

Über den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen

Autor(en): **Huber, Heinz**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **49 (1974)**

PDF erstellt am: **18.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-37993>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Über den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen

HEINZ HUBER (Basel)

1. Einleitung

1.1. Es sei M_g die Menge der kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht $g \geq 2$. Auf jeder Fläche $\mathcal{F} \in M_g$ gibt es genau eine Riemannsche Metrik mit konstanter Krümmung -1 , welche mit der konformen Struktur von \mathcal{F} verträglich ist. Es sei $\Delta_{\mathcal{F}}$ der Laplace-Beltrami-Operator bezüglich dieser Metrik und $\lambda_1(\mathcal{F})$ der kleinste positive Eigenwert von $\Delta_{\mathcal{F}}$. (Das Spektrum von $\Delta_{\mathcal{F}}$ ist diskret; $\lambda_0 = 0$ ist ein einfacher Eigenwert, alle übrigen Eigenwerte sind positiv [1]). In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden:

$$(A) \Lambda_1(g) = \sup \{ \lambda_1(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \in M_g \} < \infty.$$

$$(B) \overline{\lim}_{g \rightarrow \infty} \Lambda_1(g) \leq \frac{1}{4}.$$

1.2. Wir führen jetzt den Beweis von A und B auf zwei Hilfssätze zurück.

Die Differentialgleichung

$$(x^2 - 1) F''(x) + 2xF'(x) + \mu F(x) = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

besitzt genau eine Lösung

$$F_{\mu} \in C^2[1, \infty), \quad F_{\mu}(1) = 1. \quad (2)$$

Für $\mu > \frac{1}{4}$ besitzt F_{μ} Nullstellen in $[1, \infty)$. (Siehe 3.1). Es sei $a(\mu) > 1$ die kleinste dieser Nullstellen und

$$q(\mu) = \left(\int_1^{a(\mu)} F_{\mu} dx \right)^2 \bigg/ \int_1^{a(\mu)} F_{\mu}^2 dx. \quad (3)$$

Wir werden zeigen:

LEMMA 1. Für $\mu > \frac{1}{4}$, $\mathcal{F} \in M_g$, $g \geq 2$ gilt:

$$\mu \geq \lambda_1(\mathcal{F}) \left(1 - \frac{q(\mu)}{2(g-1)} \right).$$

LEMMA 2. Für $\mu > 2$ gilt: $q(\mu) \leq 6\mu/(\mu-2)^2$.

Wegen Lemma 2 gibt es eine Zahl $\mu_0 > 2$ derart, dass

$$1 - \frac{q(\mu_0)}{2(g-1)} \geq \frac{1}{2} \quad \forall g \geq 2.$$

Dann folgt aber aus Lemma 1:

$$\lambda_1(\mathcal{F}) \leq 2\mu_0 \quad \forall \mathcal{F} \in M_g, \quad g \geq 2.$$

Damit ist A bewiesen. Wegen

$$1 - \frac{q(\mu)}{2(g-1)} > 0 \quad \forall g > 1 + \frac{q(\mu)}{2}, \quad \mu > \frac{1}{2}$$

folgt aus Lemma 1:

$$A_1(g) \leq \frac{\mu}{1 - \frac{q(\mu)}{2(g-1)}} \quad \forall g > 1 + \frac{q(\mu)}{2}, \quad \mu > \frac{1}{2}.$$

Daraus ergibt sich: $\overline{\lim}_{g \rightarrow \infty} A_1(g) \leq \frac{1}{2}$.

2. Beweis von Lemma 1

2.1. Wir betrachten ein festes $\mu > \frac{1}{2}$, schreiben F, a für $F_\mu, a(\mu)$ und definieren:

$$f = \begin{cases} F^{1+\varepsilon} & \text{in } [1, a] \\ 0 & \text{in } [a, \infty), \end{cases} \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (4)$$

Dann gilt:

$$f \in C^1[1, \infty), \quad (5)$$

f'' ist stetig in $[1, \infty)$ mit Ausnahme von a . An dieser Stelle ist aber $f''(x) = O(|x-a|^{-(1-\varepsilon)})$ und somit gilt:

$$f'' \in \mathcal{L}^1[1, \infty). \quad (6)$$

Daher kann man mit dem Glättungsverfahren von Friedrichs eine Folge $\{f_n\}_{n \geq 1}$ mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

$$f_n \in C^\infty[1, \infty), \quad f_n = 0 \quad \text{in } [2a, \infty), \quad (7)$$

$$f_n \rightarrow f, f'_n \rightarrow f' \quad \text{gleichmässig in } [1, \infty), \quad (8)$$

$$\int_1^\infty |f''_n - f''| dx \rightarrow 0. \quad (9)$$

Definieren wir

$$L = (x^2 - 1) \frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx}, \quad (10)$$

so gilt:

$$L(f) \in \mathcal{L}^1[1, \infty), \quad (11)$$

$$\int_1^{\infty} |L(f_n) - L(f)| dx \rightarrow 0. \quad (12)$$

Aus (4) und der Differentialgleichung (1) ergibt sich leicht:

$$L(f) + (1 + \varepsilon) \mu f \geq 0 \quad \text{in } [1, \infty). \quad (13)$$

2.2. Mit Hilfe von f, f_n definieren wir gewisse Funktionen in der hyperbolischen Ebene. Als Modell dieser Ebene wählen wir den Einheitskreis

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

versehen mit der Riemannschen Metrik

$$ds^2 = 4 \frac{|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2},$$

welche die Krümmung -1 besitzt. Für die hyperbolische Distanz $\varrho(0, z)$ ergibt sich dann:

$$\text{Cos } \varrho(0, z) = \frac{1 + |z|^2}{1 - |z|^2}. \quad (14)$$

Führen wir im Nullpunkt geodätische Polarkoordinaten

$$\varrho = \varrho(0, z), \quad \psi = \arg z$$

ein, so wird

$$ds^2 = d\varrho^2 + \text{Sin}^2 \varrho d\psi^2.$$

Daher erhält man für das Flächenelement und den Laplace-Beltrami-Operator:

$$d\omega = \text{Sin } \varrho d\varrho d\psi \quad (15)$$

$$-\Delta = \frac{1}{\text{Sin } \varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\text{Sin } \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\text{Sin}^2 \varrho} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}. \quad (16)$$

Jetzt definieren wir

$$\mathfrak{F}(z) = f(\text{Cos } \varrho(0, z)), \quad \mathfrak{F}_n(z) = f_n(\text{Cos } \varrho(0, z)). \quad (17)$$

Da $\text{Cos } \varrho$ wegen (14) eine C^∞ -Funktion auf H ist, so folgt jetzt aus den in 2.1 aufgezählten Eigenschaften von f, f_n und aus (15), (16):

$$\vartheta \in C_0^1(H), \quad \vartheta \in C^2(H-\gamma), \quad \gamma = \left\{ z \mid |z| = \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^{1/2} \right\}, \quad (18)$$

$$\Delta \vartheta = -(Lf)(\text{Cos } \varrho) \in \mathcal{L}^1(H), \quad (19)$$

$$\Delta \vartheta \leq (1+\varepsilon) \mu \vartheta \quad \text{in } H-\gamma, \quad (20)$$

$$\vartheta_n \in C_0^\infty(H), \quad (21)$$

$$\vartheta_n \rightarrow \vartheta \quad \text{gleichmässig auf } H, \quad (22)$$

$$\int_H |\Delta \vartheta_n - \Delta \vartheta| d\omega \rightarrow 0, \quad (23)$$

$$\int_H \vartheta d\omega = 2\pi \int_1^a F^{1+\varepsilon} dx. \quad (24)$$

2.3. Es sei jetzt $\mathcal{F} \in M_g, g \geq 2$. Dann wird H zur universellen Ueberlagerungsfläche von \mathcal{F} durch eine konforme Projektion $\Pi: H \rightarrow \mathcal{F}$. Mit dieser Projektion können wir die Differentialgeometrie von H auf \mathcal{F} verpflanzen. Der Einfachheit halber bezeichnen wir den Laplace-Operator und das Flächenelement auf \mathcal{F} wieder mit Δ und $d\omega$. Die zur Projektion Π gehörige Deckgruppe Γ hat folgende Eigenschaften:

(I) Die Elemente $T \in \Gamma$ sind Isometrien von H . Verstehen wir unter $T\vartheta$ die Funktion $z \rightarrow \vartheta(T(z))$, so gilt daher

$$\Delta T = T\Delta \quad \forall T \in \Gamma.$$

(II) Γ wirkt stark diskontinuierlich auf H : Sind K_1, K_2 Kompakta in H , so ist die Menge

$$\{T \in \Gamma \mid T(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset\}$$

endlich.

(III) Γ besitzt einen kompakten Fundamentalbereich $A \subset H$, und es gilt:

$$\int_A d\omega = \int_{\mathcal{F}} d\omega = 4\pi(g-1). \quad (25)$$

Da ϑ, ϑ_n kompakten Support in H besitzen, können wir nun wegen (II) definieren:

$$\Theta = \sum_{T \in \Gamma} T\vartheta, \quad \Theta_n = \sum_{T \in \Gamma} T\vartheta_n. \quad (26)$$

Diese Funktionen sind offensichtlich automorph bezüglich der Deckgruppe Γ . Daher gibt es auf \mathcal{F} eindeutige Funktionen φ, φ_n derart, dass

$$\varphi \circ \Pi = \Theta, \quad \varphi_n \circ \Pi = \Theta_n. \tag{27}$$

Aus (27), (26) und (18)–(23) ergibt sich nun:

$$\varphi \in C^1(\mathcal{F}), \quad \varphi \in C^2(\mathcal{F} - \Pi(\gamma)), \tag{28}$$

($\Pi(\gamma)$ ist eine geschlossene Kurve auf \mathcal{F} , welche endlich viele mehrfache Punkte besitzen kann),

$$\Delta\varphi \leq (1 + \varepsilon) \mu\varphi \quad \text{auf } \mathcal{F} - \Pi(\gamma), \tag{29}$$

$$\Delta\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathcal{F}), \tag{30}$$

$$\varphi_n \in C^\infty(\mathcal{F}), \tag{31}$$

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \quad \text{gleichmässig auf } \mathcal{F} \tag{32}$$

$$\int_{\mathcal{F}} |\Delta\varphi_n - \Delta\varphi| d\omega \rightarrow 0. \tag{33}$$

Das beruht alles, wie leicht einzusehen, auf den Eigenschaften (I)–(III) von Γ und auf der Tatsache, dass ϑ, ϑ_n kompakten Support in H besitzen. Aus (32), (33) ergibt sich noch

$$\int_{\mathcal{F}} \varphi_n \Delta\varphi_n d\omega \rightarrow \int_{\mathcal{F}} \varphi \Delta\varphi d\omega, \tag{34}$$

denn:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{F}} \varphi_n \Delta\varphi_n d\omega - \int_{\mathcal{F}} \varphi \Delta\varphi d\omega \right| &= \left| \int_{\mathcal{F}} \varphi_n (\Delta\varphi_n - \Delta\varphi) d\omega + \int_{\mathcal{F}} \Delta\varphi (\varphi_n - \varphi) d\omega \right| \\ &\leq \|\Delta\varphi_n - \Delta\varphi\|_1 \cdot \sup_{\mathcal{F}} |\varphi_n| + \|\Delta\varphi\|_1 \cdot \sup_{\mathcal{F}} |\varphi_n - \varphi|. \end{aligned}$$

2.4. Für den Beweis von Lemma 1 ist es von grosser Bedeutung, dass man die Integrale über \mathcal{F} von φ und φ^2 recht explizit berechnen bzw. abschätzen kann:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} \varphi d\omega &= \int_A \Theta d\omega = \sum_{T \in \Gamma} \int_A T\vartheta d\omega \\ &= \sum_{T \in \Gamma} \int_{T(A)} \vartheta d\omega = \int_H \vartheta d\omega. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir wegen (24)

$$\int_{\mathcal{F}} \varphi \, d\omega = 2\pi \int_1^a F^{1+\varepsilon} \, dx \quad (35)$$

Es wird im folgenden sehr wichtig sein, dass der Wert dieses Integrals unabhängig ist von der Wahl der Fläche $\mathcal{F} \in M_g$. Das Integral von φ^2 ist dagegen von \mathcal{F} abhängig; man kann aber eine von \mathcal{F} unabhängige untere Schranke angeben: Wegen $\vartheta \geq 0$ gilt nämlich

$$\Theta^2 = \left(\sum_{T \in \Gamma} T\vartheta \right)^2 = \sum_{S, T \in \Gamma} (S\vartheta)(T\vartheta) \geq \sum_{T \in \Gamma} T\vartheta^2.$$

Daraus folgt nun wie oben:

$$\int_{\mathcal{F}} \varphi^2 \, d\omega \geq 2\pi \int_1^a F^{2(1+\varepsilon)} \, dx. \quad (36)$$

2.5. Der Eigenwert $\lambda_1(\mathcal{F})$ kann bekanntlich durch eine Extremaleigenschaft charakterisiert werden (siehe z.B. [1]):

$$\int_{\mathcal{F}} \psi \Delta \psi \, d\omega \geq \lambda_1(\mathcal{F}) \int_{\mathcal{F}} \psi^2 \, d\omega \quad (37)$$

$$\forall \psi \in C^\infty(\mathcal{F}), \quad \int_{\mathcal{F}} \psi \, d\omega = 0 \quad (38)$$

Wegen (31) und (25) erfüllt

$$\psi = \varphi_n - \alpha_n, \quad \alpha_n = \frac{1}{4\pi(g-1)} \int_{\mathcal{F}} \varphi_n \, d\omega$$

die Voraussetzungen (38). Somit folgt aus (37) wegen $\int_{\mathcal{F}} \Delta \varphi_n \, d\omega = 0$:

$$\int_{\mathcal{F}} \varphi_n \Delta \varphi_n \, d\omega \geq \lambda_1(\mathcal{F}) \left(\int_{\mathcal{F}} \varphi_n^2 \, d\omega - \frac{1}{4\pi(g-1)} \left(\int_{\mathcal{F}} \varphi_n \, d\omega \right)^2 \right).$$

Für $n \rightarrow \infty$ folgt daraus wegen (32) und (34):

$$\int_{\mathcal{F}} \varphi \Delta \varphi \, d\omega \geq \lambda_1(\mathcal{F}) \left(\int_{\mathcal{F}} \varphi^2 \, d\omega - \frac{1}{4\pi(g-1)} \left(\int_{\mathcal{F}} \varphi \, d\omega \right)^2 \right). \quad (39)$$

Wegen $\varphi \geq 0$ und (29) gilt aber

$$(1 + \varepsilon) \mu \int_{\mathcal{F}} \varphi^2 d\omega \geq \int_{\mathcal{F}} \varphi \Delta \varphi d\omega.$$

Somit folgt aus (39):

$$(1 + \varepsilon) \mu \geq \lambda_1(\mathcal{F}) \left[1 - \frac{1}{4\pi(g-1)} \frac{\left(\int_{\mathcal{F}} \varphi d\omega \right)^2}{\int_{\mathcal{F}} \varphi^2 d\omega} \right]$$

Daraus und aus (35), (36) ergibt sich:

$$(1 + \varepsilon) \mu \geq \lambda_1(\mathcal{F}) \left[1 - \frac{1}{2(g-1)} \frac{\left(\int_1^a F^{1+\varepsilon} dx \right)^2}{\int_1^a F^{2(1+\varepsilon)} dx} \right].$$

Jetzt können wir noch ε gegen 0 gehen lassen und haben damit Lemma 1 bewiesen.

3. Beweis von Lemma 2

3.1. F_μ ist eine Legendresche Funktion erster Art. Man sieht das sofort, wenn man die Differentialgleichung (1) in der Legendreschen Normalform schreibt:

$$(1-x^2)F'' - 2xF' + \nu(\nu+1)F = 0$$

$$\nu = -\frac{1}{2} + i\kappa, \quad \kappa = (\mu - \frac{1}{4})^{1/2} > 0 \quad \text{für } \mu > \frac{1}{4}.$$

Die einzige Lösung $F \in C^2[1, \infty)$ mit $F(1) = 1$ ist bekanntlich die Legendresche Funktion erster Art P_ν :

$$F_\mu = P_\nu. \tag{40}$$

Aus der Darstellung (38) in [2] pag. 208 ergibt sich leicht:

$$F_\mu(x) = cx^{-1/2} (\cos(\kappa \log(2x) + \alpha) + O(x^{-2})), \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$c = \left(2 \frac{Tg \pi \kappa}{\pi \kappa} \right)^{1/2}, \quad \alpha = \arg \frac{\Gamma(i\kappa)}{\Gamma(\frac{1}{2} + i\kappa)}, \quad \mu > \frac{1}{4}.$$

Daraus folgt, dass F_μ für $\mu > \frac{1}{4}$ Nullstellen in $[1, \infty)$ besitzt. (Aus der Integraldarstellung (122) in [2] pag. 272 ergibt sich, dass F_μ für $0 < \mu \leq \frac{1}{4}$ keine Nullstellen in $[1, \infty)$ besitzt).

3.2. Wir betrachten nun ein festes $\mu > \frac{1}{4}$ und schreiben wieder F, a für $F_\mu, a(\mu)$. Wir haben dann

$$F(1)=1, \quad F(a)=0, \quad F>0 \quad \text{in} \quad [1, a), \quad a>1. \quad (41)$$

Aus der Differentialgleichung (1) berechnet man sofort:

$$F'(1) = -\frac{\mu}{2} \quad (42)$$

$$F''(1) = \frac{1}{8}\mu(\mu+2) \quad (43)$$

$$F''(a) = -\frac{2a}{a^2-1} F'(a). \quad (44)$$

Aus (1) und (41) folgt

$$\frac{d}{dx}(x^2-1)F' < 0 \quad \text{in} \quad (1, a)$$

und daher

$$(x^2-1)F' < 0 \quad \text{in} \quad (1, a].$$

Daraus ergibt sich wegen (42):

$$F' < 0 \quad \text{in} \quad [1, a]. \quad (45)$$

3.3. Wir zeigen jetzt:

$$F'' \geq 0 \quad \text{in} \quad [1, a]. \quad (46)$$

Zunächst folgt aus (43)–(45):

$$F''(1) > 0, \quad F''(a) > 0.$$

Gäbe es nun $x_0 \in (1, a)$ mit $F''(x_0) < 0$, so gäbe es x_1, x_2 derart, dass

$$\begin{aligned} 1 < x_1 < x_0 < x_2 < a, \\ F''(x_1) = F''(x_2) = 0, \\ F'' < 0 \quad \text{in} \quad (x_1, x_2). \end{aligned} \quad (47)$$

Dann gäbe es aber

$$\xi \in (x_1, x_2) \quad (48)$$

mit $F'''(\xi) = 0$. Aus der Differentialgleichung (1) folgt:

$$4\xi F''(\xi) = -(\mu+2)F'(\xi).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist wegen (47), (48) negativ, die rechte Seite aber positiv wegen (45). Damit ist (46) bewiesen.

3.4. Aus (42) und (46) ergibt sich

$$F'(x) \geq -\frac{\mu}{2} \quad \text{in } [1, a]$$

und somit wegen $F(1)=1$:

$$F(x) \geq 1 - \frac{\mu}{2}(x-1) \quad \text{in } [1, a]. \quad (49)$$

Daraus ergibt sich für $x=a$:

$$1 + \frac{2}{\mu} \leq a.$$

Da die rechte Seite der Ungleichung (49) im Teilintervall $[1, 1+2/\mu]$ nicht negativ ist, so folgt aus (49):

$$\int_1^a F^2 dx \geq \int_1^{1+2/\mu} F^2 dx \geq \int_1^{1+2/\mu} \left(1 - \frac{\mu}{2}(x-1)\right)^2 dx = \frac{2}{3\mu}. \quad (50)$$

Aus (1) und (46) folgt

$$2xF' + \mu F \leq 0 \quad \text{in } [1, a].$$

Daraus ergibt sich wegen $F(1)=1$:

$$F(x) \leq x^{-\mu/2} \quad \text{in } [1, a].$$

Somit wird

$$\int_1^a F dx \leq \int_1^a x^{-\mu/2} dx < \int_1^{\infty} x^{-\mu/2} dx = \frac{2}{\mu-2} \quad \text{für } \mu > 2.$$

Daraus und aus (50) folgt Lemma 2.

LITERATUR

- [1] BERGER, M., GAUDUCHON, P., und MAZET, E., *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics 194 (Springer Verlag 1971).
- [2] HOBSON, E. W., *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics* (Cambridge University Press 1931).

Eingegangen 21. Januar 1974