Sur la variation de la mesure de l'image d'un ensemble compact

Autor(en): **Holy, Jean-Claude**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **49 (1974)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-37998

Sur la variation de la mesure de l'image d'un ensemble compact

JEAN-CLAUDE HOLY

1. Introduction

Soit f une application de R^m dans R^p, $m \geqslant 1, p \geqslant 1$, de classe $C^j, j \geqslant 1$, et K un compact contenu dans R^m.

Nous nous proposons d'étudier la variation de la mesure $|f(K)|$ de l'image $f(K)$ du compact $K \subset R^m$, en fonction de f pour la C^1-topologie uniforme, l'ensemble K étant supposé fixe.

Dans cette note, nous établissons des conditions suffisantes relativement à f et au compact K pour que $|f(K)|$ varie continûment en fonction de f. Des problèmes analogues ont déjà été abordés dans le cas où f est une projection parallèle de R^2 sur R^1.

En particulier, S. Mazurkiewicz et S. Saks [5] ont construit un exemple d'un ensemble compact $F \subset R^2$, jouissant de la propriété suivante: la projection de F sur l'axe des abcisses constitue un segment et sur toute autre droite passant par l'origine est un ensemble de mesure nulle. Désignons alors par p_0 la projection orthogonale de R^2 sur R^1 et par p_θ la projection parallèle de R^2 sur R^1 dont la direction fait un angle θ avec celle de p_0. Dans l'exemple ci-dessus p_θ converge vers p_0 pour la C^∞-topologie uniforme sur tout ouvert borné $G \supset F$ lorsque $\theta \to 0$, mais la fonction $p_\theta(F)$ est discontinue au point $\theta = 0$.

W. Sierpinski, d'autre part, a démontré le résultat suivant [9]: Soit P un ensemble compact dans R^2. Désignons par $m(P; \varphi)$ la mesure de la projection de P sur la droite faisant l'angle φ avec l'axe des abcisses. La fonction $m(P; \varphi)$ est *semi-continue supérieurement par rapport à* φ.

L'exemple de Saks-Mazurkiewicz et le théorème de Sierpinski admettent des généralisations à l'espace R^m, $m > 2$.

L'application f est alors de classe C^∞ et se réduit à une projection parallèle qui applique R^m sur R^p avec $p = m - 1$. Les ensembles considérés sont seulement supposés compacts.

Nous distinguerons les trois cas suivants:

1) $m = p \geqslant 1$. Nous montrons qu'il suffit de supposer f de classe C^1 pour que $|f(K)|$ soit fonction continue de f. On ne fait aucune hypothèse supplémentaire sur le compact K(Th. 1).

2) $m < p$. Les hypothèses sur f et K sont les mêmes qu'au No. 1 et on obtient un résultat semblable au théorème (1) en faisant usage de la m-mesure de Hausdorff [1].

3) $m > p \geqslant 1$. Lorsque la dimension de la source est supérieure à celle du but, il est nécessaire de poser des hypothèses relatives à la structure de K et à la classe de f, plus fortes que celles du No. 1. pour que $|f(K)|$ soit fonction continue de f.

Nous traitons le cas $m = p$, Th. (1) et démontrerons dans une note ultérieure les résultats correspondants pour $m > p$ et $m < p$.

2. Énonces des résultats

Nous démontrerons le théorème suivant:

THÉORÈME (1). *Soit f une application d'un ouvert G de R^m dans R^m. Supposons f de classe C^1. Soit K un ensemble compact contenu dans G. Alors si $\{f_n\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$, est une suite d'applications de G dans R^m, de classe C^1, qui convergent vers f pour la C^1-topologie uniforme sur G, on a l'égalité:*

$$\lim_{n \to \infty} |f_n(K)| = |f(K)|. \tag{1}$$

Cela signifie que la fonction $|f(K)|$ est continue pour la C^1-topologie uniforme en tout point f de classe $C^j, j \geqslant 1$, de l'espace fonctionnel des applications de classe C^1 de R^m dans R^m.

Rappelons qu'une suite d'applications $\{f_n\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$, de classe $C^j, j \geqslant 1$, converge vers f pour la C^j-topologie uniforme sur $G \subset R^m$ si f_n ainsi que toutes ses dérivées partielles d'ordre $\leqslant j$ convergent uniformément respectivement vers f et les dérivées partielles correspondantes de f sur G.

Idée de la démonstration

On démontre le théorème (1) en établissant les deux inégalités suivantes:

$$\text{a) } \overline{\lim_{n \to \infty}} |f_n(K)| \leqslant |f(K)|, \quad \text{b) } \underline{\lim_{n \to \infty}} |f_n(K)| \geqslant |f(K)| \tag{2}$$

Pour obtenir la première on se base sur le fait que $f(K)$ est compact. Il suffit de supposer que f_n converge uniformément vers f sur G.

(3) Pour démontrer le seconde, on considère les trois ensembles E_1, E_2, E_3 suivants contenus dans K:

1) E_1 = l'ensemble des points de K, critiques pour l'application f. [6], [7].

2) E_2 = l'ensemble $K - E_1$.

3) E_3 = l'ensemble des points de densité de E_2.

En faisant essentiellement usage de la classe des applications, du paramètre de régularité de K, ainsi que du théorème de recouvrement de Vitali, on montre que:

$$\underline{\lim_{n \to \infty}} |f_n(E_3)| \geqslant |f(K)| \tag{4}$$

ce qui implique:

$$\varliminf_{n\to\infty} |f_n(K)| \geqslant |f(K)|. \tag{5}$$

3. Démonstration du théorème (1)

LEMME (1.1). *Soit $f(x)$ une application continue d'un ouvert G de R^m dans R^p, $m \geqslant p \geqslant 1$ et $\{f_n\}$, $(n=1,2,\ldots)$ une suite d'applications continues de G dans R^p, qui convergent uniformément vers f sur G. Pour tout compact $K \subset G$ on a:*

$$\varlimsup_{n\to\infty} |f_n(K)| \leqslant |f(K)|. \tag{6}$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, arbitrairement petit; il existe un recouvrement ouvert R' de $f(K)$ par des p-cubes E'_i $(i=1,2,\ldots)$ tel que:

$$\left| |f(K)| - \sum_{i=1}^{\infty} |E'_i| \right| < \varepsilon.$$

L'ensemble $f(K)$ est compact, car K est compact et f continue. On peut alors extraire de R' un recouvrement ouvert fini $\{E'_{k_1}, \ldots, E'_{k_M}\}$. Les ensembles $E_{k_i} = f^{-1}(E'_{k_i})$, $(i=1,2,\ldots,M)$ constituent un recouvrement ouvert fini de K. Soit alors R'' le recouvrement ouvert fini que l'on déduit de R' en faisant correspondre à chaque cube E'_{k_i} le cube E''_{k_i} homothétique à E'_{k_i}, le centre de cette homothétie étant le centre de E'_{k_i}. La constante $k > 1$, d'homothétie peut être choisie de telle manière que: $E''_{k_i} \supset E'_{k_i}$ et $|E''_{k_i}| \leqslant (1+\varepsilon)\,|E'_{k_i}|$.

On a par suite:

$$\sum_{i=1}^{M} |E''_{k_i}| \leqslant (1+\varepsilon)\,(|f(K)| + \varepsilon).$$

Comme f_n converge uniformément vers f sur G, il en résulte que pour n assez grand, $n > N(\varepsilon)$, l'image de chaque E_{k_i} $(i=1,\ldots,M)$, par f_n sera contenue entièrement dans l'ensemble E''_{k_i}. Puisque les E_{k_i} recouvrent K il vient:

$$f_n(K) \subset \bigcup_{i=1}^{M} E''_{k_i} \quad \text{pour tout} \quad n > N(\varepsilon).$$

Cela entraîne que:

$$|f_n(K)| \leqslant \left| \bigcup_{i=1}^{M} E''_{k_i} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{M} |E''_{k_i}| \leqslant (1+\varepsilon)\,(|f(K)| + \varepsilon)$$

pour tout $n > N(\varepsilon)$. Par suite:

$$\varlimsup_{n\to\infty} |f_n(K)| \leqslant (1+\varepsilon)\,(|f(K)| + \varepsilon)$$

et comme ε est arbitraire on a:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |f_n(K)| \leqslant |f(K)|. \tag{6}$$

Si

$$|f(K)| = 0$$

on a:

$$0 = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, |f_n(K)| = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, |f_n(K)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(K)| = |f(K)|. \tag{7}$$

On montre maintenant que:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, |f_n(K)| \geqslant |f(K)|. \tag{8}$$

Démonstration. Nous supposerons $|f(K)| \neq 0$. Considérons les trois ensembles E_1, E_2, E_3 définis plus haut (3).

Alors pour tout $x \in E_3$, il existe une boule $B(x, \varrho)$ ouverte, centrée en x et de rayon $\varrho > 0$, telle que la restriction de f à cette boule soit un difféomorphisme de classe C^1. Cela résulte directement du théorème des fonctions implicites.

Soit $\overbracket{f(E_3)}$ l'ensemble des points de densité de $f(E_3)$ et $\varepsilon > 0$, arbitrairement petit. Si $y = f(x)$ et si $y \in \overbracket{f(E_3)}$, il existe une suite de cubes fermés $K'_{y,i}$, centrés en y et tels que l'on ait:

$$1)\ \frac{|K'_{y,i} \cap f(E_3 \cap B(x, \varrho))|}{|K'_{y,i}|} > 1 - \varepsilon, \qquad \forall i. \tag{9}$$

$$2)\ K'_{y,i} \subset f(B(x, \varrho)),$$

$$3)\ \delta(K'_{y,i}) \to 0, \qquad i \to \infty.$$

DÉFINITION. Le paramètre de régularité $r(E)$ d'un ensemble $E \subset R^m$ est la borne supérieure des nombres $|E|/|J|$ où J désigne un cube quelconque contenant E. Nous dirons qu'une suite $\{E_n\}$ d'ensembles est régulière s'il existe un $\alpha > 0$ tel que l'on ait $r(E_n) > \alpha$ pour $n = 1, 2, \ldots$.

DÉFINITION. Nous dirons qu'une famille F d'ensembles recouvre un ensemble E au sens de Vitali, si pour tout $x \in E$ il existe une suite régulière d'ensembles de F contenant tous x, qui converge vers x.

Rappelons encore le théorème de recouvrement de Vitali [4]:

THÉORÈME. *Soit $E \subset R^m$ et F une famille d'ensembles fermés qui recouvre E au sens de Vitali. Alors on peut extraire de F une suite finie ou dénombrable $\{E_n\}$ d'en-*

sembles deux-à-deux disjoints tels que:

$$\left|E-\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right|=0. \tag{10}$$

Les ensembles $K'_{y,i}$ recouvrent $\overline{f(E_3)}$ au sens de Vitali, et d'après le théorème de Vitali, il existe une suite de cubes fermés $K'_{y,i}$, deux-à-deux disjoints, tels que:

$$\left|\overline{f(E_3)}-\bigcup_{y,i} K'_{y,i}\right|=0. \tag{11}$$

On peut alors trouver un nombre fini de cubes $K'_{y,i}$, (y, i) parcourant un ensemble fini I, de telle manière que l'on ait:

$$\left|\overline{f(E_3)}-\bigcup_{(y,i)\in I} K'_{y,i}\right|<\varepsilon\left|\overline{f(E_3)}\right|. \tag{12}$$

A chaque cube $K'_{y,i}$ on peut faire correspondre, au moyen d'une homothétie de centre y et de rapport $k>1$, un cube $K'^{*}_{y,i}\supset K'_{y,i}$.

Le rapport k peut être choisi de telle sorte que les $K'^{*}_{y,i}$ n'empiètent que sur un ensemble dont la mesure ne dépasse pas

$$\varepsilon\left|\bigcup_{I} K'_{y,i}\right|. \tag{13}$$

Soit

$$K_{x,i}=f^{-1}(K'_{y,i})\cap B(x,\varrho): \tag{14}$$

désignons par $W_{x,i}$ l'ensemble $K_{x,i}\cap E_3$.

Comme f_n converge vers f pour la C^1-topologie uniforme sur G, il existe un n_0 tel que si $n>n_0$ on ait:

$$f_n(K_{x,i})\subset K'^{*}_{y,i} \quad \text{et par suite} \quad f_n(W_{x,i})\subset K'^{*}_{y,i}. \tag{15}$$

$$|f_n(W_{x,i})|\geqslant(1-\varepsilon)\,|f(W_{x,i})|. \tag{16}$$

La deuxième inégalité résulte du fait que

$$|f_n(W_{x,i})|=\int_{W_{x,i}} \phi_n\, dx_1 \ldots dx_n$$

et

$$|f(W_{x,i})|=\int_{W_{x,i}} \phi\, dx_1 \ldots dx_n,$$

où ϕ_n et ϕ désignent respectivement la valeur absolue des Jacobiens de f_n et de f.

Comme ϕ_n converge uniformément vers ϕ il vient:

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(W_{x,i})| = |f(W_{x,i})|$$

et l'inégalité (16) est vérifiée.

De (9), et (14) on déduit:

$$|f(W_{x,i})| \geqslant (1-\varepsilon)\, |K'_{y,i}|, \tag{17}$$

ce qui, combiné avec (16) nous donne:

$$|f_n(W_{x,i})| \geqslant (1-\varepsilon)^2\, |K'_{y,i}|, \qquad n>n_0. \tag{18}$$

De (13) il découle:

$$\left|f_n\Big(\bigcup_I W_{x,i}\Big)\right| \geqslant (1-\varepsilon)^2 \sum_I |K'_{y,i}| - \varepsilon \sum_I |K'_{y,i}| = ((1-\varepsilon)^2-\varepsilon) \sum_I |K'_{y,i}|,$$

(12) implique:

$$\sum_I |K'_{y,i}| \geqslant (1-\varepsilon)\, |\overline{f(E_3)}|,$$

d'où l'on déduit:

$$\left|f_n\Big(\bigcup_I W_{x,i}\Big)\right| \geqslant ((1-\varepsilon)^2-\varepsilon)\,(1-\varepsilon)\, |\overline{f(E_3)}|: \tag{19}$$

or:

$$|\overline{f(E_3)}| = |f(K)|;$$

en effet: $K=E_1 \cup (E_2-E_3) \cup E_3$
d'où

$$|f(K)| \leqslant |f(E_1)| + |f(E_2-E_3)| + |f(E_3)|.$$

On a de plus:

$$|f(E_1)| = 0, \tag{20}$$

car f est C^1 [6].

$$|f(E_2-E_3)| = 0, \tag{21}$$

car l'ensemble E_2-E_3 est uniquement constitué de points de raréfaction; donc $|E_2-E_3|=0$ et comme f est lipschitzienne sur G cela implique (21). On a donc $|f(K)| \leqslant |f(E_3)|$ et puisque $E_3 \subset K$, il vient: $|f(E_3)| \leqslant |f(K)|$, d'où $|f(E_3)| = |f(K)|$. Comme $|f(E_3)| = |\overline{f(E_3)}|$ on a bien: $|f(K)| = |\overline{f(E_3)}|$.

On peut donc écrire, pour tout $n>n_0$:

$$|f_n(\bigcup_I W_{x,i})| \geqslant ((1-\varepsilon)^2-\varepsilon)\,(1-\varepsilon)\,|f(K)|,$$

et puisque

$$\bigcup_I W_{x,i} \subset K,$$

on a:

$$\varliminf_{n\to\infty} |f_n(K)| \geqslant ((1-\varepsilon)^2-\varepsilon)\,(1-\varepsilon)\,|f(K)|,$$

ε étant arbitraire on a:

$$\varliminf_{n\to\infty} |f_n(K)| \geqslant |f(K)|.$$

En appliquant l'inégalité (6) il vient:

$$|f(K)| \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} |f_n(K)| \geqslant \varliminf_{n\to\infty} |f_n(K)| \geqslant |f(K)| \tag{22}$$

d'où

$$\varlimsup_{n\to\infty} |f_n(K)| = \varliminf_{n\to\infty} |f_n(K)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(K)| = |f(K)|.$$

Remarques. a) si $|K|=0$ on a $|f(K)|=0$, f étant lipschitzienne sur G, et par suite, en appliquant (22) on a bien:

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(K)| = |f(K)| = 0.$$

b) Si tout $x \in K$ est critique pour f, alors d'après le théorème de Sard [6], on a $|f(K)|=0$ et le théorème (1) reste vrai.

4. En faisant usage de techniques semblables a celles que l'on utilise pour démontrer le théoréme (1), on obtient les théorèmes suivants, respectivement pour les cas $m<p$ et $m>p$:

THÉORÈME (2). *Soit f une application d'un ouvert G de R^m dans R^p, $p>m\geqslant 1$, de classe C^j, $j\geqslant 1$, et K un compact contenu dans G. Soit $\{f_n\}$, $(n=1,2,\ldots)$ une suite d'applications qui convergent vers f pour la C^1-topologie uniforme sur G.*

On a:

$$\lim_{n\to\infty} m_m(f_n(K)) = m_m(f(K)).$$

$m_m(A)$ désigne la m-mesure de A au sens de Hausdorff [1].

THÉORÈME (3). *Soit f une application d'un ouvert G de R^m dans R^p, $m>p\geqslant 1$, de classe C^j, $j\geqslant m-p+1$. Soit K un compact contenu dans G, jouissant de la proprieté (H): pour tout $x\in K$ il existe une suite régulière au sens de Vitali* [4], *d'ensembles contenus dans K, et qui converge vers x.*

Alors si $\{f_n\}$, $(n=1, 2,\ldots)$ est une suite d'applications de G dans R^p, de classe C^1 qui convergent vers f pour la C^1-topologie uniforme sur G, on a l'égalité:

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(K)|=|f(K)|\,.$$

La fonction $|f(K)|$ est continue pour la C^1-topologie uniforme en tout point f de classe C^j, $j\geqslant m-p+1$, de l'espace fonctionnel des applications de R^m dans R^p.

Dans une note ultérieure, nous montrons, au moyen d'un contre-example, [2] que l'hypothèse faite sur la classe de f est nécessaire et ne peut être améliorée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HAUSDORFF, F., *Dimension und ausseres Mass*, Mathematische Annalen *79* (1917–19), 157–179.

[2] HOLY, J. C., *Sur l'ensemble des valeurs stationnaires d'une application différentiable*, Comment. Math. Helv. *41* (1966–67), 157–169.

[3] DE RHAM, G., *Celebrazioni archimedee del Secolo XX*, Siracusa 11–16 Aprile 1961 vol. II.

[4] SAKS, S., *Theory of the integral*, Hafner Publishing Company New York.

[5] SAKS, S. et MAZURKIEWICZ, S., *Sur les projections d'un ensemble fermé*, Fundamenta Mathematicae *VIII* (1926), 109–113.

[6] SARD, A., *The measure of critical values of differential maps*, Bull. Amer. Math. Soc. *48* (1942), 883–890.

[7] ——, *Images of critical sets*, Ann. of Math. *68* (1958), 247–259.

[8] ——, *The equivalence of n-measure and Lebesgue measure in E^n*, Bull. Amer. Math. Soc. *49* (1943), 758–759.

[9] SIERPINSKI, W., (c.f. S. Mazurkiewicz et S. Saks), *Sur les projections d'un ensemble fermé*, Fund. Math. *VIII* (1926), 109–113.

[10] WHITNEY, H., *A function not constant on a connected set of critical points*, Duke. Math. J. *1* (1935), 514–517.

École d'Architecture de l'Université
1200 Genève

Reçu le 8 juillet 1973.