...-Applications dans une variété

Autor(en): **Weber, Claude**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **49 (1974)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-37983

ε-Applications dans une variété

par CLAUDE WEBER

1. Introduction

Soient X un espace métrique, Y un espace topologique, ε un nombre réel positif. On dit qu'une application $f: X \to Y$ est une ε-application si, pour tout $y \in Y$, le diamètre de $f^{-1}(y)$ est plus petit que ε. On dit que f est un plongement si f est un homéomorphisme de X sur $f(X)$. Dans le cas où X est compact, un plongement est la même chose qu'une 0-application. Ce fait est important dans la démonstration du théorème de Menger-Nöbeling telle qu'elle est exposée, par exemple, dans Hurewicz-Wallman [5]. X étant toujours supposé compact et Y métrique on montre que:

1) Les ε-applications de X dans Y forment un ouvert dans l'espace des applications continues de X dans Y, muni de la topologie de la convergence uniforme.

2) Si X est de dimension n, les ε-applications de X dans $\mathbf{R}^m$ forment un sous-ensemble dense pour $m \geqslant 2n+1$. (Domaine stable).

Ainsi, les 0-applications de X dans $\mathbf{R}^m$, $m \geqslant 2n+1$, sont l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses et forment donc un sous-ensemble dense d'après le théorème de Baire.

Cette démonstration classique montre que les relations entre ε-applications et plongements sont plutôt bonnes dans le domaine stable. Il en va très différemment dès que l'on se trouve en dessous du domaine stable:

1) Les ε-applications ne sont pas denses. Par exemple, l'application du segment $[0.1]$ dans $\mathbf{R}^2$ qui a un point double ne peut être approchée pour tout $\varepsilon > 0$ par des ε-applications.

2) Il y a des compacts de dimension 1 pour lesquels il existe des ε-applications dans $\mathbf{R}^2$ pour tout $\varepsilon > 0$ et qui pourtant ne se plongent pas dans $\mathbf{R}^2$. Avant d'en donner un exemple particulièrement simple, rappelons la définition classique: On dit que X peut être quasi-plongé dans Y s'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une ε-application de X dans Y. Borsuk a donné dans [1] un exemple d'un compactum de dimension deux qui peut être quasi-plongé dans $\mathbf{R}^2$ et qui ne peut être plongé dans $\mathbf{R}^2$.

Nous construisons tout d'abord un sous-ensemble Z du plan de la façon suivante:

Pour $n > 0$ entier, soit A_n le cercle de centre l'origine et de rayon $1/n$, et soit $A = \{(0, 0)\} \cup \bigcup_{n \geqslant 1} A_n$.

Soit $B = \{(x, y)\} \in \mathbf{R}^2 \mid |x| \leqslant 1, y = 0$ ou $x = 0, |y| \leqslant 1\}$.

Posons $Z = A \cup B$. Identifions $\mathbf{R}^2$ avec le sous-ensemble des $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ tels que $z = 0$ et prenons pour X la réunion de Z et de $C = \{(0, 0, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leqslant z \leqslant 1\}$.

Pour voir que X peut être quasi-plongé dans $\mathbf{R}^2$, donnons nous un $\varepsilon > 0$. Soit n suffisamment grand pour que $1/2n < \varepsilon$.

Désignons par X_n le quotient de X obtenu en identifiant en un point tous les points de Z qui sont à distance de l'origine plus petite ou égale à $1/2n$. Soit $\varphi : X \to X_n$ la projection sur le quotient. φ est une ε-application. Mais il est évident qu'il existe un plongement $u : X_n \to \mathbf{R}^2$. $u \circ \varphi : X \to \mathbf{R}^2$ est donc une ε-application.

Esquissons maintenant la démonstration que X ne peut se plonger dans $\mathbf{R}^2$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\psi : X \to \mathbf{R}^2$ est un plongement.

On montre alors assez facilement, en utilisant le fait que ψ est continue à l'origine et les coefficients d'enlacement que:

i) $\psi(0, 0)$ ne peut être extérieur à $\psi(A_n)$ pour tout n.

ii) Si $\psi(0, 0)$ est intérieur à $\psi(A_n)$, il est aussi intérieur à $\psi(A_m)$ pour tout $m \geqslant n$.

Les détails sont laissés au lecteur. Soit $P = (0, 0, 1)$. D'après i) et ii) et le fait que ψ est continue à l'origine, il existe un k assez grand tel que:

a) $\psi(0, 0)$ est intérieur à $\psi(A_k)$.

b) $\psi(P)$ est extérieur à $\psi(A_k)$.

Ceci entraîne que $\psi(C)$ doit rencontrer $\psi(A_k)$, ce qui contredit le fait que ψ est un plongement.

Il est très probable que ces exemples puissent se généraliser:

CONJECTURE. *Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un compactum de dimension n qui peut se quasi-plonger dans $\mathbf{R}^{2n}$ et qui cependant ne peut se plonger dans $\mathbf{R}^{2n}$.*

Voici maintenant un bref aperçu de ce travail. Dans la première partie, on montre que certains liens subsistent entre quasi-plongements et plongements lorsque X est un polyèdre compact, Y une variété et que $2 \dim Y \geqslant 3 (\dim X + 1)$. (Domaine métastable). En voici un exemple:

THÉORÈME. *Soit X un polyèdre compact de dimension n et soit Y une variété semi-linéaire de dimension m. Alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que toute ε-application $f: X \to Y$ puisse être approchée arbitrairement près par un plongement (semi-linéaire), à condition que $2m \geqslant 3(n+1)$.*

Ce théorème généralise un résultat de Ganéa [3], qui affirme l'existence, pour tout polyèdre compact, d'un $\varepsilon > 0$ tel que l'existence d'une ε-application de X dans $\mathbf{R}^{2n}$ entraîne l'existence d'un plongement de X dans $\mathbf{R}^{2n}$. $(n \geqslant 3)$.

Dans la deuxième partie de ce travail, nous utilisons la théorie de Flores, telle qu'elle a été explicitée par R. Reid, pour démontrer certains théorèmes de non-existence de quasi-plongements. Par exemple, pour tout $n \geqslant 1$, il existe des polyèdres contractibles de dimension n qui ne peuvent être quasi-plongés dans $\mathbf{R}^{2n-1}$.

Dans la dernière partie, nous montrons que, lorsque X est une variété mod 2, l'annulation de certaines classes de Stiefel-Whitney normales est une condition nécessaire à l'existence de quasi-plongements dans un espace euclidien.

Je tiens à remercier très vivement R. Reid pour de très utiles conversations sur la théorie de Flores et les professeurs Mardesic et Horvatic de Zagreb de m'avoir initié aux ε-applications.

2. Théorèmes d'existence

Soit X une space métrique. Soit $\tilde{X}=X\times X-\Delta X$ le complémentaire de la diagonale. $\tilde{X}$ s'appelle le produit réduit de X. Désignons par μ l'involution sans points fixes de $\tilde{X}$ qui échange les facteurs. Enfin, munissons $\mathbf{R}^m$, $\mathbf{R}^m-\{0\}$, S^{m-1} de l'involution antipode.

Supposons maintenant que $f:X\to\mathbf{R}^m$ est un plongement. Alors l'application $\tilde{f}:\tilde{X}\to S^{m-1}$ définie par:

$$\tilde{f}(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{\|f(x)-f(y)\|}$$

est équivariante (c'est-à-dire commute aux involutions). Réciproquement:

THÉORÈME [9]. *Soit X un polyèdre compact de dimension n. Supposons qu'il existe une application équivariante $F:\tilde{X}\to S^{m-1}$. Alors il existe un plongement semi-linéaire $f:X\to\mathbf{R}^m$, si $2m\geqslant 3(n+1)$.*

Supposons maintenant que X est un complexe simplicial compact. Dans $X\times X$ envisageons le sous-espace $T(X)$ constitué par la réunion de toutes les cellules $\sigma\times\tau$, où σ et τ sont des simplexes fermés, non vides de X tels que $\sigma\cap\tau=\emptyset$. Il est évident que $T(X)$ est compact et invariant par l'involution μ.

LEMME. *$T(X)$ est un rétracte par déformation de X, de façon équivariante.*

Ce lemme est dû à Shapiro [7]. Pour une démonstration mettant l'accent sur l'équivariance, on peut consulter [10].

Le lemme et le théorème impliquent que, pour avoir un plongement de X dans $\mathbf{R}^m$, lorsque $2m\geqslant 3(n+1)$, il suffit de construire une application équivariante $T(X)\to\to S^{m-1}$.

Soit maintenant $g:X\to\mathbf{R}^m$ une application continue et considérons l'application $\bar{g}:X\times X\to\mathbf{R}^m$ définie par: $\bar{g}(x,y)=g(x)-g(y)$. Comme $T(X)$ est compact, il est facile de voir qu'il existe un $\varepsilon>0$ assez petit tel que, si g est une ε-application, $\bar{g}$ envoie $T(X)$ dans $\mathbf{R}^m-\{0\}$. Soit alors $\varrho:\mathbf{R}^m-\{0\}\to S^{m-1}$ la rétraction par déformation équivariante

$$\varrho(z)=\frac{z}{\|z\|}$$

En ce cas, $\varrho\circ\bar{g}\mid T(x)\to S^{m-1}$ est une application équivariante.

Nous avons donc le théorème suivant:

THÉORÈME. *Soit X un polyèdre compact de dimension n. Alors, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que l'existence d'une ε-application $X \to \mathbf{R}^m$ entraîne l'existence d'un plongement (semi-linéaire) de X dans $\mathbf{R}^m$, à condition que $2m \geqslant 3(n+1)$.*

Remarque. Ce théorème a été démontré par Ganéa [3] dans le cas où $m = 2n$, $n \geqslant 3$.

En utilisant la technique de [9] plutôt que les résultats qui y sont explicitement démontrés et en travaillant de façon relative «carte par carte» on peut en fait, démontrer le théorème d'approximation suivant:

THÉORÈME. *Soient X un polyèdre compact de dimension n, V une variété semi-linéaire de dimension m, avec $2m \geqslant 3(n+1)$. Alors, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que toute ε-application $f: X \to V$ puisse être approchée arbitrairement près par un plongement (semi-linéaire).*

Remarques. 1) Il est très probable que le théorème reste vrai si l'on suppose seulement que V est une variété topologique, le plongement approchant f étant alors seulement «topologique».

2) Il est plausible que le théorème reste vrai avec la restriction de dimensions beaucoup plus faible $m - n \geqslant 3$. Les résultats de Connelly, Edwards et Cernavskii sur l'approximation des plongements topologiques par des plongements semi-linéaires soutiennent cette conjecture.

3. La Théorie de Flores [2]

Nous démontrons maintenant les résultats de Flores, en les interprétant dans le cadre de la théorie du paragraphe précédant.

Un schéma simplicial (fini) augmenté est la donnée d'un ensemble (fini) S, l'ensemble des sommets, non-vide, et d'un sous-ensemble A de l'ensemble des parties de S tel que:

1) $s \in S$ entraîne $\{s\} \in A$

2) $\sigma \in A$ et $\tau \subset \sigma$ entraînent $\tau \in A$.

Comme on ne demande pas que A soit constitué de parties non-vides, 1) et 2) entraînent que $\emptyset \in A$ (d'où l'adjectif «augmenté»). Les éléments de A sont les simplexes du schéma.

Soient maintenant S' et S'' deux copies de S, disjointes. A toute partie σ de l'ensemble S correspondent une partie σ' de S' et une partie σ'' de S''. Dans l'ensemble des sommets $S' \cup S''$ considérons les parties $\sigma' \cup \tau''$ telles que:

i) $\sigma \in A$, $\tau \in A$

ii) $\sigma \cap \tau = \emptyset$.

Comme la partie vide est un élément de A, il est immédiat de vérifier que l'on définit ainsi un schéma simplicial (fini) augmenté, que nous noterons $J(A)$. {Pour joint réduit de A avec lui-même).

Ce schéma $J(A)$ possède une involution simpliciale définie sur les sommets par: $s' \to s''$ et $s'' \to s'$ pour tout sommet $s \in S$.

Soit K le complexe simplicial qui est la réalisation géométrique de A. En gros, la réalisation géométrique de $J(A)$ a pour simplexes tous les joints ordonnés $\sigma * \tau$ où σ et τ sont des simplexes de K tels que $\sigma \cap \tau = \emptyset$. σ et τ peuvent être vides. Dans ce cas $\sigma * \emptyset = \sigma$. L'involution envoie $\sigma * \tau$ sur $\tau * \sigma$.

LEMME. *La réalisation géométrique de $J(A)$ est homéomorphe de façon équivariante à $T(cK)$ où cK désigne le cône sur K.*

Preuve. Soit $\sigma * \tau$ un simplexe typique de la réalisation de $J(A)$. Considérons d'autre part le sous-espace:

$$(\sigma \times c\tau) \cup (c\sigma \times \tau) \subset T(cK)$$

On a

$$(\sigma \times c\tau) \cap (c\sigma \times \tau) = \sigma \times \tau.$$

En conséquence, ce sous-espace est homéomorphe, de façon naturelle à $\sigma * \tau$ en vertu de la formule classique pour le joint de deux ensembles:

$$A * B = (A \times cB) \cup (cA \times B)/A \times B.$$

Tout étant compact, il n'y a pas de problème de topologies.

D'après la définition que nous avons donnée du sous-espace T, il est immédiat de vérifier que l'on définit ainsi un homéomorphisme de la réalisation géométrique de $J(A)$ sur $T(cK)$, compatible avec les involutions qui, dans chaque cas, reviennent essentiellement à «échanger les facteurs».

Si A et B sont deux schémas simpliciaux (finis) augmentés, d'ensembles de sommets S resp. U, on définit le joint $A * B$ comme le schéma simplicial ayant pour sommets l'ensemble $S \amalg U$ et pour simplexes les parties de la forme $\sigma \amalg \tau$ où $\sigma \in A$, $\tau \in B$.

Comme σ et τ peuvent être vides, il est immédiat de vérifier que l'on définit ainsi un schéma simplicial. Si K et L désignent la réalisation géométrique de A resp. B, bien sûr la réalisation géométrique de $A * B$ est homéomorphe naturellement au joint $K * L$. Enfin si A et B sont munis d'une involution simpliciale μ_A resp. μ_B, on définit une involution μ sur $A * B$ par la formule $\mu(s) = \mu_A(s)$ pour $s \in S$ et $\mu(t) = \mu_B(t)$ pour $t \in U$.

LEMME. *Soient K et L deux complexes simpliciaux compacts. Alors, $T(c(K * L))$ est homéomorphe de façon équivariante à $T(cK) * T(cL)$.*

Preuve. D'après le lemme précédent, $T(c(K*L))$ a pour simplexes les joints ordonnés $\sigma*\tau$ où σ et τ sont des simplexes de $K*L$, disjoints.

Mais, par définition, σ est le joint $\sigma_1*\sigma_2$, σ_1 étant un simplexe de K, σ_2 un simplexe de L. De même, $\tau=\tau_1*\tau_2$.

De plus, $\sigma*\tau=(\sigma_1*\sigma_2)*(\tau_1*\tau_2)$ est homéomorphe à $(\sigma_1*\tau_1)*(\sigma_2*\tau_2)$.

Enfin, $\sigma\cap\tau=\emptyset$ si et seulement si $\sigma_1\cap\tau_1=\emptyset$ et $\sigma_2\cap\tau_2=\emptyset$.

On définit donc un homéomorphisme simplicial

$$\varphi: T(cK)*T(cL)\to T(c(K*L))$$

en envoyant

$$(\sigma_1*\tau_1)*(\sigma_2*\tau_2) \quad \text{sur} \quad (\sigma_1*\sigma_2)*(\tau_1*\tau_2).$$

φ commute aux involutions. En effet, avec quelques abus de notations on a:

$$\begin{aligned}
&\varphi\mu((\sigma_1*\tau_1)*(\sigma_2*\tau_2))=\varphi(\mu(\sigma_1*\tau_1)*\mu(\sigma_2*\tau_2))\\
&=\varphi((\tau_1*\sigma_1)*(\tau_2*\sigma_2)) \;=(\tau_1*\tau_2)*(\sigma_1*\sigma_2)\\
&=\mu((\sigma_1*\sigma_2)*(\tau_1*\tau_2)) \;=\mu\varphi((\sigma_1*\tau_1)*(\sigma_2*\tau_2))
\end{aligned}$$

THÉORÈME (Flores). *Soit F^n le n-squelette du simplexe de dimension* $(2n+2)$. *Alors, $T(cF^n)$ est homéomorphe de façon équivariante à la sphère S^{2n+1}, équipée de l involution antipode.*

Avant de démontrer ce théorème, nous rappelons quelques propriétés des subdivisions duales dans un complexe simplicial.

Comme auparavant, soit A un schéma simplicial (fini) augmenté, d'ensemble de sommets S. La première subdivision barycentrique de A, notée $B(A)$, a pour sommets l'ensemble $A-\{\emptyset\}$. Les éléments de A étant des parties de S, $A-\{\emptyset\}$ est ordonné par inclusion. Par définition, une partie de $A-\{\emptyset\}$ est un simplexe de $B(A)$ si et seulement si l'ordre induit sur cette partie est un ordre total.

Si K est la réalisation géométrique de A, on obtient un isomorphisme simplicial de la réalisation géométrique de $B(A)$ sur la première subdivision barycentrique de K en envoyant $\sigma\in A-\{\emptyset\}$ sur le barycentre du simplexe σ.

Soit maintenant $r\geqslant 0$ un entier. Désignons par $(A^r)^d$ le plus grand sous-schéma de $B(A)$ dont les sommets sont les éléments de A qui, comme partie de S ont un cardinal plus grand ou égal à $r+2$. (Géométriquement: dont les sommets sont les barycentres des simplexes de K de dimension plus grande ou égale à $r+1$).

«Concrètement» on voit que les simplexes de $(A^r)^d$ sont soit la partie vide, soit les parties totalement ordonnées par inclusion d'éléments de $A-\{\emptyset\}$ dont l'élément minimal est de cardinal plus grand ou égal à $r+2$.

Soit A^r le r-squelette de A. De façon analogue $B(A^r)$ a pour simplexes soit la partie vide, soit les parties totalement ordonnées par inclusion de $A-\{\emptyset\}$ dont l'élément maximal est de cardinal plus petit ou égal à $r+1$.

Soit maintenant $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_p)$ un p-simplexe de $B(A)$. Par définition $\sigma_i \in A - \{\emptyset\}$ et $\sigma_{i-1} \subset \sigma_i$ pour $i = 1, \ldots, p$. En partageant l'ensemble des sommets du simplexe en deux parties suivant que la dimension de σ_i est plus petite ou égale à r ou supérieure à r, on voit que ce simplexe de $B(A)$ est le joint d'un simplexe bien défini de $B(A^r)$ et d'un simplexe bien défini de $(A^r)^d$, l'un ou l'autre pouvant d'ailleurs être vide.

Plus précisément, on voit que $B(A)$ est le sous-complexe $B(A^r) \circ (A^r)^d$ du joint $B(A^r) * (A^r)^d$ constitué des joints d'un simplexe σ de $B(A^r)$ et d'un simplexe τ de $(A^r)^d$ (l'un ou l'autre pouvant être vide) satisfaisant la condition que l'élément maximal de σ soit plus petit que l'élément minimal de τ. C'est en ce sens que l'on dit parfois que $B(A^r)$ et $(A^r)^d$ sont deux sous-complexes «duaux» de $B(A)$.

Nous aurons besoin dans la démonstration du théorème de Florès d'une description simpliciale de l'involution antipode sur la sphère.

Soit Δ^q le schéma simplicial augmenté dont la réalisation géométrique est le simplexe de dimension q. L'ensemble des sommets de Δ^q est constitué de $q+1$ points: $\{P_0, \ldots P_q\}$ et toute partie de cet ensemble est un simplexe de Δ^q.

Le «bord» de Δ^q, noté $\dot{\Delta}^q$, dont la réalisation géométrique sera notre modèle pour la sphère S^{q-1}, a même ensemble de sommets que Δ^q et pour simplexes toutes les parties de cardinal plus petit ou égal à q.

Les sommets de $B(\dot{\Delta}^q)$ sont donc toutes les parties de $\{P_0, \ldots, P_q\}$ qui sont non-vides et non maximales. Soit $a: B(\dot{\Delta}^q) \to B(\dot{\Delta}^q)$ l'application simpliciale qui envoie chaque sommet sur le sommet constitué par la partie complémentaire. On vérifie facilement que a est bien simpliciale et que la réalisation géométrique de a est l'application antipode de la sphère.

Preuve du théorème de Flores. Commençons par subdiviser le schéma simplicial $J(A)$ de la façon suivante:

Soit $B(A)$ la première subdivision barycentrique de A. Soient A' et A'' deux copies disjointes de l'ensemble $A - \{\emptyset\}$ des sommets de $B(A)$. Envisageons l'ensemble de sommets $A' \cup A''$ et décidons de prendre pour simplexes les parties $\alpha' \cup \beta''$ où α et β sont des simplexes de $B(A)$ tels que l'élément maximal de α soit disjoint de l'élément maximal de β (en tant que parties de S).

On vérifie facilement que l'on obtient ainsi un schéma simplicial $L(A)$, muni d'une involution analogue à celle de $J(A)$.

Enfin, il y a un homéomorphisme équivariant évident de la réalisation géométrique de $L(A)$ sur celle de $J(A)$. Intuitivement la réalisation géométrique de $L(A)$ est obtenue à partir de celle de $J(A)$ en subdivisant un simplexe type $\sigma * \tau$ en $B(\sigma) * B(\tau)$.

Δ^{2n+2} a pour sommets $\{P_0, \ldots, P_{2n+2}\}$ et pour simplexes toutes les parties distinctes de la partie maximale. F^n a même ensemble de sommets et pour simplexes toutes les parties de cardinal plus petit ou égal à $n+1$. Dans la suite, nous le considérerons comme le n-squelette de $\dot{\Delta}^{2n+2}$ et non de Δ^{2n+2}.

Pour montrer que la réalisation géométrique de $J(F^n)$ est homéomorphe de façon équivariante à S^{2n+1}, il suffit, d'après ce qui précède, de montrer que $L(F^n)$ est simplicialement isomorphe à $B(\dot{\Delta}^{2n+2})$ munie de l'involution a, ceci de façon équivariante.

Or les sommets de $B(F^n)$ sont les parties non-vides et de cardinal plus petit ou égal à $n+1$ de l'ensemble $\{P_0, \ldots, P_{n+2}\}$. Un simplexe type de $L(F^n)$ a pour sommets:

$$\{B_0', \ldots, B_p', C_0'', \ldots, C_q''\}$$

où $B_0, \ldots, B_p, C_0, \ldots, C_q$ sont des parties non-vides et de cardinal plus petit ou égal à $n+1$ de l'ensemble $\{P_0, \ldots, P_{2n+2}\}$ telles que:

$$B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_p, \quad C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_q,$$

toutes les inclusions étant strictes, et $B_p \cap C_q = \emptyset$. Les B ou les C peuvent être absents. Dans ce cas on fait la convention que p ou q est égal à -1.

Envoyons ce simplexe sur le simplexe de $B(\dot{\Delta}^{2n+2})$ de sommets:

$$\{B_0, B_1, \ldots, B_p, aC_q, aC_{q-1}, \ldots, aC_0\}.$$

Ce dernier est bien un simplexe de $B(\dot{\Delta}^{2n+2})$ car: $B_p \cap C_q = \emptyset$ entraîne $B_p \subset aC_q$ et comme le cardinal de C_q est plus petit ou égal à $n+1$, celui de aC_q est plus grand ou égal à $n+2$ et donc l'inclusion est stricte.

Ceci montre aussi que:

$\{B_0, \ldots, B_p\}$ est un simplexe de $B(F^n)$;

$\{aC_q, aC_{q-1}, \ldots, aC_0\}$ est un simplexe de $(F^n)^d$;

$\{B_0, \ldots, B_p, aC_q, \ldots, aC_0\}$ est un simplexe de $B(F^n) \circ (F^n)^d = B(\dot{\Delta}^{2n+2})$.

Il est maintenant très facile de vérifier que l'on définit ainsi une application simpliciale: $L(F^n) \to B(F^n) \circ (F^n)^d = B(\dot{\Delta}^{2n+2})$ et, en faisant «machine arrière», de vérifier que c'est un isomorphisme.

Le fait que cet isomorphisme commute aux involutions est évident.

DÉFINITION. Nous appelerons le complexe F^p le complexe de Flores-van Kampen de dimension p.

Plus généralement, soit G^p un complexe de dimension p qui soit joint (itéré) de complexes de Flores-van Kampen:

$$G^p = F^{k_1 - 1} * F^{k_2 - 1} * \cdots * F^{k_s - 1} \quad \text{avec} \quad \sum k_i = p+1.$$

D'après les lemmes et le théorème précédents, $T(cG^p)$ est homéomorphe de façon équivariante à: $S^{2k_1 - 1} * \cdots * S^{2k_s - 1} = S^{2p+1}$ munie de l'involution antipode.

THÉORÈME. *Soit $X^n = cG^{n-1}$ le cône sur G^{n-1}. Alors X^n ne peut être quasi plongé dans $\mathbf{R}^{2n-1}$.*

Preuve. Pour ε assez petit, une ε-application de X dans $\mathbf{R}^{2n-1}$ fournirait (voir §2) une application équivariante de $T(X) = S^{2n-1}$ dans S^{2n-2}, ce qui est impossible en vertu du théorème de Borsuk-Ulam. (cf. Spanier: «Algebraic Topology»; chap. 5, sec. 8, cor. 8.).

On voit donc qu'il y a des complexes contractibles (même collapsibles) de dimension n qui ne peuvent être quasiplongés dans $\mathbf{R}^{2n-1}$.

COROLLAIRE. *G^n ne peut être quasi plongé dans* $\mathbf{R}^{2n}$.

Preuve. Le cône sur une ε-application de G^n dans $\mathbf{R}^{2n}$ est une ε-application de cG^n dans $\mathbf{R}^{2n+1}$.

Remarques. 1) Bien sûr, G^n peut être plongé dans $\mathbf{R}^{2n+1}$ et cG^{n-1} peut être plongé dans $\mathbf{R}^{2n}$.

2) F^0 est le complexe de dimension zéro ayant trois sommets. Pour $n=1$, il y a deux complexes tels que $G^1 : F^1$ et $F^0 * F^0$. Ce sont les célèbres graphes de Kuratowski.

3) Le lecteur peut se distraire de l'ennui distillé par ce paragraphe en appliquant les démonstrations à cF^0 et en faisant des dessins dans ce cas particulier.

4. Classes de Stiefel-Whitney

DÉFINITION. On appellera variété mod2 de dimension n un polyèdre compact X tel que, pour tout $x \in X$:

$$H^i(X \operatorname{mod} X - \{x\}) \approx H^i(\mathbf{R}^n \operatorname{mod} \mathbf{R}^n - \{0\})$$

pour tout i, la cohomologie étant à coefficients $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Soit X une variété mod 2, compacte, connexe, de dimension n. On démontre classiquement qu'il existe un voisinage E, équivariant de Δ_X dans $X \times X$, une projection $\pi : \mathrm{E} \to \Delta_X$ et une classe $V \in H^n(E \operatorname{mod} E - \Delta_X)$ telle que $\varphi(x) = \pi^*(x) \cup V$ soit un isomorphisme $\varphi : H^i(X) \to H^{i+n}(E \operatorname{mod} E - \Delta_X)$ pour tout i.

On définit alors les classes $W_i \in H^i(X)$ de Stiefel-Whitney de X par la formule de Thom [8]:

$$W_i = \varphi^{-1} \operatorname{Sq}^i \varphi(1) \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Comme on a $W_0 = 1$, on définit les classes de Stiefel-Whitney normales de X par la formule de Whitney:

$$W \cup \bar{W} = 1 \quad \text{où} \quad W = 1 + W_1 + \cdots + W_n \qquad \bar{W} = 1 + \bar{W}_1 + \cdots + \bar{W}_n.$$

Bien sûr, X satisfait une dualité de Poincaré mod2; le cup-produit: $H^i(X) \times \times H^{n-i}(X) \to H^n(X) \approx \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est, pour tout i, une application bilinéaire non-dégénérée. On définit la classe de Wu: $U_i \in H^i(X)$ par l'égalité:

$$x \cdot U_i = \operatorname{Sq}^i(x) \qquad \forall x \in H^{n-i}(X) \quad \text{et l'on pose } U = 1 + U_1 + \cdots.$$

On démontre alors [6] que les classes de Stiefel-Whitney satisfont la formule de Wu: $W = \operatorname{Sq} U$.

Soient maintenant X^*, resp. $R(X)$ les quotients de $\tilde{X}$ resp. $T(X)$ par l'involution μ. $R(X)$ est un rétracte par déformation de X^*. Soit $z \in H^1(R(X))$ la classe caractéristique du revêtement à deux feuillets $T(X) \to R(X)$.

Soit $F: T(X) \to S^{m-1}$ une application équivariante et soit $\bar{F}: R(X) \to RP^{m-1}$ l'application induite sur les quotients. Si l'on désigne par $\omega \in H^1(RP^{m-1})$ la classe caractéristique du revêtement $S^{m-1} \to RP^{m-1}$, on remarque que: dire que $\bar{F}$ est obtenue par passage aux quotients d'une applicaton équivariante signifie que $\bar{F}^*(\omega) = z$.

Comme $\omega^m = 0$, on voit qu'une condition nécessaire à l'existence d'une application équivariante $T(X) \to S^{m-1}$ est $z^m = 0$. (En fait z^m est la réduction mod 2 de la première obstruction à contruire une application équivariante $T(X) \to S^{m-1}$.)

Le théorème suivant est dû à Wu [11]. Pour une démonstration valable pour les variétés mod 2, on peut consulter [4], qui n'utilise essentiellement que les formules de Thom et Wu.

THÉORÈME. *$z^m = 0$ si et seulement si $\bar{W}^i = 0$ pour $i \geqslant m - n$.*

COROLLAIRE. *Soit X une variété* mod 2 *compacte. Alors, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que l'existence d'une ε-application de X dans R^m implique $\bar{W}^i = 0$ pour $i \geqslant m - n$.*

Comme conséquence de ce corollaire, on voit que l'on obtient des théorèmes de non-existence de quasiplongements pour les variétés mod 2 dans $\mathbf{R}^m$ tout-à-fait analogues aux théorèmes de non-existence de plongements de variétés differentiables qui utilisent les classes de Stiefel-Whitney. Par exemple:

PROPOSITION. *Soit P une variété* mod 2, *de dimension $n = 2^d$, ayant le même anneau de cohomologie* mod 2 *que RP^n. Alors P ne peut être quasi-plongé dans $\mathbf{R}^{2n-1}$.*

Preuve. D'après le lemme 1 de [12], dont la démonstration n'utilise que la formule de Wu, on a: $\bar{W}^{n-1} \neq 0$ si et seulement si $Q^{n-1}(x) \neq 0$ pour au moins un $x \in H^1(P)$.

Q^i est défini par la formule bien connue $Q \cdot \mathrm{Sq} = 1$. (voir [13] p. 32).

En vertu du lemme 1.6 p. 34 de [13], lorsque $n = 2^d$ on a $Q^{n-1}(x) = x^n$. Notre hypothèse sur P implique que $x^n \neq 0$ lorsque $x \neq 0$, ce qui achève la démonstration.

Remarque. Voici un procédé simple pour obtenir des variétés satisfaisant les hypothèses de la proposition:

Soit $n = 2^d$ et soit p un nombre impair. Choisissons une des nombreuses actions libres de $\mathbf{Z}/2p$ sur S^{n-1} et désignons par M l'espace des orbites. M a même anneau de cohomologie mod 2 que RP^{n-1}. Désignons par $\hat{M}$ le quotient de S^{n-1} par l'action du sous-groupe $\mathbf{Z}/p$. $\hat{M} \to M$ est un revêtement à deux feuilles et $\hat{M}$ est une sphère d'homologie mod 2.

Il n'est pas difficile de voir que la Thomification du fibré en droites associé à ce revêtement à deux feuilles est une variété mod 2 ayant même anneau de cohomologie mod 2 que RP^n.

Rappelons qu'un théorème de Whitney affirme que toute variété différentiable de dimension n se plonge dans $\mathbf{R}^{2n}$. On peut montrer que ce résultat est aussi vrai pour les variétés mod 2.

PROPOSITION. *Soit X une surface sans bord, compacte, non-orientable. Alors X ne peut être quasi-plongée dans* $\mathbf{R}^3$.

Preuve. Pour une telle surface $\bar{W}^1 \neq 0$.

Soit maintenant Y^m une variété mod 2 compacte (connexe) de dimension m et soit W' sa classe de Stiefel-Whitney «totale». On définit les classes de Stiefel-Whitney W_i^f d'une application $f: X \to Y$ par la formule: $W^f = \bar{W} \cup f^*(W')$. En utilisant les résultats de Haefliger [4] § 5, on peut démontrer la.

PROPOSITION. *Soient X^n et Y^m deux variétés* mod 2. *Soit $f: X \to Y$. Alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que l'existence d'une ε-application $g: X \to Y$ homotope à f entraîne $W_i^f = 0$ pour $i > m - n$.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] Borsuk, K., *Remarques sur la quasi-homéomorphie*, Colloquium Mathematicum *6* (1958) 1–4.

[2] Flores: *Ueber n-dimensionalen Komplexe die im R_{2n+1} absolut selbstverschlungen sind*, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquium *6* (1933–34) 4–7.

[3] Ganea, T., *Comments on the embedding of polyhedra in a euclidean space*, Bull. Pol. Acad. Sc. *7* (1959) 27–32.

[4] Haefliger, A., *Points multiples d'une application et produit cyclique réduit*, Amer. J. Math. *83* (1961) 57–70.

[5] Hurewicz W., et Wallmann, H., *Dimension Theory*, Princeton University Press (1948).

[6] Milnor, J., *Lectures on characteristic classes*, Mimeographed Notes.

[7] Shapiro, A., *Obstruction to the embedding of a complex in a euclidean space.* 1): *The first obstruction*, Ann. of Math. *66* (1957) 256–269.

[8] Thom, R., *Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod*, Ann. Sc. Ecole Normale Supérieure *69* (1952) 109–181.

[9] Weber, C., *Plongements de polyèdres dans le domaine métastable*, Comment. Math. Helv. *42* (1967) 1–27.

[10] ——, *Deux remarques sur les plongements d'un AR dans un espace euclidien*, Bull. Acad. Pol. Sc. *16* (1968) 851–855.

[11] Wu, W. T., *On the realisation of complexes in Euclidean spaces*, Scientia Sinica Vol. *7*, No. 3 (1958) 251–297. Vol. *7* No. 4 (1958) 365–387, Vol. *8* No. 2 (1959) 133–150.

[12] Massey W. S. et Peterson F. P., *On the dual Stiefel-Whitney classes of a manifold*, Bol. Soc. Mat. Mex. (1963) 1–13.

[13] Epstein D. et Steenrod, N., *Cohomology Operations*, Annals of Math. Studies No. 50.

Institut de Mathématiques,
2–4, rue du Lièvre,
Case Postale 124,
1211 Genève 24

Reçu le 28 septembre 1973