär. Nach Lemma 2 gilt daher  $\mathfrak{B} \models (UA)$ . Damit ist Satz 3 bewiesen.

#### LITERATUR

- [1] COHEN, P. J., *Set Theory and the Continuum Hypothesis*; W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1966.
- [2] FEFERMAN, S., *Some applications of the notions of forcing and generic sets*; *Fund. Math.* 56 (1965), S. 325–345.
- [3] FELGNER, U., *Models of ZF-Set Theory*; *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 223, Springer-Verlag Berlin 1971.
- [4] HALPERN, J. D. und LEVY, A., *The Boolean Prime Ideal Theorem does not imply the Axiom of Choice*; In: *Proceedings of Symp. in pure Math.*, vol. XIII, Part I, S. 83–134 (AMS, Providence 1971).
- [5] HOWARD, P. E., RUBIN, H. und RUBIN, J. E., *The relationship between two weak forms of the Axiom of Choice*; *Fund. Math.* to appear.
- [6] LEVY, A., „I present here an outline...“ Unpubliziertes Manuskript, 1963.
- [7] —, *Definability in axiomatic Set Theory – I*; In: *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Congress Jerusalem 1964. North-Holland Publ. Comp. Amsterdam 1966, S. 127–151.
- [8] MATHIAS, A. R. D., *The Order-Extension Principle*; In: *Proc. Symp. pure Math.*, vol. XIII, Part 2, to appear.
- [9] TARSKI, A., *The problem of weakly denumerable sets*; *The Journal of Symbolic Logic* 18 (1953) S. 186.
- [10] SPECKER, E. P., *Zur Axiomatik der Mengenlehre (Fundierungs- und Auswahlaxiom)*; *Z. math. Logik und Grundlagen d. Math.* 3 (1957), 173–210.

*Mathematisches Institut der Universität, 69 Heidelberg*

Eingegangen den 28. September 1972