

Un Théorème de Finitude pour les Morphismes q -Convexes

Autor(en): **Siegfried, Pierre**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **49 (1974)**

PDF erstellt am: **16.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-38002>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Un Théorème de Finitude pour les Morphismes q -Convexes

par PIERRE SIEGFRIED

0. Introduction

Un théorème classique de Cartan-Serre (1953) affirme que si X est un espace analytique compact et \mathcal{F} un faisceau cohérent sur X , alors les cohomologies $H^n(X, \mathcal{F})$ sont de dimension finie (sur \mathbb{C}) pour tout $n \geq 0$.

En 1960, Grauert a démontré [4] une forme relative de ce théorème qui s'énonce de la manière suivante :

Si $\pi: X \rightarrow S$ est un morphisme propre d'espaces analytiques et \mathcal{F} un faisceau cohérent sur X , alors les faisceaux images-directes $R^n \pi_* \mathcal{F}$ sont des faisceaux cohérents sur S . (Le théorème de Cartan-Serre n'est autre que le cas particulier où S est réduit à un point).

Andreotti-Grauert ont obtenu en 1962 [2] des théorèmes de finitude pour une classe d'espaces non-compacts, les espaces q -convexes. Plus précisément, si \mathcal{F} est un faisceau cohérent sur un espace q -convexe X , alors les cohomologies $H^n(X, \mathcal{F})$ sont de dimension finie pour $n \geq q+1$.

Pour généraliser ces théorèmes au cas relatif, nous reprenons la définition des morphismes q -convexes $\pi: X \rightarrow S$ d'espaces analytiques introduite par Knorr [7]. Cette définition implique la q -convexité des fibres de π et une propriété de continuité de ces fibres. Pour les morphismes q -convexes, nous démontrons l'analogue du théorème de Grauert. Plus précisément :

Si $\pi: X \rightarrow S$ est un morphisme q -convexe et \mathcal{F} un faisceau cohérent sur X , alors les faisceaux images-directes $R^n \pi_* \mathcal{F}$ sont cohérents pour $n \geq q+1$.

Nous démontrerons également que pour les ouverts de Stein $S' \subset S$ et $n \geq q+1$, les $H^n(\pi^{-1}(S'), \mathcal{F})$ sont des espaces séparés (donc Fréchet) et que les sections de $R^n \pi_* \mathcal{F}$ au-dessus de S' sont précisément les éléments de cet espace de cohomologie. Ces résultats sont annoncés dans [12].

Des cas particuliers de ce théorème ont été démontrés par Knorr [7], Knorr-Schneider [8] et Siu [13], [14].

La démonstration de Grauert de son théorème central est longue et difficile. Des démonstrations plus simples ont été trouvées par Forster-Knorr [3], Kiehl-Verdier [6] et Houzel. (Elles sont toutes basées sur des idées de Malgrange et Grothendieck). Tandis que les démonstrations du théorème de l'image directe pour les morphismes q -convexes déjà connues sont calquées sur celle de Grauert, la nôtre utilise les méthodes de Forster-Knorr. L'adaptation de cette démonstration au cas q -convexe fait intervenir plusieurs difficultés techniques, mais la différence essentielle consiste à

obtenir un théorème d'approximation de cocycles (du type de Runge) intéressant en soi. Remarquons en passant que ce résultat n'a pas d'analogue dans le cas propre.

J'ai le grand plaisir de remercier ici Otto Forster de son aide précieuse, ses conseils constants et son amitié. Je remercie également Knut Knorr de nombreuses conversations.

I. MORPHISMES q -CONVEXES

Dans ce chapitre, nous généralisons les théorèmes d'épuisement pour les espaces q -convexes d'Andreotti-Grauert (cf. [2]) au cas des espaces relatifs. Un premier résultat est démontré dans (I.13). Afin d'obtenir un théorème plus précis (théorème (I.20)), nous devons imposer l'hypothèse (voir (I.16)) que certains groupes de cohomologie sont des espaces séparés (donc Fréchet). Nous démontrons également (voir (I.17)) un théorème d'approximation du type théorème de Runge. A l'aide des techniques développées dans les chapitres suivants, nous montrerons dans (IV.6) que cette hypothèse de séparation découle du théorème (I.13).

1. Recouvrement standards

Soit (X, \mathcal{O}_X) un espace analytique complexe dénombrable à l'infini (non nécessairement réduit).

(I.1) DÉFINITION. Une famille $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement standard de X si les U_i sont des ouverts de Stein de X qui forment une base dénombrable de la topologie de X .

Pour un \mathcal{O}_X -module cohérent \mathcal{F} , les espaces vectoriels $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ (resp. $Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$) des cochaines (resp. cocycles) alternés sont munis naturellement d'une structure d'espace de Fréchet. En vertu du théorème de Leray sur les recouvrements acycliques, on a un isomorphisme canonique

$$H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) / \delta C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} H^n(X, \mathcal{F})$$

et la topologie induite sur $H^n(X, \mathcal{F})$ (qui n'est pas séparée en général) ne dépend pas du choix de \mathcal{U} (cf. [9]). Pour un sous espace ouvert $Y \subset X$, $\mathcal{U}_Y = \{U \in \mathcal{U} \mid U \subset Y\}$ est un recouvrement standard de Y :

(I.2) Remarques. 1) Pour $\xi \in C^n(\mathcal{U}_Y, \mathcal{F})$ on définit $\tilde{\xi} \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, l'extension par zéro de ξ , de la manière suivante:

$$\tilde{\xi}_{i_0 \dots i_n} = \begin{cases} \xi_{i_0 \dots i_n} & \text{si } (i_0, \dots, i_n) \in \text{Nerf } \mathcal{U}_Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

la restriction $\xi |_{Y=\xi} | \mathcal{U}_Y$ est alors ξ .

2) Soit $\sigma: K \rightarrow L$ un morphisme de complexes. Si pour un n , σ^{n-1} et $\sigma^n: H^n(K) \rightarrow H^n(L)$ sont surjectifs, alors $\sigma^n | Z^n(K) \rightarrow Z^n(L)$ est surjectif. En particulier, si \mathcal{U} et \mathcal{U}^* sont deux recouvrements standards de X , $\mathcal{U}^* \subset \mathcal{U}$, la restriction $Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow Z^n(\mathcal{U}^*, \mathcal{F})$ est surjectif.

3) Soit $Y \subset X$ un ouvert; alors la restriction $H^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(Y, \mathcal{F})$ est d'image dense si et seulement si $Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow Z^n(\mathcal{U}_Y, \mathcal{F})$ est d'image dense pour un recouvrement standard \mathcal{U} de X (et par conséquent pour tout recouvrement standard de X).

La démonstration de la proposition suivante, qui est de nature topologique, est facile.

(I.3) PROPOSITION. Soit \mathcal{U} un recouvrement standard de X ; $V, W \subset X$ des ouverts, $X = V \cup W$. Alors il existe un recouvrement standard $\mathcal{U}^* \subset \mathcal{U}$ de X tel que:

$$\text{Nerf } \mathcal{U}^* = \text{Nerf } \mathcal{U}_V^* \cup \text{Nerf } \mathcal{U}_W^*$$

2. Morphismes q -convexes; théorèmes d'épuisements en degré $> q + 1$

(I.4) DÉFINITION. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ un ouvert et z_1, \dots, z_N les coordonnées canoniques de \mathbb{C}^N . Une fonction $\varphi: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ est strictement q -convexe si pour tout $a \in \Omega$, la forme de Levi

$$L_\varphi(a) = \sum_{1 \leq i, j \leq N} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(a) dz_i \otimes d\bar{z}_j$$

a au moins $N - q$ valeurs propres positives.

(I.5) DÉFINITION. Soit X un espace analytique. Une fonction $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement q -convexe si pour tout $a \in X$, il existe une carte (U, ψ, Ω) (où $U \subset X$ est un voisinage ouvert de a , $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ un ouvert et $\psi: U \rightarrow \Omega$ un plongement fermé) et une fonction $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ strictement q -convexe telle que $\varphi | U = \Phi \circ \psi$.

On montre que cette définition est indépendante du choix de la carte [1]. Les fonctions $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ sont définies de manière analogue.

(I.6) DÉFINITION. Soit $\pi: X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces analytiques. π est un morphisme q -convexe (resp. q -complet) s'il existe une fonction $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ et un $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que:

1) $\varphi | \{x \in X \mid \varphi(x) > \gamma\}$ soit strictement q -convexe (resp. φ soit strictement q -convexe)

2) pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\pi | \{x \in X \mid \varphi(x) \leq c\}$ soit propre.

La fonction φ est appelée fonction d'épuisement, γ la constante exceptionnelle.

(I.7) *Remarques.* 1) Si S est un point et $\pi: X \rightarrow S$ q -convexe (resp. q -complet) alors X est strictement $(q+1)$ -convexe (resp. $(q+1)$ -complet) au sens d'Andreotti-Grauert [2]. Nous appellerons ces espaces q -convexes (resp. q -complets).

2) Les fibres d'un morphisme q -convexe (resp. q -complet) sont des espaces q -convexes (resp. q -complets). La réciproque est visiblement fautive (la projection $\mathbb{C}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ n'est pas 0-convexe).

A partir de maintenant, nous supposons toujours que S est dénombrable à l'infini (lorsque S est Stein par exemple). Dans ce cas, l'espace X est aussi dénombrable à l'infini.

(I.8) *Notations.* Soit $\pi: X \rightarrow S$ un morphisme q -convexe, φ une fonction d'épuisement et \mathcal{U} un recouvrement standard de X . Posons, pour $S' \subset S$ et $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \pi_c &= \pi \mid \{\varphi < c\} \rightarrow S \\ X_c &= \pi_c^{-1}(S), \quad X(S') = \pi^{-1}(S'), \quad X_c(S') = \pi_c^{-1}(S'), \\ \mathcal{U}_c(S') &= \{U \in \mathcal{U} \mid U \subset X_c(S')\}. \end{aligned}$$

(I.9) LEMME. Soit X un espace de Stein, $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction strictement q -convexe à valeurs positives, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module cohérent et \mathcal{U} un recouvrement standard de X .

Soit $c \in \mathbb{R}$; alors

i) X_c est q -complet, en particulier

$$H^n(X_c, \mathcal{F}) = 0 \quad n \geq q+1$$

ii) l'image par la restriction

$$Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow Z^q(\mathcal{U}_c, \mathcal{F})$$

est dense.

Démonstration. Soit $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'épuisement strictement 0-convexe (une telle fonction existe vu qu'un espace de Stein est 0-complet, cf. [10]), et on peut supposer φ à valeurs positives. La fonction $\psi = \varphi + (c - \varphi)^{-1}$ est alors une fonction d'épuisement strictement q -convexe de $X_c = \{\varphi < c\}$ d'où i) (cf. [2]).

Lorsque φ est propre, donc une fonction d'épuisement de X , l'affirmation ii) n'est autre que le théorème 12 p. 248 de [2]. Pour démontrer le cas général, il suffit (cf. (I.2.3)) de montrer que l'image par la restriction $Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow Z^q(\mathcal{U}^*, \mathcal{F})$ est dense, où \mathcal{U}^* est le recouvrement de X_c défini par $\mathcal{U}^* = \{U \in \mathcal{U} \mid U \subset X_c\}$.

Pour cela, soit $K \subset X_c$ un compact; pour $\eta > 0$ assez petit et $c_1 \in \mathbb{R}$ convenablement choisi, l'ouvert $Y = \{x \in X \mid \varphi(x) + \eta\psi(x) < c_1\}$ jouit de la propriété $K \subset Y \subset X_c$.

Comme $\varphi + \eta\psi$ est une fonction d'épuisement de X strictement q -convexe et que $\mathcal{U}_Y = \mathcal{U}_Y^*$ on déduit ii).

Soit E un espace vectoriel localement convexe; l'espace séparé associé $E_{\text{sép}}$ est l'espace quotient de E par l'intersection des noyaux de toutes les semi-normes continues sur E .

(I.10) LEMME. Soit X un espace analytique, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module cohérent et \mathcal{U} un recouvrement standard de X . Soient $X_0, Y \subset X$ des ouverts tels que $X = X_0 \cup Y$. Supposons que:

- 1) $H^{q+1}(Y, \mathcal{F}) = 0$
- 2) $H^{q+1}(X_0 \cap Y, \mathcal{F}) = 0$
- 3) L'image par la restriction $Z^q(\mathcal{U}_Y, \mathcal{F}) \rightarrow Z^q(\mathcal{U}_{X_0 \cap Y}, \mathcal{F})$ est dense.

Alors, la restriction

$$H^{q+1}(X, \mathcal{F})_{\text{sép}} \rightarrow H^{q+1}(X_0, \mathcal{F})_{\text{sép}}$$

est injective.

Démonstration. Il faut montrer que si $\xi \in Z^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tel que $\xi|_{X_0} \in \bar{B}^{q+1}(\mathcal{U}_{X_0}, \mathcal{F})$, alors $\xi \in \bar{B}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, où \bar{B}^{q+1} est l'adhérence de δC^q dans Z^{q+1} (où C^{q+1}).

On peut supposer que \mathcal{U} vérifie la propriété:

$$\text{Nerf } \mathcal{U} = \text{Nerf } \mathcal{U}_{X_0} \cup \text{Nerf } \mathcal{U}_Y \tag{*};$$

en effet, il existe, par (I.3), $\mathcal{U}^* \subset \mathcal{U}$ qui vérifie cette propriété, et l'hypothèse 3) est satisfaite pour \mathcal{U}^* car $Z^q(\mathcal{U}_{X_0 \cap Y}, \mathcal{F}) \rightarrow Z^q(\mathcal{U}_{X_0 \cap Y}^*, \mathcal{F})$ est surjectif par (I.2.2).

Comme $\xi|_{X_0} \in \bar{B}^{q+1}(\mathcal{U}_{X_0}, \mathcal{F})$, il existe une suite $(\eta^v) \subset C^q(\mathcal{U}_{X_0}, \mathcal{F})$ telle que $\eta^v \rightarrow \xi|_{X_0}$ et en vertu de 1), il existe $\zeta \in C^q(\mathcal{U}_Y, \mathcal{F})$ tel que $\delta\zeta = \xi|_Y$. On a donc

$$\delta(\eta^v|_{X_0 \cap Y} - \zeta|_{X_0 \cap Y}) \rightarrow 0 \quad \text{dans } Z^{q+1}(\mathcal{U}_{X_0 \cap Y}, \mathcal{F})$$

Par 2), l'homomorphisme

$$\delta: C^q(\mathcal{U}_{X_0 \cap Y}, \mathcal{F}) \rightarrow Z^{q+1}(\mathcal{U}_{X_0 \cap Y}, \mathcal{F})$$

est surjectif et il existe donc (théorème de Banach) une suite $(\beta^v) \subset C^q(\mathcal{U}_{X_0 \cap Y}, \mathcal{F})$ telle que

$$\delta\beta^v = \delta(\eta^v|_{X_0 \cap Y} - \zeta|_{X_0 \cap Y}) \quad \text{et} \quad \beta^v \rightarrow 0.$$

Soit

$$\gamma^v = \eta^v|_{X_0 \cap Y} - \zeta|_{X_0 \cap Y} - \beta^v \in Z^q(\mathcal{U}_{X_0 \cap Y}, \mathcal{F});$$

par 3.), il existe $(\tilde{\gamma}^v) \subset Z^q(\mathcal{U}_Y, \mathcal{F})$ telle que

$$\tilde{\gamma}^v|_{X_0 \cap Y} - \gamma^v \rightarrow 0$$

Soit $\tilde{\beta}^v \in C^q(\mathcal{U}_Y, \mathcal{F})$ l'extension par zéro de β^v (cf. (I.2.1)). Posons, pour $(i_0, \dots, i_q) \in \text{Nerf } \mathcal{U}$, (compte tenu de (*))

$$\alpha_{i_0 \dots i_q}^v = \begin{cases} \eta_{i_0 \dots i_q} & \text{si } (i_0, \dots, i_q) \in \text{Nerf } \mathcal{U}_{X_0} \\ (\tilde{\gamma}^v + \tilde{\beta}^v + \zeta)_{i_0 \dots i_q} & \text{sinon} \end{cases}$$

En utilisant la propriété (*), on vérifie facilement que

$$\delta \alpha^v \rightarrow \zeta.$$

Soit $\pi: X \rightarrow S$ un morphisme q -convexe, $\varphi: X \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction d'épuisement de constante exceptionnelle γ , \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module cohérent et \mathcal{U} un recouvrement standard.

(I.11) LEMME. Soit $S' \in S$ un ouvert de Stein et $c \in \mathbf{R}$, $c > \gamma$. Alors il existe une famille finie $(U_i)_{1 \leq i \leq N}$ d'ouverts de Stein de $\{x \in X \mid \varphi(x) > \gamma\}$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que pour tout ε , $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, il existe des ouverts $X_k \subset X$, $0 \leq k \leq N$, avec les propriétés:

1) Pour tout k , $0 \leq k \leq N$, il existe une fonction d'épuisement $\psi_k: X \rightarrow \mathbf{R}$ de constante exceptionnelle γ telle que: $X_k = \{x \in X \mid \psi_k(x) < c\}$.

2) α $X_{k+1}(S') = X_k(S') \cup (X_{k+1}(S') \cap U_{k+1}(S'))$, $0 \leq k \leq N-1$.

β $X_c(S') = X_0(S') \subset X_1(S') \subset \dots \subset X_N(S') = X_{c+\varepsilon}(S')$.

3) α $H^n(X_k(S') \cap U_i(S'), \mathcal{F}) = 0$, $n \geq q+1$, $0 \leq i, k \leq N$.

β L'image par la restriction

$$Z^q(\mathcal{U}_{X_{k+1} \cap U_{k+1}}(S'), \mathcal{F}) \rightarrow Z^q(\mathcal{U}_{X_k \cap U_{k+1}}(S'), \mathcal{F})$$

est dense, $0 \leq k \leq N-1$.

Démonstration. Désignons par

$$X^\gamma = \{x \in X \mid \varphi(x) > \gamma\}$$

$$A_c = \{x \in X \mid \varphi(x) = c\}.$$

Alors $A_c \cap \overline{X(S')}$ est compact et il existe un recouvrement fini de $A_c \cap \overline{X(S')}$ par des ouverts de Stein $U_i \subset X^\gamma$, $1 \leq i \leq N$. Soit $V \in \bigcup_{i=1}^N U_i$ un voisinage de $A_c \cap \overline{X(S')}$ dans X . Il existe $\eta > 0$ tel que

$$X_c(S') \cup V(S') \subset X_{c+\eta}(S')$$

Soit $\alpha_i: X \rightarrow \mathbf{R}$, $1 \leq i \leq N$ des fonctions \mathcal{C}^∞ avec les propriétés:

a) $\text{supp}(\alpha_i) \subset U_i$ $1 \leq i \leq N$

b) $\alpha_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^N \alpha_i(x) = 1$, $\forall x \in V$.

Fixons ε_0 , $0 < \varepsilon_0 \leq \eta$, tel que pour tout ε , $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, les fonctions

$$\varphi - \varepsilon \sum_{i=1}^k \alpha_i, \quad 1 \leq k \leq N$$

soient strictement q -convexes.

Posons, pour ε , $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\psi_k = \varphi - \varepsilon \sum_{i=1}^k \alpha_i, \quad 1 \leq k \leq N,$$

$$\psi_0 = \varphi, \quad X_k = \{x \in X \mid \psi_k(x) < c\}$$

d'où 1); l'affirmation 2) résulte des conditions imposées aux α_i . 3) est une conséquence du Lemme (I.9).

(I.12) PROPOSITION. Soit $S' \in S$ un ouvert de Stein et $c \in \mathbf{R}$, $\gamma < c$. Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout c' , $c \leq c' \leq c + \varepsilon_0$, on ait

$$1) H^n(X_{c'}(S'), \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X_c(S'), \mathcal{F})$$

est un isomorphisme en degré $n > q + 1$; un épimorphisme en degré $n = q + 1$

$$2) H^{q+1}(X_{c'}(S'), \mathcal{F})_{\text{sép}} \rightarrow H^{q+1}(X_c(S'), \mathcal{F})_{\text{sép}}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Soient ε_0 , $(U_i)_{1 \leq i \leq N}$ comme dans le lemme précédent. La suite des X_k du lemme vérifie la propriété 2, α):

$$X_{k+1}(S') = X_k(S') \cup (X_{k+1}(S') \cap U_{k+1}(S'))$$

Appliquons la suite exacte de Mayer-Vietoris ([2], p. 236), (en posant $X_k = X_k(S')$, $U_i = U_i(S')$):

$$\begin{aligned} H^{l-1}(X_k \cap U_{k+1}, \mathcal{F}) &\rightarrow H^l(X_{k+1}, \mathcal{F}) \rightarrow H^l(X_k, \mathcal{F}) \oplus H^l(X_{k+1} \cap U_{k+1}, \mathcal{F}) \\ &\rightarrow H^l(X_k \cap U_{k+1}, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

Par (I.11.3.a), $H^l(X_{k+1}, \mathcal{F}) \rightarrow H^l(X_k, \mathcal{F})$ est surjective (bijective) si $l \geq q + 1$ ($l > q + 1$). Par induction on obtient alors 1). Pour 2) on applique (I.10).

(I.13) THÉORÈME. Soit $\pi: X \rightarrow S$ un morphisme q -convexe, φ une fonction d'épuisement de constante exceptionnelle γ et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module cohérent. Soit $S' \in S$ un ouvert de Stein et $c, c' \in \mathbf{R}$, $\gamma < c < c'$. Alors les restrictions

$$1) H^n(X_{c'}(S'), \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X_c(S'), \mathcal{F})$$

$$H^n(X(S'), \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X_c(S'), \mathcal{F})$$

sont des isomorphismes en degré $n > q + 1$;

des épimorphismes en degré $n = q + 1$.

$$2) H^{q+1}(X_{c'}(S'), \mathcal{F})_{\text{sép}} \rightarrow H^{q+1}(X_c(S'), \mathcal{F})_{\text{sép}}$$

$$H^{q+1}(X(S'), \mathcal{F})_{\text{sép}} \rightarrow H^{q+1}(X_c(S'), \mathcal{F})_{\text{sép}}$$

sont des isomorphismes.

Pour la démonstration de ce théorème, nous avons besoin d'une proposition qui résulte facilement de (I.2.2):

(I.14) PROPOSITION. Soit X un espace analytique, $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de X , $X_{i+1} \supset X_i$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X$ et soit \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module cohérent. Si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $H^n(X_{i+1}, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X_i, \mathcal{F})$ est surjectif, alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $H^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X_i, \mathcal{F})$ est surjectif.

Démonstration du théorème. Posons: $X_c = X_c(S')$, $\mathcal{U}_c = \mathcal{U}_c(S')$.

a) Démontrons d'abord que les homomorphismes de 1) sont surjectifs; il suffit pour cela de montrer que si $c > \gamma$ et $n \geq q+1$, $H^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X_c, \mathcal{F})$ est surjectif. Pour n et c fixés, considérons la famille \mathcal{A} des sous-ensembles $A \subset [c, \infty]$ qui vérifient les propriétés:

1) $c \in A$

2) si $a, b \in A$ et $a < b$, alors $H^n(X_b, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X_a, \mathcal{F})$ est surjectif.

\mathcal{A} est ordonné inductif et contient donc un élément maximal A_0 ; posons $\alpha = \sup A_0$ ($\alpha \leq \infty$). Alors $\alpha \in A_0$ car il existe une suite $(a_k) \subset A_0$ qui converge vers α et on applique (I.14). Si on avait $\alpha < \infty$, alors $A_0 \cup \{\alpha + \varepsilon\}$ serait un élément de \mathcal{A} pour ε assez petit par (I.12) et A_0 ne serait pas maximal, donc $\alpha = \infty$.

b) Démontrons que les homomorphismes de 1) sont injectifs pour $n > q+1$; il suffit pour cela de montrer que si $c > \gamma$ et $n > q+1$, $H^n(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X_c, \mathcal{F})$ est injectif. Pour c et n fixés, considérons l'ensemble $C \subset [c, \infty]$ des c' tels que $H^n(X_{c'}, \mathcal{F}) \rightarrow H^n(X_c, \mathcal{F})$ soit injectif. Soit $\alpha = \sup C$ et montrons que $\alpha \in C$. Soit $(c_i) \subset C$ une suite croissante qui converge vers α . Soit \mathcal{U} un recouvrement standard de X et $\xi \in Z^n(\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{F})$. Alors, pour tout i , $\xi \mid X_{c_i} = \delta \eta^i$, $\eta_i \in C^{n-1}(\mathcal{U}_{c_i}, \mathcal{F})$. Par (I.2.2), on peut choisir les η^i de telle manière que $\eta^{i+1} \mid X_{c_i} = \eta^i$; d'où $\xi = \delta \eta$. Alors $\alpha = \infty$ par (I.12).

c) Démonstration de 2). Compte tenu de la première partie du théorème, il suffit de montrer que $H^{q+1}(X, \mathcal{F})_{\text{sép}} \rightarrow H^{q+1}(X_c, \mathcal{F})_{\text{sép}}$ est injectif. Soit $C \subset [c, \infty]$ l'ensemble des c' tels que $H^{q+1}(X_{c'}, \mathcal{F})_{\text{sép}} \rightarrow H^{q+1}(X_c, \mathcal{F})_{\text{sép}}$ soit injectif; soit $\alpha = \sup C$. Montrons que $\alpha \in C$; soit $(c_i) \subset C$ une suite croissante qui converge vers α et $\xi \in Z^{q+1}(\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{F})$ tels que

$$\xi \mid X_c(S') \in \bar{B}^{q+1}(\mathcal{U}_c, \mathcal{F}). \text{ Alors } \xi_i = \xi \mid X_{c_i}(S') \in \bar{B}^{q+1}(\mathcal{U}_{c_i}, \mathcal{F}).$$

Soit donc $(\eta_i^v)_{v \in \mathbb{N}} \subset C^q(\mathcal{U}_{c_i}, \mathcal{F})$ tel que $\delta \eta_i^v \rightarrow \xi_i$ si $v \rightarrow \infty$; en vertu de (I.2.1), on peut supposer $\eta_i^v \in C^{q+1}(\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{F})$. En appliquant le procédé diagonal à la suite double $(\eta_i^v)_{v \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}}$, on en déduit que $\xi \in \bar{B}^{q+1}(\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{F})$. Compte tenu de (I.12.2) on voit que $\alpha = \infty$.

(I.15) COROLLAIRE. Avec la condition supplémentaire aux hypothèses du théorème (I.14): le morphisme $\pi: X \rightarrow S$ est q -complet, on a

$$H^n(X(S'), \mathcal{F}) = H^n(X_c(S'), \mathcal{F}) = 0$$

pour $n > q+1$ et $c \in \mathbb{R}$.

3. Théorèmes d'épuisement en degré $q + 1$

Soit $\pi: X \rightarrow S$ un morphisme q convexe; nous dirons que π satisfait à l'hypothèse (sép) si la propriété suivante est vérifiée:

(I.16) HYPOTHÈSE (sép). *Quels que soient une fonction d'épuisement φ de constante exceptionnelle $\gamma = \gamma(\varphi)$, $S' \Subset S$ un ouvert de Stein et $c \in \mathbf{R}$, $\gamma < c$, l'espace $H^{q+1}(X_c(S'), \mathcal{F})$ est séparé pour tout \mathcal{O}_S -module cohérent \mathcal{F} (c'est donc un espace de Fréchet).*

(I.16) est équivalent à:

$$B^{q+1}(\mathcal{U}_c(S'), \mathcal{F}) \subset Z^{q+1}(\mathcal{U}_c(S'), \mathcal{F}).$$

est un sous espace fermé, \mathcal{U} étant un recouvrement standard arbitraire de X .

Nous montrerons au chapitre IV que tout morphisme q -convexe vérifie l'hypothèse (sép).

(I.17) THÉORÈME. *Soit $\pi: X \rightarrow S$ un morphisme q -convexe qui vérifie l'hypothèse (sép) et φ une fonction d'épuisement de constante exceptionnelle γ . Soit $S' \Subset S$ un ouvert de Stein; alors, pour $c, c' \in \mathbf{R}$, $\gamma < c < c'$,*

$$\begin{aligned} Z^q(\mathcal{U}_{c'}(S'), \mathcal{F}) &\rightarrow Z^q(\mathcal{U}_c(S'), \mathcal{F}) \\ Z^q(\mathcal{U}(S'), \mathcal{F}) &\rightarrow Z^q(\mathcal{U}_c(S'), \mathcal{F}) \end{aligned}$$

sont d'image dense (où \mathcal{U} est un recouvrement standard de X).

La démonstration de ce théorème, qui est analogue à la partie a) de la démonstration de (I.13), découle des deux lemmes suivants:

(I.18) LEMME. *Supposons que l'hypothèse (sép) soit vérifiée. Soit $S' \Subset S$ un ouvert de Stein et $c \in \mathbf{R}$, $\gamma < c$. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $c' \in \mathbf{R}$, $c < c' \leq \varepsilon_0$,*

$$Z^q(\mathcal{U}_{c'}(S'), \mathcal{F}) \rightarrow Z^q(\mathcal{U}_c(S'), \mathcal{F})$$

soit d'image dense.

(I.19) LEMME. (Principe d'épuisement de Mittag-Leffler). *Soit $(X_i, \varrho_i)_{i \in \mathbf{N}}$ un système projectif d'espaces métriques complets tel que $\varrho_i: X_{i+1} \rightarrow X_i$ soit d'image dense. Alors, pour tout $i_0 \in \mathbf{N}$, la projection*

$$\varprojlim X_i \rightarrow X_{i_0}$$

est d'image dense. En particulier, si pour un i_0 , $X_{i_0} \neq \emptyset$, alors $\varprojlim X_i \neq \emptyset$.

Le lemme (I.19) est démontré dans [2], page 246.

Démonstration de (I.18). Définissons ε_0 comme dans (I.11) et introduisons les notations

$$X_k = X_k(S'), \quad U_i = U_i(S'), \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}(S').$$

($X_k(S')$, $U_i(S')$ comme dans (I.11)). Par induction, il suffit de montrer que

$$Z^q(\mathcal{U}_{X_{k+1}}, \mathcal{F}) \rightarrow Z^q(\mathcal{U}_{X_k}, \mathcal{F}) \quad 0 \leq k \leq N-1$$

est d'image dense. Compte tenu de (I.2.3) et (I.3), on peut supposer que

$$\text{Nerf } \mathcal{U}_{X_{k+1}} = \text{Nerf } \mathcal{U}_{X_k} \cup \text{Nerf } \mathcal{U}_{X_{k+1} \cap U_{k+1}}. \quad (*)$$

Soit $\xi \in Z^q(\mathcal{U}_{X_k}, \mathcal{F})$; en vertu de (I.11) il existe $(\tilde{\eta}^v)_{v \in \mathbf{N}} \subset Z^q(\mathcal{U}_{X_{k+1} \cap U_{k+1}}, \mathcal{F})$ tel que

$$\tilde{\eta}^v \mid X_k \cap U_{k+1} \rightarrow \xi \mid X_k \cap U_{k+1}.$$

Posons (compte tenu de (*)), pour $(i_0, \dots, i_q) \in \text{Nerf } \mathcal{U}_{X_{k+1}}$

$$\eta_{i_0 \dots i_q}^v = \begin{cases} \xi_{i_0 \dots i_q} & \text{si } (i_0, \dots, i_q) \in \text{Nerf } \mathcal{U}_{X_k} \\ \tilde{\eta}_{i_0 \dots i_q}^v & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$\delta \eta^v \rightarrow 0 \quad \text{dans } B^{q+1}(\mathcal{U}_{X_{k+1}}, \mathcal{F})$$

et comme

$$\delta: C^q(\mathcal{U}_{X_{k+1}}, \mathcal{F}) \rightarrow B^{q+1}(\mathcal{U}_{X_{k+1}}, \mathcal{F})$$

est un morphisme surjectif d'espaces de Fréchet, il existe $(\gamma^v) \subset C^q(\mathcal{U}_{X_{k+1}}, \mathcal{F})$ tel que $\gamma^v \rightarrow 0$, $\delta \gamma^v = \delta \eta^v$. Alors $\eta^v - \gamma^v \in Z^q(\mathcal{U}_{X_{k+1}}, \mathcal{F})$ et $\eta^v - \gamma^v \rightarrow \xi$.

(I.20) THÉORÈME. Soit $\pi: X \rightarrow S$ un morphisme q -convexe, φ une fonction d'épuisement de constante exceptionnelle γ , \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module cohérent et supposons que l'hypothèse (sép) soit vérifiée. Alors, pour tout ouvert de Stein $S' \Subset S$, on a:

1) $H^{q+1}(X(S'), \mathcal{F})$ est séparé

2) pour $c, c' \in \mathbf{R}$, $\gamma < c < c'$,

$$H^{q+1}(X_{c'}(S'), \mathcal{F}) \rightarrow H^{q+1}(X_c(S'), \mathcal{F})$$

$$H^{q+1}(X(S'), \mathcal{F}) \rightarrow H^{q+1}(X_c(S'), \mathcal{F})$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. Par (I.13.2) on a: $1) \Rightarrow 2)$. Pour prouver 1), il suffit de montrer que $B^{q+1}(\mathcal{U}(S'), \mathcal{F}) \subset Z^{q+1}(\mathcal{U}(S'), \mathcal{F})$ est un sous-espace fermé pour un recouvrement standard \mathcal{U} de X . Soit $(c_i) \subset \mathbf{R}$ une suite croissante non bornée et $\xi \in \bar{B}^{q+1} \times (\mathcal{U}(S'), \mathcal{F})$; en vertu de (sép) on a:

$$\xi \mid X_{c_i} = \delta \eta, \quad \eta_i \in C^q(\mathcal{U}_{c_i}(S'), \mathcal{F}).$$

Compte tenu de (I.17), on peut appliquer (I.19) au système projectif

$$(\eta_i + Z^q(\mathcal{U}_{c_i}(S'), \mathcal{F}))_{i \in \mathbf{N}}.$$

(I.21) COROLLAIRE. *Avec la condition supplémentaire aux hypothèses du théorème (I.20): φ est q -complet, on a:*

$$H^n(X(S'), \mathcal{F}) = H^n(X_c(S'), \mathcal{F}) = 0$$

pour $n \geq q + 1$ et $c \in \mathbf{R}$.

II. RECOUVREMENTS ET COMPLEXES ASSOCIÉS

Ce chapitre est destiné à l'étude du complexe image directe d'un morphisme q -convexe $\pi: X \rightarrow S$ pour un faisceau cohérent \mathcal{F} sur X . Pour cela, on compare $H^\bullet(X_c, \mathcal{F})$ à la cohomologie d'une famille finie de polydisques relatifs de X (famille distinguée, voir paragraphe 1 et 2) qui recouvrent X_c . A l'aide des systèmes de faisceaux liés on construit au paragraphe 3 un complexe de faisceaux quasi libres dont la cohomologie est isomorphe à celle définie par la famille distinguées (pour la définition des faisceaux quasi libres, voir (II.13)). Les propriétés de ces trois cohomologies sont énoncées dans (II.11).

Nous supposons toujours donnée la situation suivante: $\pi: X \rightarrow S$ est un morphisme globalement q -convexe, φ une fonction d'épuisement de constante exceptionnelle γ , \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module cohérent.

1. Familles distinguées

Soit $D(r) = \{z \in \mathbf{C}^N \mid |z_i| < r\}$, $r > 0$, le polydisque de rayon r . Soit $U \subset X$ un ouvert et $j: U \rightarrow S \times D(1)$ un morphisme.

(II.1) DÉFINITION. Le couple (U, j) (ou U tout court) est un ouvert admissible si j est un plongement fermé tel que le diagramme suivant commute ($p: S \times D(1) \rightarrow S$

désigne la projection)

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{j} & S \times D(1) \\ & \searrow \pi & \swarrow p \\ & & S \end{array} .$$

Posons, pour $0 < r \leq 1$ et $S' \subset S$

$$U(r, S') = j^{-1}(D(r) \times S').$$

(II.2) LEMME. Soient $0 < r < r' \leq 1$, $x \in X$ et V un voisinage de x . Alors il existe un ouvert admissible (U, j) tel que

$$\text{a) } U \subset V, \quad \text{b) } x \in U(r', S), \quad \text{c) } U(r, S) = \emptyset.$$

Démonstration. Soit U un ouvert de X , $x \in U \subset V$, et tel qu'il existe un plongement fermé $f: U \rightarrow D(1)$ avec $f(x) = 0$. Soit r^* , $r < r^* < r'$ et $D_1(1) \subset \mathbf{C}$; posons

$$\begin{aligned} j: U &\rightarrow S \times D(1) \times D_1(1) \\ y &\rightarrow (\pi(y), f(y), r^*); \end{aligned}$$

(U, j) répond à la question.

Soit $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts admissibles; nous noterons, pour $0 < r \leq 1$, $S' \subset S$,

$$\mathfrak{U}(r, S') = (U_i(r, S'))_{i \in I}, \quad |\mathfrak{U}(r, S')| = \bigcup_{i \in I} U_i(r, S').$$

(II.3) DÉFINITION. Soient $c_i \in \mathbf{R}$, $0 \leq i \leq p$, $p > 0$, $c_0 < c_1 < \dots < c_p$ et $S_0 \subset S$. Une famille $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ est distinguée pour c_0, \dots, c_p au dessus de S_0 si \mathfrak{U} est une famille finie d'ouverts admissibles et s'il existe des nombres réels r_k, R_k , $1 \leq k \leq p$,

$$0 < r_1 < R_1 < r_2 < R_2 < \dots < r_p < R_p \leq 1$$

tels que, pour tout ouvert $S' \subset S_0$, on ait

$$\overline{X_{c_{k-1}}(S')} \subset |\mathfrak{U}(r_k, S')| \subset \overline{|\mathfrak{U}(R_k, S')|} \cap X(S') \subset X_{c_k}(S'), \quad k = 1, \dots, p.$$

(II.4) PROPOSITION. Soient $c_i \in \mathbf{R}$, $0 \leq i \leq p$, $c_0 < \dots < c_p$ et $S_0 \Subset S$ un ouvert. Alors il existe une famille \mathfrak{U} distinguée pour c_0, \dots, c_p , au-dessus de S_0 .

Démonstration. Soient $R_k \in \mathbf{R}$, $1 \leq k \leq p$, tels que $0 < R_1 < \dots < R_p < 1$. Considérons, pour tout k , la famille des ouverts admissibles U^k vérifiant les conditions:

$$\text{a) } U^k \Subset X_{c_k}, \quad \text{b) } U^k(R_{k-1}, S) = \emptyset.$$

Alors les $U^k(R_k, S)$ recouvrent le compact $\overline{X_{c_{k-1}}(S_0)}$ (en vertu de (II.2)) donc un

nombre fini $U_1^k(R_k, S), \dots, U_{l_k}^k(R_k, S)$ d'entre-eux. Pour $r_k < R_k$ assez grand, les $U_1^k(r_k, S), \dots, U_{l_k}^k(r_k, S)$ recouvrent encore $\overline{X_{c_{k-1}}(S_0)}$. La famille

$$\mathfrak{U} = (U_l^k)_{1 \leq l \leq l_k, 1 \leq k \leq p}$$

vérifie les propriétés, les r_k, R_k étant ceux définis dans la démonstration.

2. Complexes associés

Soit $\mathfrak{U} = (U_i)_{1 \leq i \leq N}$ une famille distinguée pour c_0, \dots, c_p au-dessus de $S_0 (S_0 \in S)$. Désignons par $C \cdot (\mathfrak{U}(r', S'), \mathcal{F})$ le complexe de cochaînes alternées à coefficients dans \mathcal{F} , soit δ l'opérateur cobord. Les C^l sont des $\mathcal{O}_S(S')$ -modules et δ est $\mathcal{O}_S(S')$ -linéaire.

Pour $0 < r < r' < 1$, soit

$$C \cdot (\mathfrak{U}(r', S'), \mathcal{F}) \rightarrow C \cdot (\mathfrak{U}(r, S'), \mathcal{F}) \tag{a}$$

la restriction naturelle.

Il existe un recouvrement standard \mathcal{U} de X qui vérifie les propriétés suivantes: désignons par J_k l'ensemble d'indices de $\mathcal{U}_{c_k}(S_0)$; il existe

$$\tau_k: J_k \rightarrow \{1, \dots, N\}, \quad \sigma_k: \{1, \dots, N\} \rightarrow J_k$$

tels que

$$\tau_k \circ \sigma_k = \text{id}$$

et

$$\begin{aligned} U_\alpha(S_0) &\subset U_{\tau_k \alpha}(r_{k+1}, S_0) & k=0, \dots, p-1 \\ U_i(R_k, S_0) &\subset U_{\sigma_k i}(S_0) & k=1, \dots, p \end{aligned}$$

Pour $k=0, \dots, p-1$ et $S' \subset S_0$, on a

$$\tau_k^*: C \cdot (\mathfrak{U}(r_{k+1}, S'), \mathcal{F}) \rightarrow C \cdot (\mathcal{U}_{c_k}(S'), \mathcal{F}). \tag{b}$$

Pour $k=1, \dots, p$ et $S' \subset S_0$, on a

$$\sigma_k^*: C \cdot (\mathcal{U}_{c_k}(S'), \mathcal{F}) \rightarrow C \cdot (\mathfrak{U}(R_k, S'), \mathcal{F}). \tag{c}$$

Pour $k=1, \dots, p-1$, le diagramme suivant est alors commutatif:

$$\begin{array}{ccc} C \cdot (\mathfrak{U}(r_{k+1}, S'), \mathcal{F}) & \xrightarrow{(b)} & C \cdot (\mathcal{U}_{c_k}(S'), \mathcal{F}) \\ & \searrow (a) & \downarrow (c) \\ & & C \cdot (\mathfrak{U}(R_k, S'), \mathcal{F}) \end{array} \cdot$$

On définit alors:

1) Pour $r_k \leq r \leq R_k, k = 1, \dots, p$

$$C \cdot (\mathcal{U}(r, S'), \mathcal{F}) \rightarrow C \cdot (\mathcal{U}_{c_{k-1}}(S'), \mathcal{F}) \quad (1)$$

le composé de (a) et (b).

2) Pour $r \leq R_k, k = 1, \dots, p$

$$C \cdot (\mathcal{U}_{c_k}(S'), \mathcal{F}) \rightarrow C \cdot (\mathcal{U}(r, S'), \mathcal{F}) \quad (2)$$

le composé de (c) et (a).

3) Pour $k = 1, \dots, p$

$$C \cdot (\mathcal{U}_{c_k}(S'), \mathcal{F}) \rightarrow C \cdot (\mathcal{U}_{c_{k-1}}(S'), \mathcal{F}) \quad (3)$$

de la manière suivante: soit $r_k \leq r \leq R_k$; (3) est alors le composé

$$C \cdot (\mathcal{U}_{c_k}(S'), \mathcal{F}) \xrightarrow{(2)} C \cdot (\mathcal{U}(r, S'), \mathcal{F}) \xrightarrow{(1)} C \cdot (\mathcal{U}_{c_{k-1}}(S'), \mathcal{F});$$

cette définition étant indépendante du choix de r .

(II.5) *Remarques.* 1) Si $r_k \leq r \leq R_k, r_{k-1} \leq r' \leq R_{k-1}$, le composé

$$C \cdot (\mathcal{U}(r, S'), \mathcal{F}) \xrightarrow{(1)} C \cdot (\mathcal{U}_{c_{k-1}}(S'), \mathcal{F}) \xrightarrow{(2)} C \cdot (\mathcal{U}(r', S'), \mathcal{F})$$

est le morphisme de restriction (a).

2) Le morphisme (3) n'est pas le morphisme de restriction

$$\varrho: C \cdot (\mathcal{U}_{c_k}(S'), \mathcal{F}) \rightarrow C \cdot (\mathcal{U}_{c_{k-1}}(S'), \mathcal{F})$$

induit par $\mathcal{U}_{c_{k-1}}(S') \subset \mathcal{U}_{c_k}(S')$. Mais les homomorphismes induits en cohomologie

$$\varrho^*, (3)^*: H^l(C \cdot (\mathcal{U}_{c_k}(S'), \mathcal{F})) \rightarrow H^l(C \cdot (\mathcal{U}_{c_{k-1}}(S'), \mathcal{F}))$$

sont les mêmes ([5], Lemma 2.6.1).

Soient S', S'' des ouverts de $S, S'' \subset S' \subset S_0$, on a des morphismes de restriction

$$\begin{aligned} C \cdot (\mathcal{U}_{c_k}(S'), \mathcal{F}) &\rightarrow C \cdot (\mathcal{U}_{c_k}(S''), \mathcal{F}) \\ C \cdot (\mathcal{U}(r, S'), \mathcal{F}) &\rightarrow C \cdot (\mathcal{U}(r, S''), \mathcal{F}). \end{aligned}$$

ces morphismes étant compatibles avec les morphismes définis ci-dessus.

3. Systèmes de faisceaux liés

Nous rappelons ici des résultats décrits dans [3], où l'on trouvera une description détaillée avec démonstrations.

Soit $\mathfrak{U} = ((U_i, j_i))_{1 \leq i \leq N}$ une famille finie d'ouverts admissibles de X , $j_i: U_i \rightarrow S \times D_i(1)$. Soit

$$A_n = \{(k_0, \dots, k_n) \mid 0 < k_0 < \dots < k_n \leq N\}, \quad A = \bigcup_{n \geq 0} A_n.$$

Pour $\alpha \in A$, $S' \subset S$ et $r \leq 1$, on a par produit fibré, un plongement fermé (au-dessus de S')

$$j_\alpha: U_\alpha(r, S') \rightarrow S' \times D_\alpha(r)$$

où

$$U_\alpha(r, S') = \bigcap_{i \in \alpha} U_i(r, S'), \quad D_\alpha(r) = \prod_{i \in \alpha} D_i(r).$$

Pour $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \subset \beta$ on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U_\beta(r, S') & \xrightarrow{i} & U_\alpha(r, S') \\ \downarrow j_\beta & & \downarrow j_\alpha \\ S' \times D_\beta(r) & \xrightarrow{\pi_{\alpha\beta}} & S' \times D_\alpha(r) \end{array}$$

où $\pi_{\alpha\beta}$ est la projection et i l'inclusion.

(II.6) DÉFINITION. Un système de faisceaux liés $(\mathfrak{G}_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$ sur $(S' \times D_\alpha(r), \pi_{\alpha\beta})$, $r \leq 1$, $S' \subset S$, est la donnée de:

- a) une famille $(\mathfrak{G}_\alpha)_{\alpha \in A}$ de faisceaux analytiques sur $S' \times D_\alpha(r)$.
- b) une famille $(\psi_{\alpha\beta})_{\alpha \subset \beta}$ de morphismes de faisceaux

$$\psi_{\alpha\beta}: \mathfrak{G}_\alpha \rightarrow (\pi_{\alpha\beta})_* \mathfrak{G}_\beta$$

vérifiant les conditions:

$$\psi_{\alpha\alpha} = \text{id}, \quad \psi_{\gamma\alpha} = ((\pi_{\alpha\beta})_* \psi_{\gamma\beta}) \circ \psi_{\beta\alpha}.$$

On définit de manière évidente un morphisme de systèmes de faisceaux liés.

Si \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -module, \mathcal{F} induit un système de faisceaux liés $j_* \mathcal{F}: (j_* \mathcal{F})_\alpha = (j_\alpha)_* \mathcal{F}$.

(II.7) LEMME. Soit \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module cohérent, $S' \subset S$ un ouvert de Stein. Alors pour tout ouvert de Stein $S_0 \subset \subset S'$ et $r < 1$, il existe une résolution

$$\rightarrow \mathcal{R}^k \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{R}^1 \rightarrow \mathcal{R}^0 \rightarrow j_* \mathcal{F} \rightarrow 0$$

sur $(S_0 \times D_\alpha(r), \pi_{\alpha\beta})$, où les $\mathcal{R}^k = (\mathcal{R}_\alpha^k, \psi_{\alpha\beta}^k)$ sont des systèmes de faisceaux liés et les \mathcal{R}_α^k des faisceaux libres de type fini sur $S_0 \times D_\alpha(r)$.

Soit $(\mathfrak{G}_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$ un système de faisceaux liés sur $(S' \times D_\alpha(r), \pi_{\alpha\beta})$; posons

$$C^n(r, S', \mathfrak{G}) = \bigoplus_{\alpha \in A_n} \Gamma(S' \times D_\alpha(r), \mathfrak{G}_\alpha)$$

et soit

$$\delta: C^n(r, S', \mathfrak{G}) \rightarrow C^{n+1}(r, S', \mathfrak{G})$$

définie de la façon suivante: soit $\xi = (\xi_\alpha) \in C^n(r, S', \mathfrak{G})$, alors

$$(\delta\xi)_\beta = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \psi_{\beta\beta_i}(\xi_{\beta_i})$$

où $\beta = (k_0, \dots, k_{n+1}) \in A_{n+1}$ et $\beta_i = (k_0, \dots, \hat{k}_i, \dots, k_{n+1})$.

Si \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -module, on a un isomorphisme

$$C \cdot (\mathfrak{U}(r, S'), \mathcal{F}) \rightarrow C \cdot (r, S', j_* \mathcal{F}). \tag{*}$$

Soit \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module cohérent et soient r_0, S_0 tels que que la résolution du lemme (II.7) existe au-dessus de $(S_0 \times D_\alpha(r_0), \pi_{\alpha\beta})$. Pour $r \leq r_0$ et $S' \subset S_0$ considérons le complexe double $C \cdot (r, S', \mathcal{R}^\bullet)$ et soit $\check{C} \cdot (r, S')$ le complexe simple associé:

$$\check{C}^n(r, S') = \bigoplus_{l-k=n}^{\infty} C^l(r, S'), \mathcal{R}^k.$$

L'homomorphisme $C \cdot (r, S', \mathcal{R}^0) \rightarrow C \cdot (r, S', j_* \mathcal{F})$ définit un morphisme $\check{C} \cdot (r, S') \rightarrow C \cdot (r, S', j_* \mathcal{F})$ d'où, compte tenu de (*)

$$\tau: \check{C} \cdot (r, S') \rightarrow C \cdot (\mathfrak{U}(r, S'), \mathcal{F}).$$

(II.8) PROPOSITION. Avec les notations introduites ci-dessus et pour $r \leq r_0, S' \subset S_0$ un ouvert de Stein, on a

1) $\tau: \check{C} \cdot (r, S') \rightarrow C \cdot (\mathfrak{U}(r, S'), \mathcal{F})$

est un quasi-isomorphisme (c.à.d. τ induit un isomorphisme en cohomologie).

2) $\tau^n: \check{C}^n(r, S') \rightarrow C^n(\mathfrak{U}(r, S'), \mathcal{F})$ est surjectif pour tout n .

3) Pour tout $n \geq 0$, il existe un nombre fini de polydisques $D_i(r) \subset \mathbb{C}^{N_i}, 1 \leq i \leq k$, tels que

$$\check{C}^n(r, S') = \bigoplus \Gamma(S' \times D_i(r), \mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^{N_i}}).$$

4. Propriétés des complexes

(II.9) *Notations.*

$$C^\bullet(c, S') = C^\bullet(\mathcal{U}_c(S'), \mathcal{F})$$

$$C^\bullet(r, S') = C^\bullet(\mathfrak{U}(r, S'), \mathcal{F}).$$

Nous pouvons résumer les résultats obtenus jusqu'ici de la façon suivante:

Soit $\pi: X \rightarrow S$ un morphisme q -convexe, φ une fonction d'épuisement de constante exceptionnelle γ et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module cohérent. Soit $S_0 \subseteq S$ un ouvert et $c_0, c' \in \mathbf{R}$, $\gamma < c_0 < c'$ et $p \in \mathbf{N}$. Soient $c_1, \dots, c_p \in \mathbf{R}$, $c_0 < c_1 < \dots < c_p \leq c'$. Alors il existe

- a) une famille $\mathfrak{U} = (U_i)_{1 \leq i \leq N}$ distinguée pour c_0, \dots, c_p au-dessus de S_0 ;
- b) un recouvrement standard \mathcal{U} de X jouissant des propriétés du numéro 2);
- c) un complexe $\check{C}^\bullet(R_p, S_0)$ construit au numéro 3). (Alors $\check{C}^\bullet(r, S')$ est bien défini pour $r \leq R_p, S' \subset S_0$).

On obtient alors pour tout ouvert $S' \subset S_0$ un diagramme commutatif, les morphismes étant ceux définis dans 2) et 3):

$$\begin{array}{ccc}
 & C^\bullet(c_p, S') & \\
 & \downarrow & \\
 \check{C}^\bullet(r, S') \xrightarrow{\tau} & C^\bullet(r, S') & r_p \leq r \leq R_p \\
 \downarrow & \downarrow & \\
 & C^\bullet(c_{p-1}, S') & \\
 & \vdots & \\
 & C^\bullet(c_k, S') & \\
 & \vdots & \\
 \check{C}^\bullet(r', S') \xrightarrow{\tau} & C^\bullet(r', S') & r_l \leq r' \leq R_l \\
 & \downarrow & \\
 & C^\bullet(c_l, S') &
 \end{array} \tag{II.10}$$

(II.11) PROPOSITION. Soit $S' \subset S_0$ un ouvert de Stein.

1) Pour $k, l, 0 \leq l \leq k \leq p$,

$$H^n(C^\bullet(c_k, S')) \rightarrow H^n(C^\bullet(c_l, S'))$$

est: surjectif pour $n \geq q + 1$, bijectif pour $n > q + 1$.

- 2) Pour $k, l, 0 \leq l \leq k \leq p$, $H^{q+1}(C \cdot(c_k, S')) \rightarrow H^{q+1}(C \cdot(c_l, S'))$ est bijectif.
 3) Pour $k, 0 \leq k \leq p$ et $r \geq r_{k+1}$,

$$H^n(C \cdot(r, S')) \rightarrow H^n(C \cdot(c_k, S'))$$

est surjectif pour $n \geq q+1$

- 4) Pour $r, r_1 \leq r \leq R_p$,

$$\tau^*: H^n(\check{C} \cdot(r, S')) \rightarrow H^n(C \cdot(r, S'))$$

est bijectif, $n \geq 0$.

- 5) Pour $n > N$ ($N = \text{nombre d'ouverts de } \mathcal{U}$)

$$C^n(r, S') = 0, \quad \check{C}^n(r, S') = 0.$$

- 6) Soit $Q = \dim X_c(S')$ ($Q < \infty$). Les complexes

$$C \cdot(c_k, S'), \quad C \cdot(r, S'), \quad \check{C} \cdot(r, S')$$

sont acycliques en degré $> Q$.

Démonstration. 1 et 2) résultent de (I.13), de (II.5.2) et du théorème de de Leray sur les recouvrement acycliques; 3) résulte de 1); 4) résulte de (II.8.1); 5) est évident; 6) résulte du théorème de Leray et d'un théorème classique ([11], Satz 2).

5. Complexes de préfaisceaux et faisceaux quasi libres

Pour étudier les propriétés des faisceaux images directes $R^n \pi_* \mathcal{F}$, nous introduisons les complexes de préfaisceaux de \mathcal{O}_S -modules

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \cdot(c): U &\mapsto C \cdot(c, U) \\ \mathcal{C} \cdot(r): U &\mapsto C \cdot(r, U) \\ \check{\mathcal{C}} \cdot(r): U &\mapsto \check{C} \cdot(r, U) \end{aligned} \tag{II.12}$$

où $U \subset S_0$ est un ouvert (avec les mêmes notations que cidessus).

Remarquons que $\mathcal{C} \cdot(r)$, $\check{\mathcal{C}} \cdot(r)$ sont même des faisceaux.

(II.13). DÉFINITION. Les \mathcal{O}_S -modules de la forme

$$\tilde{\mathcal{L}}(R) = \bigoplus_{1 \leq i \leq I} p^i_* \mathcal{O}_{S \times D_i(R)}$$

sont appelés \mathcal{O}_S -modules quasi libres (ou faisceaux quasi libres), où $I \in \mathbb{N}$, $D_i(R) \subset \mathbb{C}^{N_i}$ est un polydisque de rayon $R > 0$ indépendant de i ($N_i \geq 0$, si $N_i = 0$, $D_i(R)$ est un point) et $p^i: S \times D_i(R) \rightarrow S$ la projection.

Etant donné $\tilde{\mathcal{L}}(R) = \bigoplus p_*^i \mathcal{O}_{S \times D_i(R)}$, on définit, pour $r < R$, $\tilde{\mathcal{L}}(r) = \bigoplus p_*^i \mathcal{O}_{S \times D_i(r)}$ et on a un homomorphisme de restriction $\beta: \tilde{\mathcal{L}}(R) \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}(r)$. Nous étudierons au chapitre IV des propriétés intéressantes des faisceaux quasi libres.

Le diagramme (II.10), transcrit en termes de préfaisceaux, devient

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{C}^\bullet(c_p) & \\
 & \downarrow & \\
 \check{\mathcal{C}}^\bullet(r') & \rightarrow & \mathcal{C}^\bullet(r') \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots \\
 \check{\mathcal{C}}^\bullet(r) & \rightarrow & \mathcal{C}^\bullet(r) \\
 & & \downarrow \\
 & & \mathcal{C}^\bullet(c_0)
 \end{array} \tag{II.14}$$

où les $\check{\mathcal{C}}^\bullet$ sont des complexes de faisceaux quasi libres.

(II.15) *Remarque.* Désignons par $F\mathcal{G}$ le faisceau associé à un préfaisceau \mathcal{G} . Alors

$$R^n \pi_{c*} \mathcal{F} = H^n(F\mathcal{C}^\bullet(c)) = FH^n(\mathcal{C}^\bullet(c)).$$

III. TECHNIQUES DE DÉMONSTRATION

Le but de ce chapitre est de démontrer les affirmations $A(q+1)$ et $B(q)$, qui sont énoncées dans (III.8) et (III.10). La démonstration, qui suit les méthodes de [3], utilise des techniques d'espaces de Fréchet. On notera que la cohérence des faisceaux $R^n \pi_{c*} \mathcal{F}$ pour $n > q+1$ (avec $\pi: X \rightarrow S$ q -convexe) découle déjà de $A(q+1)$.

1. Topologies

Soit (S, \mathcal{O}_S) un espace analytique et \mathcal{F} un \mathcal{O}_S -module cohérent. Alors, pour tout ouvert $S' \subset S$, $\mathcal{F}(S')$ est muni naturellement d'une structure d'espace de Fréchet. Par semi-norme sur $\mathcal{F}(S')$, nous entendrons toujours semi-norme continue; une semi-norme sur $\mathcal{O}_S(S')$ sera de plus supposée multiplicative, à savoir $q(xy) \leq q(x)q(y)$.

(III.1) DÉFINITION. Soit p une semi-norme sur $\mathcal{F}(S)$; une semi-norme q sur $\mathcal{F}(S')$ est adaptée à p si

$$q \circ \beta \leq p$$

où $\beta: \mathcal{F}(S) \rightarrow \mathcal{F}(S')$ désigne la restriction.

(III.2) LEMME. Soit $S' \subset S$; alors il existe une semi-norme p sur $\mathcal{F}(S)$ telle que la famille des semi-normes sur $\mathcal{F}(S')$ adaptées à p définissent la topologie de $\mathcal{F}(S')$.

Soit $D(R) \subset \mathbb{C}^N$ un polydisque et z_1, \dots, z_N les coordonnées canoniques de \mathbb{C}^N .

(III.3) LEMME. Tout $x \in \mathcal{O}_{S \times D(R)}(S \times D(R))$ admet un développement unique en série de Taylor

$$x = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N} a_\alpha \left(\frac{z}{R} \right)^\alpha \quad a_\alpha \in \mathcal{O}_S(S)$$

et la série

$$\sum_{\alpha} q(a_\alpha) \left(\frac{r}{R} \right)^{|\alpha|}$$

converge pour toute semi-norme q sur $\mathcal{O}_S(S)$ et tout $r < R$ (pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ on pose $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$).

Les $(z/R)^\alpha$ forment donc une $\mathcal{O}_S(S)$ -base Fréchetique de $\mathcal{O}_{S \times D(R)}(S \times D(R))$ que nous noterons $(\zeta_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^N}$. Remarquons que la restriction de la base de $\mathcal{O}(S \times D(R))$ à $S' \times D(R)$ est la base de $\mathcal{O}(S' \times D(R))$.

Introduisons les semi-normes (multiplicatives) sur $\mathcal{O}(S \times D(R))$:

$$\text{pour } x = \sum_{\alpha} a_\alpha \zeta_\alpha, \quad \|x\|_{qr} = \sum_{\alpha} q(a_\alpha) \left(\frac{r}{R} \right)^{|\alpha|}$$

où q est une semi-norme sur $\mathcal{O}_S(S)$ et $r < R$. On vérifie que la topologie définie par ces semi-normes est la topologie d'espace de Fréchet naturelle de $\mathcal{O}(S \times D(R))$.

Soit $\mathcal{L}(R) = \bigoplus_{1 \leq i \leq I} p_*^i \mathcal{O}_{S \times D_i(R)}$, avec $D_i(R) \subset \mathbb{C}^{N_i}$, un \mathcal{O}_S -module quasi libre. Alors $\mathcal{L}(R)(S)$ est muni d'une structure d'espace de Fréchet et il existe une $\mathcal{O}_S(S)$ -base (réunion des bases des $\mathcal{O}_{S \times D_i(R)}(S \times D_i(R))$) que nous noterons $(\zeta_\alpha)_{\alpha \in A}$, où $A = \{(i, \alpha^i) \mid 1 \leq i \leq I \text{ et } \alpha^i \in \mathbb{N}^{N_i}\}$. Pour $\alpha = (i, \alpha^i)$, soit $|\alpha| = |\alpha^i|$. Si $x = (x_1, \dots, x_I) \in \mathcal{L}(R)(S)$, posons:

$$\|x\|_{qr} = \sup_{1 \leq i \leq I} \{\|x_i\|_{qr}\}$$

où q est une semi-norme sur $\mathcal{O}_S(S)$ et $r < R$.

(III.4) Remarques. 1) Pour toute semi-norme q sur $\mathcal{O}_S(S)$, il existe une constante M telle que

$$\|\zeta_\alpha\|_{qr} \leq M \left(\frac{r}{R} \right)^{|\alpha|} \quad \forall \alpha \in A$$

2) Pour toute semi-norme q sur $\mathcal{O}_S(S)$ et $r < R$, on a

$$q(a_\alpha) \leq \left(\frac{R}{r}\right)^{|\alpha|} \|x\|_{qr} \quad x = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha \zeta_\alpha$$

3)

$$\sum_{\alpha \in A} q(a_\alpha) \|\zeta_\alpha\|_{qr} < \infty.$$

4) Soit $S' \subset S$, $r < R$ et $\beta: \tilde{\mathcal{L}}(R)(S) \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}(r)(S')$ la restriction. Soit p une semi-norme sur $\mathcal{O}_S(S)$, q une semi-norme sur $\mathcal{O}_S(S')$ adaptée à p et $\varrho < r$. Alors

$$\|\beta x\|_{q\varrho} \leq \|x\|_{pr} \quad \forall x \in \tilde{\mathcal{L}}(R)(S)$$

Soient \mathcal{F} , \mathcal{G} de spréfaisceaux de \mathcal{O}_S -modules Fréchétiens (c'est à dire pour tout ouvert $S' \subset S$, $\mathcal{F}(S')$ et $\mathcal{G}(S')$ sont munis d'une structure de $\mathcal{O}_S(S')$ -module Fréchétique et les applications de restriction sont continues).

(III.5) DÉFINITION. Un morphisme $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est continu si $\varphi: \mathcal{F}(S') \rightarrow \mathcal{G}(S')$ est un morphisme continu de $\mathcal{O}_S(S')$ -modules Fréchétique pour tout ouvert $S' \subset S$. Les préfaisceaux $\mathcal{E}^l(c_k)$, $\mathcal{E}^l(r)$ et $\tilde{\mathcal{E}}^l(r)$ de (II.12) sont des \mathcal{O}_S -modules Fréchétiens et les morphismes du diagramme (II.14) sont tous continus.

La remarque suivante, qui est une conséquence immédiate du théorème de Banach, nous sera utile dans la suite.

(III.6) *Remarque.* Considérons le diagramme

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \varphi \\ F \xrightarrow{\psi} G, \end{array}$$

E, F, G étant des espaces de Fréchet, φ, ψ des applications linéaires continues, ψ surjective. Soit (q_i) une famille de semi-normes sur E qui définit la topologie. Alors, pour toute semi-norme p sur F , il existe une semi-norme $q \in (q_i)$ et une constante M telles que

$$\forall x \in E, \exists y \in F \text{ tel que } \psi(y) = \varphi(x) \text{ et } p(y) \leq Mq(x).$$

2. Les affirmations $A(n)$ et $B(n)$

Soit S un espace de Stein, $\pi: X \rightarrow S$ un morphisme q -convexe, φ une fonction d'épuisement de constante exceptionnelle γ et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module cohérent.

Soit $S_* \in S$ un ouvert de Stein et $c_0 \in \mathbf{R}$, $\gamma < c_0$. On peut alors effectuer les constructions indiquées au chapitre II: soit $c' \in \mathbf{R}$, $c_0 < c'$ et S_0 un ouvert de Stein, $S_* \in S_0 \in S$. Posons

$$Q = \dim X_{c'}(S_0) \quad (Q < \infty), \quad p = Q - q + 3$$

et soient c_1, \dots, c_p , $c_0 < c_1 < \dots < c_p \leq c'$. Il existe alors une famille $\mathcal{U} = (U_i)_{1 \leq i \leq N}$ distinguée pour c_0, \dots, c_p au-dessus de S_0 , un recouvrement standard \mathcal{U} de X et un complexe $\mathcal{C}^\bullet(r)$ (au-dessus de S_0) tels qu'on ait un diagramme (II.14).

(III.7). Soit $q, r_p < q < R_p$, fixé une fois pour toutes.

(III.8) *Affirmation A(n)*, $n \geq q + 1$. Il existe un ouvert de Stein S_n , $S_* \in S_n \in S_0$ et un complexe de \mathcal{O}_S -modules libres de type fini

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{L}^n \xrightarrow{d} \mathcal{L}^{n+1} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{L}^Q \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

détant \mathcal{O}_S -linéaire et continu. De plus, il existe des morphismes continus (de \mathcal{O}_S -pré-faisceaux au-dessus de S_n)

$$\begin{aligned} \alpha^* : \mathcal{L}^\bullet &\rightarrow \mathcal{C}^\bullet(c_k) & k=0, \dots, p \\ \alpha^* : \mathcal{L}^\bullet &\rightarrow \mathcal{C}^\bullet(r) & r_1 \leq r \leq R_p \\ \alpha^* : \mathcal{L}^\bullet &\rightarrow \tilde{\mathcal{C}}^\bullet(r) & r_1 \leq r \leq R_p \end{aligned}$$

compatibles avec les morphismes du diagramme (II.14) et tels que pour tout ouvert de Stein $S' \subset S_n$

$$\alpha^* : H^l(\mathcal{L}^\bullet(S')) \rightarrow H^l(\mathcal{C}^\bullet(c_k, S'))$$

soit

- 1) bijectif pour $l > n$ et $k=0, \dots, p$;
- 2) surjectif pour $l=n$ et $k=0, \dots, p$ lorsque $n > q + 1$
 $k=0, 1$ lorsque $n = q + 1$.

Introduisons le « mapping cylinder » de α^* (pour la situation $A(n)$):

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^l(c_k) &= \mathcal{C}^l(c_k) \oplus \mathcal{L}^{l+1} \\ \mathcal{K}^l(r) &= \mathcal{C}^l(r) \oplus \mathcal{L}^{l+1} \\ \tilde{\mathcal{K}}^l(r) &= \tilde{\mathcal{C}}^l(r) \oplus \mathcal{L}^{l+1} \end{aligned}$$

la différentielle étant définie par

$$\begin{aligned} \partial : \mathcal{K}^l(c_k) &\rightarrow \mathcal{K}^{l+1}(c_k) \\ (x, y) &\longmapsto (\delta x + \alpha y, -dy) \end{aligned}$$

et de même pour les autres complexes. Nous noterons

$$K^l(c_k, S') = \mathcal{K}^l(c_k)(S') = C^l(c_k, S') \oplus \mathcal{L}^{l+1}(S') \quad \text{etc.}$$

(III.9). La propriété de α^* dans $A(n)$ est équivalente à: pour tout ouvert de Stein $S' \subset S_n$, le complexe $K^\bullet(c_k, S')$ est acyclique en degré

- 1) $l > n$ et $k = 0, \dots, p$
- 2) $l = n$ et $k = 0, \dots, p$ lorsque $n > q + 1$
 $k = 0, 1$ lorsque $n = q + 1$.

(III.10) *Affirmation B*($n-1$), $q+1 \leq n \leq Q+2$. On suppose que les conditions de l'affirmation $A(n)$ sont remplies. Alors il existe:

- 1) un ouvert de Stein S'_{n-1} , $S_* \Subset S'_{n-1} \Subset S_n$
- 2) ϱ_{n-1} , $r_s < \varrho_{n-1} < R_s$, avec $s = n - q + 1$ si $n = q + 1$
 $s = 1$ si $n = q + 1$
- 3) un morphisme \mathcal{O}_S -linéaire continu au-dessus de S'_{n-1}

$$\pi_{n-1}: \check{\mathcal{K}}^{n-1}(\varrho) \rightarrow Z^{n-1}(\check{\mathcal{K}}^\bullet(\varrho_{n-1}))$$

(avec ϱ comme dans (III.7) et $\check{\mathcal{K}}^\bullet$ comme ci-dessus) tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} Z^n(\check{\mathcal{K}}^\bullet(\varrho)) & \rightarrow & \check{\mathcal{K}}^n(\varrho) \\ & \searrow \beta & \downarrow \pi_{n-1} \\ & & Z^n(\check{\mathcal{K}}^\bullet(\varrho_{n-1})) \end{array}$$

(où β désigne la restriction).

La première partie de la démonstration du théorème de l'image directe consiste à prouver $A(q+1)$ et $B(q)$; pour cela, nous procédons par induction.

(III.11) *Schéma d'induction*

- 1) $A(Q+1)$ est vrai
- 2) $B(Q+1)$ est vrai
- 3) $A(n) + B(n) \Rightarrow B(n-1)$ $n \geq q + 1$
- 4) $B(n-1) \Rightarrow A(n-1)$ $n \geq q + 2$.

L'affirmation $A(Q+1)$ est trivialement vraie avec $\mathcal{L}^\bullet = 0$; cela en vertu de (II.11.6). D'autre part, les complexes \mathcal{L}^\bullet de $A(n+1)$ et de $A(n)$ seront les mêmes en degré $\geq n+1$, et les complexes $\check{\mathcal{K}}^\bullet$ pour les situations $A(n+1)$ et $A(n)$ seront donc les mêmes en degré $\geq n$.

3. Démonstration de $B(Q+1)$

(III.12) *Affirmation C*(m), $m \geq Q+1$. Il existe

- i) un ouvert de Stein S'_m , $S_* \Subset S'_m \Subset S_0$

- ii) $Q_m, r_p < Q_m < Q$ (Q comme dans (III.7))
- iii) un morphisme \mathcal{O}_S -linéaire continu au dessus de S'_m

$$\pi_m: \check{\mathcal{C}}^m(Q) \rightarrow Z^m(\check{\mathcal{C}}^\bullet(Q_m))$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif (avec β la restriction)

$$\begin{array}{ccc} \check{\mathcal{C}}^m(Q) & \hookrightarrow & Z^m(\check{\mathcal{C}}^\bullet(Q)) \\ \downarrow \pi_m & \swarrow \beta & \\ Z^m(\check{\mathcal{C}}^\bullet(Q_m)) & & \end{array}$$

Visiblement $C(Q+1) = B(Q+1)$. D'autre part, $C(m)$ est trivialement vrai si $m > N$, car $\check{\mathcal{C}}^m(r) = 0$ par (II.11.5). Montrons que $C(m) \Rightarrow C(m-1)$, $m > Q+1$. Soit S'_{m-1} un ouvert de Stein, $S_* \subseteq S'_{m-1} \subseteq S'_m$ et $Q_{m-1}, r_p < Q_{m-1} < Q_m$.

(III.13) LEMME. *Il existe un morphisme \mathcal{O}_S -linéaire continu au-dessus de S'_{m-1}*

$$h: \check{\mathcal{C}}^m(Q) \rightarrow \check{\mathcal{C}}^{m-1}(Q_{m-1})$$

tel que le diagramme suivant commute (avec β la restriction)

$$\begin{array}{ccc} & Z^m(\check{\mathcal{C}}^\bullet(Q)) & \\ & \swarrow h & \downarrow \beta \\ \check{\mathcal{C}}^{m-1}(Q_{m-1}) & \xrightarrow{\delta} & Z^m(\check{\mathcal{C}}^\bullet(Q_{m-1})) \end{array}$$

$C(m-1)$ est une conséquence immédiate du lemme: en effet, considérons le diagramme (au dessus de S'_{m-1})

$$\begin{array}{ccc} \check{\mathcal{C}}^{m-1}(Q) & \xrightarrow{\delta} & \check{\mathcal{C}}^m(Q) \\ \downarrow \beta & \swarrow h & \\ \check{\mathcal{C}}^{m-1}(Q_{m-1}) & & \end{array}$$

et posons $\pi_{m-1} = \beta - h \circ \delta$.

Pour démontrer le lemme, considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \check{\mathcal{C}}^m(Q, S'_m) & & \\ \downarrow \pi_m & & \\ \check{\mathcal{C}}^{m-1}(Q_m, S'_m) & \xrightarrow{\delta} & Z^m(\check{\mathcal{C}}^\bullet(Q_m, S'_m)) \end{array}$$

En vertu de (II.11.6), δ est un morphisme surjectif d'espaces de Fréchet. Soit $(\zeta_\alpha)_{\alpha \in A}$

la base de $\check{C}^m(\varrho, S'_m)$ et p une semi-norme sur $\mathcal{O}_S(S'_m)$ qui vérifie les conditions de (III.2) pour $S'_{m-1} \subseteq S'_m$. Par (III.6), il existe ϱ^* , $0 < \varrho^* < \varrho$, une semi-norme P sur $\mathcal{O}_S(S'_m)$, une constante M et $(\tilde{\eta}_\alpha)_{\alpha \in A} \subset C^{m-1}(\varrho_m, S'_m)$ tels que

$$\delta \tilde{\eta}_\alpha = \pi_m \zeta_\alpha \quad \|\tilde{\eta}_\alpha\|_{p_{\varrho_{m-1}}} \leq M \|\zeta_\alpha\|_{P_{\varrho^*}}$$

Soit $\eta_\alpha \in C^{m-1}(\varrho_{m-1}, S)$ la restriction de $\tilde{\eta}_\alpha$. Par (III.4.1 et 4), on a pour toute semi-norme q sur $\mathcal{O}_S(S)$ adaptée à p et $r < \varrho_{m-1}$

$$\|\eta_\alpha\|_{qr} \leq M' \left(\frac{\varrho^*}{\varrho} \right)^{|\alpha|}$$

On pose

$$\begin{aligned} h: \check{C}^m(\varrho) &\rightarrow \check{C}^{m-1}(\varrho_{m-1}) \\ x = \sum_\alpha a_\alpha \zeta_\alpha &\rightarrow \sum_\alpha a_\alpha \eta_\alpha \end{aligned}$$

Par (III.4.2), on a $q(a_\alpha) \leq (\varrho/R) \|x\|_{qR}$ pour $\varrho^* < R < \varrho$, donc $\sum q(a_\alpha) \|\eta_\alpha\|_{qr}$ converge pour q adaptée à p et $r < \varrho_{m-1}$. Alors $\sum a_\alpha \eta_\alpha$ converge vu qu'il existe suffisamment de semi-normes q adaptées à p .

4. $A(n) + B(n) \Rightarrow B(n-1)$, $n \geq q + 1$

Par $B(n)$, on a un morphisme \mathcal{O}_S -linéaire continu au-dessus de S_n

$$\pi_n: \check{\mathcal{X}}^n(\varrho) \rightarrow Z^n(\check{\mathcal{X}}^\bullet(\varrho_n))$$

qui jouit encore des propriétés de $B(n)$ ($\check{\mathcal{X}}^\bullet$ désigne ici le « mapping cylinder » pour la situation $A(n)$).

Soit ϱ_{n-1} , $r_s < \varrho_{n-1} < R_s$, ($s = n - q + 1$ si $n > q + 1$, $s = 1$ si $n = q + 1$) et soit S'_{n-1} un ouvert de Stein, $S_* \subseteq S'_{n-1} \subseteq S_n$.

(III.14) LEMME. *Il existe un morphisme \mathcal{O}_S -linéaire continu au-dessus de S'_{n-1}*

$$h: \check{\mathcal{X}}^n(\varrho) \rightarrow \check{\mathcal{X}}^{n-1}(\varrho_{n-1})$$

tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} & Z^n(\check{\mathcal{X}}^\bullet(\varrho)) & \\ & \swarrow h & \downarrow \beta \\ \check{\mathcal{X}}^{n-1}(\varrho_{n-1}) & \xrightarrow{\delta} & Z^n(\check{\mathcal{X}}^\bullet(\varrho_{n-1})) \end{array}$$

$B(n-1)$ est une conséquence immédiate du lemme; en effet, considérons le diagramme (au-dessus de S'_{n-1})

$$\begin{array}{ccc} \check{\mathcal{X}}^{n-1}(\varrho) & \xrightarrow{\partial} & \pm^n(\varrho) \\ \downarrow \beta & \nearrow h & \\ \pm^{n-1}(\varrho_{n-1}) & & \end{array}$$

On pose alors

$$\pi_{n-1} = \beta - h \circ \partial.$$

Pour démontrer le lemme, soit $\varrho^*, \varrho_{n-1} < \varrho^* < R_s$ (ϱ_{n-1} et s comme ci-dessus) et considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \check{\mathcal{X}}^n(\varrho, S_n) & & \\ \downarrow \bar{u}_n & & \\ Z^n(\check{\mathcal{X}}^\bullet(\varrho_n, S_n)) & & \\ \downarrow \beta & & \\ \check{\mathcal{X}}^{n-1}(\varrho^*, S_n) & \xrightarrow{\partial} & Z^n(\check{\mathcal{X}}^\bullet(\varrho^*, S_n)) \end{array}$$

(III.15). On a $\text{Im } \beta \circ \pi_n \subset \text{Im } \partial$.

On voit cela facilement en considérant le diagramme.

$$\begin{array}{ccc} \pm^n(\varrho_n, S_n) & \xrightarrow{\tau} & K^n(\varrho_n, S_n) \\ \downarrow \beta & & \downarrow \\ \pm^n(\varrho^*, S_n) & \xrightarrow{\tau} & K^n(\varrho^*, S_n) \end{array}$$

$K^n(c_s, S_n)$

et en tenant compte du fait que $K^\bullet(c_s, S_n)$ est acyclique en degré n (III.9).

Considérons le produit fibré:

$$N = \text{Ker} \{ \check{\mathcal{X}}^n(\varrho, S_n) \oplus \check{\mathcal{X}}^{n-1}(\varrho^*, S_n) \xrightarrow{\beta \circ \pi_n - \partial} Z^n(\check{\mathcal{X}}^\bullet(\varrho^*, S_n)) \}.$$

En vertu de (III.15), la projection

$$\psi: N \rightarrow \check{\mathcal{X}}^n(\varrho, S_n)$$

est un morphisme surjectif d'espaces de Fréchet.

Soit $(\zeta_\alpha)_{\alpha \in A}$ la base de $\check{K}^n(\varrho, S_n)$ et p une semi-norme sur $\mathcal{O}_s(S_n)$ qui vérifie les propriétés de (III.2) pour $S'_{n-1} \in S_n$. En vertu du théorème de Banach appliqué à ψ ,

il existe une semi-norme P sur $\mathcal{O}_S(S_n)$ et $\tilde{\varrho}$, $0 < \tilde{\varrho} < \varrho$, une constante M et $\tilde{\eta}_\alpha \in K^{n-1}(\varrho^*, S_n)$ tels que

$$(\zeta_\alpha, \tilde{\eta}_\alpha) \in N, \quad \|\tilde{\eta}_\alpha\|_{p\varrho_{n-1}} \leq M \|\zeta_\alpha\|_{P\tilde{\varrho}}.$$

Soit $\eta_\alpha \in \check{K}^{n-1}(\varrho_{n-1}, S'_{n-1})$ la restriction de $\tilde{\eta}_\alpha$; alors par (III.4.1 et 4), on a, pour toute semi-norme q sur $\mathcal{O}_S(S'_{n-1})$ adaptée à p et $r < \varrho_{n-1}$,

$$\|\eta_\alpha\|_{qr} \leq M' \left(\frac{\tilde{\varrho}}{\varrho}\right)^{|\alpha|}.$$

On pose alors

$$h: \check{\mathcal{K}}^n(\varrho, n) \rightarrow \check{\mathcal{K}}^n(\varrho_{n-1}, n) \\ \sum_{\alpha \in A} a_\alpha \zeta_\alpha \rightarrow \sum_{\alpha \in A} a_\alpha \eta_\alpha.$$

Pour la convergence, voir la fin de la démonstration de (III.13).

5. $B(n-1) \Rightarrow A(n-1)$, $n \geq q+2$

Dans ce paragraphe, nous supposerons toujours que $B(n-1)$ est vrai.

(III.16) LEMME. *Il existe un ouvert de Stein S_{n-1} , $S_* \subset S_{n-1} \Subset S_0$, un \mathcal{O}_S -module \mathcal{L} libre de type fini et un morphisme \mathcal{O}_S -linéaire continu au-dessus de S_{n-1} (au sens des préfaisceaux)*

$$\Phi^*: \mathcal{L} \rightarrow Z^{n-1}(\mathcal{K}^\bullet(c_{s-2}))$$

tel que, pour tout ouvert de Stein $S' \subset S_{n-1}$

$$\delta + \Phi^*: C^{n-2}(c_{s-2}, S') \oplus \mathcal{L} \rightarrow Z^{n-1}(K^\bullet(c_{s-2}, S'))$$

soit surjectif ($s = n - q + 1$ comme dans $B(n-1)$ et \mathcal{K}^\bullet est le «mapping cylinder» pour la situation $A(n)$).

Remarquons que $\mathcal{K}^{n-2}(c_{s-2}) = \mathcal{C}^{n-2}(c_{s-2})$.

Avant de démontrer ce lemme, montrons comment on peut en déduire $A(n-1)$.

En vertu de (II.11.1) et de propriétés élémentaires du «mapping cylinder», l'homomorphisme

$$H^{n-1}(K^\bullet(c_p, S_{n-1})) \rightarrow H^{n-1}(K^\bullet(c_{s-2}, S_{n-1}))$$

est surjectif; par (I.2.2), il en est donc de même de

$$Z^{n-1}(K \cdot (c_p, S_{n-1})) \rightarrow Z^{n-1}(K \cdot (c_{s-2}, S_{n-1})).$$

Il existe donc un morphisme \mathcal{O}_S -linéaire au-dessus de S_{n-1}

$$\Phi_1: \mathcal{L} \rightarrow Z^{n-1}(\mathcal{K} \cdot (c_p))$$

tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(S_{n-1}) & \xrightarrow{\Phi_1} & Z^{n-1}(K \cdot (c_p, S_{n-1})) \\ & \searrow \Phi^* & \downarrow \\ & & Z^{n-1}(K \cdot (c_{s-2}, S_{n-1})). \end{array}$$

On définit $\Phi_2: \mathcal{L} \rightarrow Z^{n-1}(\mathcal{K} \cdot (R_p))$ en rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \xrightarrow{\Phi_1} & Z^{n-1}(\mathcal{K} \cdot (c_p)) \\ & \searrow \Phi_2 & \downarrow \\ & & Z^{n-1}(\mathcal{K} \cdot (R_p)). \end{array}$$

En vertu de (I.2.2) et (II.8.1)

$$Z^{n-1}(\check{K} \cdot (R_p, S_{n-1})) \rightarrow Z^{n-1}(K \cdot (R_p, S_{n-1}))$$

est surjectif; on peut donc définir $\Phi_3: \mathcal{L} \rightarrow Z^{n-1}(\check{\mathcal{K}} \cdot (R_p))$ de telle manière que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \xrightarrow{\Phi_1} & Z^{n-1}(\mathcal{K} \cdot (c_p)) \\ & \downarrow \Phi_3 \quad \searrow \Phi_2 & \downarrow \\ Z^{n-1}(\check{\mathcal{K}} \cdot (R_p)) & \rightarrow & Z^{n-1}(\mathcal{K} \cdot (R_p)) \end{array}$$

Par composition avec les morphismes de (II.14), (si on désigne par Φ tous les morphismes définis ci-dessus), on définit α et d par

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow Z^{n-1}(\mathcal{K} \cdot (c_k)) &\subset \mathcal{C}^{n-1}(c_k) \oplus \mathcal{L}^n \\ \Phi = (\alpha, -d): \mathcal{L} \rightarrow Z^{n-1}(\mathcal{K} \cdot (r)) &\subset \mathcal{C}^{n-1}(r) \oplus \mathcal{L}^n \\ \mathcal{L} \rightarrow Z^{n-1}(\check{\mathcal{K}} \cdot (r)) &\subset \check{\mathcal{C}}^{n-1}(r) \oplus \mathcal{L}^n \end{aligned} \tag{*}$$

Le complexe $\mathcal{L} \cdot$ de $A(n-1)$ est alors défini par

$$\mathcal{L} \cdot = \dots \rightarrow 0 \xrightarrow{d} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^n \rightarrow \mathcal{L}^{n+1} \rightarrow \dots$$

Les morphismes $\alpha \cdot$ de $A(n-1)$ sont ceux de $A(n)$ en degré $\geq n$ et ceux qui figurent dans (*) en degré $n-1$.

Pour démontrer (III.16), considérons le diagramme déduit de (II.14):

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{H}^\bullet(c_p) & \\
 & \downarrow & \\
 \check{\mathcal{H}}^\bullet(r) \rightarrow \mathcal{H}^\bullet(r) & & r_s \leq r' \leq r \leq R_p \\
 \downarrow & \downarrow & \\
 \check{\mathcal{H}}^\bullet(r') \rightarrow \mathcal{H}^\bullet(r') & & \\
 \downarrow & \downarrow & \\
 & \mathcal{H}^\bullet(c_{s-1}) & \\
 \downarrow & \downarrow & \\
 \check{\mathcal{H}}^\bullet(r'') \rightarrow \mathcal{H}^\bullet(r'') & & r_{s-1} \leq r'' \leq R_{s-1} \\
 & \downarrow & \\
 & \mathcal{H}^\bullet(c_{s-2}) &
 \end{array}$$

Posons:

$$\mathfrak{M}^{n-1}(r', r'') = \text{Ker}\{Z^{n-1}(\check{\mathcal{H}}^\bullet(r')) \oplus \check{\mathcal{H}}^{n-2}(r'') \xrightarrow{\beta} Z^{n-1}(\mathcal{H}^\bullet(r''))\}$$

(avec β la restriction) et

$$\varphi: \mathfrak{M}^{n-1}(r', r'') \rightarrow Z^{n-1}(\check{\mathcal{H}}^\bullet(r'))$$

la projection. Soit

$$M^{n-1}(r', r'', S') = \mathfrak{M}^{n-1}(r', r'')(S').$$

(III.17). PROPOSITION. Pour tout ouvert de Stein $S' \subset S'_{n-1}$, on a:

1) la somme des homomorphismes

$$\begin{array}{ccc}
 & Z^{n-1}(\check{\mathcal{H}}^\bullet(r, S')) & \\
 & \downarrow \beta & \\
 M^{n-1}(r', r'', S') \xrightarrow{\varphi} & Z^{n-1}(\check{\mathcal{H}}^\bullet(r', S')) &
 \end{array}$$

est surjective.

2) l'homomorphisme (obtenu par composition)

$$Z^{n-1}(\check{K}^\bullet(r', S')) / \varphi(M^{n-1}(r', r'', S')) \rightarrow H^{n-1}(K^\bullet(c_{s-2}, S'))$$

est surjectif.

La démonstration de cette proposition est facile; il suffit de remarquer que $\check{K}^\bullet(r, S') \rightarrow K^\bullet(r, S')$ est un quasi-isomorphisme par (II.11.4) et que les homo-

morphismes

$$\begin{aligned} H^{n-1}(K \cdot (r, S')) &\rightarrow H^{n-1}(K \cdot (c_{s-1}, S')) \\ H^{n-1}(K \cdot (r', S')) &\rightarrow H^{n-1}(K \cdot (c_{s-2}, S')) \end{aligned}$$

sont surjectifs par (II.11.3).

Pour prouver (III.16) il suffit donc de montrer:

(III.18). Il existe un ouvert de Stein $S_{n-1}, S_* \subseteq S_{n-1} \subseteq S_0$, un \mathcal{O}_S -module \mathcal{L} libre de type fini au-dessus de S_{n-1} et un morphisme \mathcal{O}_S -linéaire continu (au-dessus de S_{n-1})

$$\psi: \mathcal{L} \rightarrow Z^{n-1}(\check{\mathcal{X}} \cdot (r'))$$

tel que, pour tout ouvert de Stein $S' \subset S_{n-1}$, l'homomorphisme

$$\psi + \varphi: \mathcal{L}(S') \oplus M^{n-1}(r', r'', S') \rightarrow Z^{n-1}(\check{K} \cdot (r', S'))$$

soit surjective.

Pour démontrer cette affirmation, rappelons que par $B(n-1)$, on a un morphisme

$$\pi_{n-1}: \check{\mathcal{X}}^{n-1}(\varrho) \rightarrow Z^{n-1}(\check{\mathcal{X}} \cdot (\varrho_{n-1}))$$

au-dessus de S'_{n-1} ($r_s < \varrho_{n-1} < R_s, s = n - q + 1$).

Considérons le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} & \check{\mathcal{X}}^{n-1}(R_p, S'_{n-1}) & \\ & \downarrow \beta & \\ & \check{\mathcal{X}}^{n-1}(\varrho, S'_{n-1}) & \\ & \downarrow \pi_{n-1} & \\ M^n(\varrho_{n-1}, R_{s-1}, S'_{n-1}) & \xrightarrow{\varphi} & Z^{n-1}(\check{\mathcal{X}} \cdot (\varrho_{n-1}, S'_{n-1})) \end{array}$$

où $\varphi + \pi_{n-1} \circ \beta$ est surjectif par (III.17.1).

Muni de la topologie induite,

$$M^{n-1}(\varrho_{n-1}, R_{s-1}, S'_{n-1}) \subset \check{\mathcal{X}}^{n-1}(\varrho_{n-1}, S'_{n-1}) \oplus \check{\mathcal{X}}^{n-2}(R_{s-1}, S'_{n-1})$$

est un espace de Fréchet et cette topologie est définie par les semi-normes:

$$\|(x, y)\|_{qR} = \sup \{ \|x\|_{qr}, \|y\|_{qR} \}$$

avec $r < \varrho_{n-1}, R < R_{s-1}$ et q semi-norme sur $\mathcal{O}_S(S'_{n-1})$.

(III.19). Soit $S_{n-1}, S_* \subseteq S_{n-1} \subseteq S'_{n-1}$, un ouvert de Stein, soit $(\zeta_\alpha)_{\alpha \in A}$ la base

de $\check{K}^{n-1}(\varrho, S'_{n-1})$ et p une semi-norme sur $\mathcal{O}_S(S'_{n-1})$ qui vérifie les conditions de (III.2) pour $S_{n-1} \subseteq S'_{n-1}$.

Comme $\varphi + \pi_{n-1} \circ \beta$ est surjectif, on peut appliquer (III.6): il existe ϱ^* , $0 < \varrho^* < \varrho$, une semi-norme P sur $\mathcal{O}_S(S'_{n-1})$, une constante M et

$$\tilde{\eta}_\alpha \in M^{n-1}(\varrho_{n-1}, R_{s-1}, S'_{n-1}), \quad \tilde{\xi}_\alpha \in \check{K}^{n-1}(R_p, S'_{n-1})$$

tels que

$$\varphi \tilde{\eta}_\alpha + \pi_{n-1} \circ \beta \tilde{\xi}_\alpha = \pi_{n-1} \zeta_\alpha, \quad \sup \{ \|\tilde{\xi}_\alpha\|_{p\varrho}, \|\tilde{\eta}_\alpha\|_{pr_s r_{s-1}} \} \leq M \|\zeta_\alpha\|_{\varrho^*}.$$

En vertu de (III.4.1 et 4) on a:

(III.20). Les restrictions

$$\eta_\alpha \in M^{n-1}(r_s, r_{s-1}, S_{n-1}), \quad \zeta_\alpha \in \check{K}^{n-1}(\varrho, S_{n-1})$$

jouissent de la propriété suivante:

Pour toute semi-norme q sur $\mathcal{O}_S(S_{n-1})$ adaptée à p , $r < r_s$, $r' < r_{s-1}$, $R < \varrho$, on a

$$\|\eta_\alpha\|_{qr r'} \leq C \left(\frac{\varrho^*}{\varrho}\right)^{|\alpha|}, \quad \|\xi_\alpha\|_{qR} \leq C \left(\frac{\varrho^*}{\varrho}\right)^{|\alpha|}$$

où C est une constante indépendante de q, r, r', R .

Soit $\varrho_0, \varrho^* < \varrho_0 < \varrho$, fixé; on a (avec q et R comme ci-dessus)

$$\sum_{\alpha \in A} \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{|\alpha|} \|\xi_\alpha\|_{qR} \leq C \sum_{\alpha \in A} \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{|\alpha|} \left(\frac{\varrho^*}{\varrho}\right)^{|\alpha|} = C \sum_{\alpha \in A} \left(\frac{\varrho^*}{\varrho_0}\right)^{|\alpha|} < \infty.$$

(III.21). Il existe une partie finie $A_0 \subset A$ telle que

$$\sum_{\alpha \in A - A_0} \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{|\alpha|} \|\xi_\alpha\|_{qR} \leq \frac{1}{2}.$$

Pour un ouvert de Stein $S' \subset S_{n-1}$, considérons le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} & \check{K}^{n-1}(\varrho, S') & \\ & \downarrow \pi_{n-1} & \\ M^{n-1}(r_s, r_{s-1}, S') & \xrightarrow{\varphi} & Z^{n-1}(\check{K}^\bullet(r_s, S')) \end{array}$$

(III.22) PROPOSITION. *Tout $z \in Z^{n-1}(K^\bullet(r_s, S'))$ s'écrit*

$$z = \pi_{n-1}x + \varphi y$$

avec

$$x = \sum_{\alpha \in A_0} a_\alpha \xi_\alpha \in \tilde{\mathcal{X}}^{n-1}(\varrho, S') \quad a_\alpha \in \mathcal{O}_S(S')$$

$$y \in M^{n-1}(r_s, r_{s-1}, S').$$

Cette proposition implique visiblement (III.18) et donc aussi (III.16). La démonstration se fait par itération, utilisant le fait que $\varphi + \pi_{n-1}$ est surjectif par (III.17.1) et à l'aide du lemme suivant:

(III.23) LEMME. *Il existe des constantes M_1, M_2 avec la propriété: pour tout $x \in \tilde{\mathcal{K}}^{n-1}(\varrho, S')$, il existe*

$$x_1 \in \tilde{\mathcal{X}}^{n-1}(\varrho, S')$$

$$x^* = \sum_{\alpha \in A_0} a_\alpha \xi_\alpha \in \tilde{\mathcal{X}}^{n-1}(\varrho, S'), \quad a_\alpha \in \mathcal{O}_S(S')$$

$$y_1 \in M^{n-1}(r_s, r_{s-1}, S')$$

tels que

$$1) \quad x = \pi_{n-1} x^* + \pi_{n-1} x_1 + \varphi y_1$$

2) pour toute semi-norme q sur $\mathcal{O}_S(S')$ adaptée à p (p comme dans (III.19)) et $\varrho', \varrho_0 < \varrho' < \varrho$, on a:

$$a) \quad \|x_1\|_{q\varrho'} \leq \frac{1}{2} \|x\|_{q\varrho'}$$

$$b) \quad q(a_\alpha) \leq M_1 \|x\|_{q\varrho'}, \quad \alpha \in A_0$$

$$c) \quad \|y_1\|_{q r', r''} \leq M_2 \|x\|_{q\varrho'}, \quad r' < r_s, r'' < r_{s-1}.$$

Démonstration. Soit

$$x = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha \xi_\alpha, \quad a_\alpha \in \mathcal{O}_S(S').$$

Posons

$$x_1 = \sum_{\alpha \in A - A_0} a_\alpha \xi_\alpha, \quad x^* = \sum_{\alpha \in A_0} a_\alpha \xi_\alpha, \quad y_1 = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha \eta_\alpha.$$

Ces séries convergent par (III.4.2) et (III.20).

1) est visiblement vérifié. Pour 2), on a par (III.4.2)

$$q(a_\alpha) \leq \left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^{|\alpha|} \|x\|_{q\varrho'} \leq \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{|\alpha|} \|x\|_{q\varrho'}. \quad (*)$$

Posons

$$L = \sup_{\alpha \in A_0} \{|\alpha|\}, \quad M_1 = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^L$$

d'où 2b).

Pour 2a), on a par (*) et (III.21)

$$\|x_1\|_{q\varrho'} \leq \sum_{\alpha \in A - A_0} q(a_\alpha) \|\xi_\alpha\|_{q\varrho'} \leq \|x\|_{q\varrho'} \sum_{\alpha \in A - A_0} \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{|\alpha|} \|\xi_\alpha\|_{q\varrho'} \leq \frac{1}{2} \|x\|_{q\varrho'}.$$

Pour 2c), on a par (*) et (III.20)

$$\|y_1\|_{q\varrho'r''} \leq \sum_{\alpha \in A} q(a_\alpha) \|\eta_\alpha\|_{q\varrho'} \leq C \|x\|_{q\varrho'} \sum_{\alpha \in A} \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{|\alpha|} \left(\frac{\varrho^*}{\varrho}\right)^{|\alpha|}.$$

On pose

$$M_2 = C \sum_{\alpha \in A} \left(\frac{\varrho^*}{\varrho_0}\right)^{|\alpha|}.$$

IV. LE THÉORÈME DE L'IMAGE DIRECTE

Dans le premier paragraphe de ce chapitre, nous démontrons quelques propriétés des faisceaux quasi libres. Ces résultats combinés avec ceux des chapitres précédents nous permettent alors de démontrer (voir (IV.6)) que tout morphisme q -convexe vérifie l'hypothèse de séparation (I.16) et ensuite le théorème de l'image directe (théorème (IV.8)) dans toute sa généralité. Un théorème d'approximation (voir (IV.10)) du type théorème de Runge généralisant (I.17), qui permet d'améliorer un peu (IV.8.2), est démontré au paragraphe 3.

1. Propriétés des faisceaux quasi libres

(IV.1) THÉORÈME. Soit (S, \mathcal{O}_S) un espace de Stein, $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}(R)$ un \mathcal{O}_S -module quasi libres, \mathcal{F} un \mathcal{O}_S -modules cohérent et $\varphi: \tilde{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{F}$ un morphisme continu. Alors

- 1) le \mathcal{O}_S -module $\mathfrak{G} = \text{Im } \varphi$ est cohérent
- 2) pour tout ouvert de Stein $S_0 \subset S$, $\varphi: \tilde{\mathcal{L}}(S_0) \rightarrow \mathfrak{G}(S_0)$ est surjectif (donc $\varphi(\tilde{\mathcal{L}}(S_0)) \subset \mathcal{F}(S_0)$ est un sous espace fermé)
- 3) pour toute paire de Runge d'ouverts de Stein (S_0, S_1) , $S_1 \subset S_0 \subset S$, la restriction

$$\text{Ker}(\tilde{\mathcal{L}}(S_0) \rightarrow \mathcal{F}(S_0)) \rightarrow \text{Ker}(\tilde{\mathcal{L}}(S_1) \rightarrow \mathcal{F}(S_1))$$

est d'image dense.

Démonstration. a) Démontrons d'abord la première affirmation et le cas particulier de la deuxième lorsque $S_0 \Subset S$. Soit $(\zeta_\alpha)_{\alpha \in A}$ la base de $\tilde{\mathcal{L}}(R)(S)$, $\mathcal{A}^n \subset \tilde{\mathcal{L}}$ le \mathcal{O}_S -module cohérent engendré par les $(\zeta_\alpha)_{|\alpha| \leq n}$ et $\mathcal{B}^n = \varphi(\mathcal{A}^n)$. En vertu d'un théorème bien connu ([4], Satz 8) la suite croissante $(\mathcal{B}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-modules cohérents de \mathcal{F} est stationnaire sur les compacts de S et $\mathcal{B} = \bigcup_n \mathcal{B}^n$ est donc un \mathcal{O}_S -module cohérent.

Posons encore $\mathcal{A} = \bigcup_n \mathcal{A}^n$. Pour tout ouvert de Stein $S_0 \subseteq S$ on a les deux propriétés:

$$\mathcal{A}(S_0) \subset \tilde{\mathcal{L}}(S_0) \text{ est un sous espace dense,} \quad (*)$$

$$\varphi(\mathcal{A}(S_0)) = \mathcal{B}(S_0). \quad (**)$$

La première propriété est évidente. D'autre part, il existe n_0 tel que $\mathcal{B} \mid S_0 = \mathcal{B}^{n_0} \mid S_0$ et $\varphi: \mathcal{A}^{n_0} \mid S_0 \rightarrow \mathcal{B} \mid S_0$ est donc surjectif, d'où (**) en vertu du théorème B.

Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que $\mathcal{G} = \mathcal{B}$. Compte tenu de (**), on a pour tout ouvert de Stein $S_0 \subseteq S$:

$$\mathcal{B}(S_0) = \varphi(\mathcal{A}(S_0)) \subset \varphi(\tilde{\mathcal{L}}(S_0)) \subset \mathcal{F}(S_0).$$

Vu la continuité de φ et la propriété (*), $\mathcal{B}(S_0)$ est dense dans $\varphi(\tilde{\mathcal{L}}(S_0))$ (pour la topologie induite par $\mathcal{F}(S_0)$); comme $\mathcal{B}(S_0)$ est fermé dans $\mathcal{F}(S_0)$, on a $\mathcal{B}(S_0) = \varphi(\mathcal{A}(S_0))$.

b) Démonstration de 3). Remarquons d'abord que pour un \mathcal{O}_S -module quasi libre $\tilde{\mathcal{L}}^*$ et une paire de Runge (S_0, S_1) d'ouverts de Stein, $S_1 \subset S_0 \subset S$,

$$\tilde{\mathcal{L}}^*(S_0) \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}^*(S_1)$$

est d'image dense.

Pour démontrer 3), il suffit, compte tenu de (I.19), de considérer le cas particulier où $S_0 \subseteq S$, et ce cas résulte de la remarque ci-dessus et du lemme suivant.

(IV.2) LEMME. Soit $\varphi: \tilde{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{F}$ comme dans le théorème et $S_0 \subseteq S$ un ouvert de Stein. Alors il existe un \mathcal{O}_S -module quasi libre $\tilde{\mathcal{L}}^*$ au-dessus de S_0 et un morphisme continu $\psi: \tilde{\mathcal{L}} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}} \mid S_0$ tel que, pour tout ouvert de Stein $S' \subset S_0$, la suite

$$\tilde{\mathcal{L}}^*(S') \xrightarrow{\psi} \tilde{\mathcal{L}}(S') \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}(S')$$

soit exacte.

Démonstration du lemme. Soit $(\zeta_\alpha)_{\alpha \in A}$ la base de $\tilde{\mathcal{L}}(S)$, $\xi_\alpha = \varphi(\zeta_\alpha)$ et soit S_1 un ouvert de Stein, $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S$. Comme $\mathcal{G} = \varphi(\tilde{\mathcal{L}})$ est un \mathcal{O}_S -module cohérent (voir ci-dessus), il existe un entier n_0 tel que $\mathcal{G} \mid S_1$ soit engendré par les $\xi_\alpha \mid S_1$, $|\alpha| \leq n_0$. Renombrons: $(\zeta_\alpha)_{|\alpha| \leq n_0} = (\zeta_n)_{1 \leq n \leq N}$, et soit $\xi_n = \varphi(\zeta_n)$ et $A_1 = \{\alpha \in A \mid |\alpha| > n_0\}$. Considérons la suite exacte de \mathcal{O}_S -modules cohérents au-dessus de S_1 :

$$0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{O}_S^N \mid S_1 \xrightarrow{u} \mathcal{F} \mid S_1 \rightarrow 0$$

où u est induit par les ξ_n et $\mathcal{A} = \text{Ker } u$.

On a: pour tout $\alpha \in A_1$, il existe $G^\alpha = (G_1^\alpha, \dots, G_N^\alpha) \in \mathcal{O}_S^N(S_1)$ tel que

$$\xi_\alpha = \sum_{1 \leq n \leq N} G_n^\alpha \zeta_n \quad \text{sur } S_1.$$

Affirmation 1. Il existe $r < R$ (R comme dans l'énoncé du théorème) et un choix des G^α ($\alpha \in A_1$) avec la propriété: pour toute semi-norme q sur $\mathcal{O}_S^N(S_0)$, il existe une constante M telle que

$$q(G^\alpha) \leq M \left(\frac{r}{R} \right)^{|\alpha|}.$$

Pour cela, considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_S^N(S_1) & \rightarrow & \mathcal{O}_S^N(S_0) \\ \downarrow u & & \downarrow u \\ \mathcal{L}(S_1) & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{G}(S_1) \rightarrow \mathfrak{G}(S_0). \end{array}$$

Soit p_0 une semi-norme sur $\mathcal{O}_S^N(S_1)$ qui vérifie les propriétés de (III.2) pour $S_0 \Subset S_1$. Comme u est surjective, il existe une semi-norme p_1 sur $\mathfrak{G}(S_1)$ telle que pour tout $y \in \mathfrak{G}(S_1)$, il existe $x \in \mathcal{O}_S^N(S_1)$ avec

$$y = u(x) \quad \text{et} \quad p_0(x) \leq p_1(y).$$

Comme φ est continu, il existe une semi-norme p_2 sur $\mathcal{O}_S(S_1)$ et $r < R$ tels que

$$p_1(\varphi(x)) \leq \|x\|_{p_2 r}, \quad \forall x \in \mathcal{L}(S_1).$$

Pour une constante K , on a par (III.4.1)

$$p_1(\xi_\alpha) \leq \|\zeta_\alpha\|_{p_2 r} \leq K \left(\frac{r}{R} \right)^{|\alpha|}$$

et il existe $G^\alpha \in \mathcal{O}_0(S_1)$ avec

$$u(G^\alpha) = \xi_\alpha \quad \text{et} \quad p_0(G^\alpha) \leq K \left(\frac{r}{R} \right)^{|\alpha|}.$$

Vu le choix de p_0 , on en déduit le résultat.

Affirmation 2. Pour tout ouvert $S' \subset S_0$ et $x = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha \zeta_\alpha \in \mathcal{L}(S')$, la série

$$\sum_{\alpha \in A} a_\alpha G_n^\alpha \in \mathcal{O}_S(S')$$

converge $\forall n, 1 \leq n \leq N$ (pour les G_n^α de l'affirmation 1).

En effet, pour une semi-norme q sur $\mathcal{O}_S(S')$ et $\varrho, r < \varrho < R$ (r comme dans l'affirmation 1) on a, par (III.4.2),

$$q(a_\alpha) \leq \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{|\alpha|} \|x\|_{q\varrho}$$

donc

$$q(a_\alpha G_n^\alpha) \leq q(a_\alpha) q(G_n^\alpha) \leq K \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{|\alpha|} \|x\|_{q\varrho}.$$

Soit $F^\lambda = (F_1^\lambda, \dots, F_N^\lambda) \in \mathcal{O}_S^N(S_0)$, $1 \leq \lambda \leq L$, un système de générateurs de $\mathcal{R} \mid S_0$.

Affirmation 3. Soit $S' \subset S_0$ un ouvert de Stein et

$$x = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha \zeta_\alpha = \sum_{n \leq N} a_n \zeta_n + \sum_{\alpha \in A_1} a_\alpha \zeta_\alpha \in \tilde{\mathcal{L}}(S').$$

Pour que $\varphi(x) = 0$, il faut et il suffit qu'il existe $b_\lambda \in \mathcal{O}_S(S')$, $1 \leq \lambda \leq L$, tels que l'on ait, pour tout n , $1 \leq n \leq N$,

$$a_n + \sum_{\alpha \in A_1} a_\alpha G_n^\alpha = \sum_{1 \leq \lambda \leq L} b_\lambda F_n^\lambda$$

En effet,

$$\varphi(x) = \sum_{1 \leq n \leq N} (a_n + \sum_{\alpha \in A_1} a_\alpha G_n^\alpha) \zeta_n,$$

donc $\varphi(x) = 0$ si et seulement si

$$\left(a_1 + \sum_{\alpha \in A_1} a_\alpha G_1^\alpha, \dots, a_N + \sum_{\alpha \in A_1} a_\alpha G_N^\alpha \right) \in \mathcal{R}(S').$$

Considérons, au-dessus de S_0 , le \mathcal{O}_S -module quasi libre

$$\tilde{\mathcal{L}}^* = \mathcal{O}_S^L \mid S_0 \oplus \tilde{\mathcal{L}} \mid S_0.$$

Soit $(y_\lambda)_{1 \leq \lambda \leq L} \cup (\eta_\alpha)_{\alpha \in A}$ la base de $\tilde{\mathcal{L}}^*(S_0)$ définie par:

$$y_\lambda = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathcal{O}_S^L(S_0) \quad \text{et} \quad \eta_\alpha = \zeta_\alpha \mid S_0 \in \tilde{\mathcal{L}}(S_0).$$

Définissons:

$$\psi: \tilde{\mathcal{L}}^* \rightarrow \tilde{\mathcal{L}} \mid S_0,$$

$$\psi(y_\lambda) = \sum_{1 \leq n \leq N} F_n^\lambda \zeta_n, \quad \psi(\eta_\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \notin A_1 \\ - \sum_{1 \leq n \leq N} G_n^\alpha \zeta_n + \zeta_\alpha & \text{si } \alpha \in A_1. \end{cases}$$

Alors $\varphi \circ \psi: \tilde{\mathcal{L}}^* \rightarrow \mathcal{F} \mid S_0$ est zéro; d'autre part, pour S' Stein et

$$x = \sum_{1 \leq n \leq N} a_n \zeta_n + \sum_{\alpha \in A_1} a_\alpha \zeta_\alpha \in \tilde{\mathcal{L}}(S')$$

tel que $\varphi(x) = 0$, on a pour tout n

$$a_n + \sum_{\alpha \in A_1} a_\alpha G_n^\alpha = \sum_{1 \leq \lambda \leq L} b_\lambda F_n^\lambda.$$

Alors $\psi(z) = x$, avec

$$z = \sum_{1 \leq \lambda \leq L} b_\lambda y_\lambda + \sum_{\alpha \in A_1} a_\alpha \eta_\alpha$$

ce qui démontre le lemme.

c) La démonstration de la deuxième affirmation du théorème pour des ouverts de Stein arbitraires est maintenant facile. On utilise pour cela l'affirmation 3) du théorème et (I.19).

2. Le théorème de l'image directe

Soit S un espace de Stein, $\pi: X \rightarrow S$ un morphisme q -convexe, φ une fonction d'épuisement de constante exceptionnelle c^* et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module cohérent.

(IV.3) LEMME. *Soit $S_* \subset \subset S$ un ouvert de Stein et $c < c^*$. Alors il existe, au-dessus de S_* , un complexe*

$$\mathcal{M}^\bullet = \dots \rightarrow 0 \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}^q \rightarrow \mathcal{M}^{q+1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{M}^N \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

de \mathcal{O}_S -module, avec \mathcal{M}^n libre de type fini pour $n > q$ et $\tilde{\mathcal{M}}^q$ quasi libre, à différentielle continue, et un morphisme continu de complexes

$$\alpha: \mathcal{M}^\bullet \rightarrow \mathcal{C}^\bullet(c)$$

tel que, pour $S' \subset S_*$ Stein,

- 1) $\alpha^*: H^n(\mathcal{M}^\bullet(S')) \rightarrow H^n(\mathcal{C}^\bullet(c, S'))$
soit un isomorphisme en degré $n > q + 1$;
un épimorphisme en degré $n = q + 1$.
- 2) $\alpha: H^{q+1}(\mathcal{M}^\bullet(S'))_{\text{sép}} \rightarrow H^{q+1}(\mathcal{C}^\bullet(c, S'))_{\text{sép}}$
soit un isomorphisme.

Démonstration. Reprenons les constructions du chapitre III; les affirmations $A(q+1)$ et $B(q)$ sont donc vérifiées (avec $c_0 = c$).

Soit

$$\begin{aligned} \psi &: Z^q(\mathcal{K}^\bullet(c)) \rightarrow \mathcal{C}^q(c) \\ p &: Z^q(\mathcal{K}^\bullet(c)) \rightarrow \mathcal{L}^{q+1} \end{aligned}$$

les projections, qui sont définies au dessus de S_{q+1} (où S_{q+1} et \mathcal{L}^\bullet sont comme dans $A(q+1)$ et $\mathcal{K}^\bullet(c)$ est le « mapping cylinder » de $\alpha: \mathcal{L}^\bullet \rightarrow \mathcal{C}^\bullet(c)$). Comme

$$Z^q(\mathcal{K}^\bullet(c)) = \{(\xi, x) \in \mathcal{C}^q(c) \oplus \mathcal{L}^{q+1} \mid \delta\xi = -\alpha x, dx = 0\},$$

le morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow 0 & \longrightarrow & Z^q(K^\bullet(c, S')) & \xrightarrow{p} & \mathcal{L}^{q+1}(S') & \xrightarrow{d} & \mathcal{L}^{q+2}(S') \rightarrow \\ & & \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\ & & C^{q-1}(c, S') & \xrightarrow{\delta} & C^q(c, S') & \xrightarrow{\delta} & C^{q+1}(c, S') \xrightarrow{\delta} C^{q+2}(c, S') \rightarrow \end{array}$$

induit en cohomologie un isomorphisme en degré $\geq q+1$ pour $S' \subset S_{q+1}$ Stein. Soit $\bar{B}_q^{q+1}(c, S') \subset C^{q+1}(c, S')$ l'adhérence de $\delta C^q(c, S')$ et posons

$$B = \alpha^{-1}(\bar{B}_q^{q+1}(c, S')) \cap Z^{q+1}(\mathcal{L}^\bullet(S')) \subset \mathcal{L}^{q+1}(S')$$

Soit $S' \Subset S$ un ouvert de Stein (S comme dans $B(q)$) et considérons le diagramme: (IV.4)

$$\begin{array}{ccc} \check{\mathcal{K}}^q(\varrho, S') & & \\ \downarrow \pi_q & & \\ Z^q(\check{\mathcal{K}}^\bullet(\varrho_q, S')) & \rightarrow & Z^q(K^\bullet(\varrho_q, S')) \\ & & \downarrow \\ & & Z^q(K^\bullet(c, S')) \xrightarrow{p} \mathcal{L}^{q+1}(S') \end{array}$$

(π_q, ϱ_q comme dans $B(q)$). Soit $\gamma: \check{K}^q(\varrho, S') \rightarrow Z^q(K^\bullet(c, S'))$ l'homomorphisme composé. Visiblement

$$\text{Imp } p \circ \gamma \subset \text{Imp } p \subset B \subset \mathcal{L}^{q+1}(S')$$

(IV.5) *Affirmation.* $\text{Imp } p \circ \gamma$ est dense dans B (pour la topologie de $\mathcal{L}^{q+1}(S')$).

De cette affirmation, on déduit facilement le lemme en posant: $\tilde{\mathcal{M}}^q = \check{\mathcal{K}}^q(\varrho)$ et $\mathcal{M}^n = \mathcal{L}^n, n > q$, avec $d = p \circ \gamma: \tilde{\mathcal{M}}^q \rightarrow \mathcal{M}^{q+1}$ et $\alpha^q = \psi \circ \gamma: \tilde{\mathcal{M}}^q \rightarrow \mathcal{C}^q(c)$. La première partie de (IV.3) découle alors de $A(q+1)$ et la deuxième de l'affirmation.

Démonstration de (IV.5). Soit $x \in B$; alors $dx = 0$ ($d: \mathcal{L}^{q+1}(S') \rightarrow \mathcal{L}^{q+2}(S')$).

Posons

$$\xi = \alpha x \in \bar{B}^q(c, S') \tag{*}$$

Considérons le diagramme (avec un changement de notations pour α)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^{q+1}(S') & \xrightarrow{\alpha'} & C^{q+1}(c_p, S') \\ \downarrow \check{\alpha} & \searrow \bar{\alpha} & \downarrow \\ \check{C}^{q+1}(\varrho, S') & \longrightarrow & C^{q+1}(\varrho, S') \end{array}$$

et posons

$$\xi' = \alpha' x \in C^{q+1}(c_p, S'), \quad \bar{\xi} = \bar{\alpha} x \in C^{q+1}(\varrho, S'), \quad \check{\xi} = \check{\alpha} x \in \check{C}^{q+1}(\varrho, S').$$

En vertu de (*), de (II.11.2) et (II.5.2), $\xi' \in \bar{B}^{q+1}(c_p, S')$ et il existe donc une suite $(\eta^k) \subset C^q(c_p, S')$ telle que $\delta \eta^k \rightarrow -\xi'$. Par restriction, il existe donc une suite $(\bar{\eta}^k) \subset C^q(\varrho, S')$ telle que $\delta \bar{\eta}^k \rightarrow -\bar{\xi}$. Construisons une suite $(\check{\eta}^k) \subset C^q(\varrho, S')$ telle que $\delta \check{\eta}^k \rightarrow -\check{\xi}$.

Pour cela, considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \check{C}^q(\varrho, S') & \xrightarrow{\tau} & C^q(\varrho, S') \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ Z^{q+1}(\check{C}^\bullet(\varrho, S')) & \xrightarrow{\tau} & Z^{q+1}(C^\bullet(\varrho, S')) \end{array}$$

où les lignes sont surjectives par (I.2.2) et (II.8). Soit donc $(a^k) \subset \check{C}^q(\varrho, S')$, $\tau a^k = \bar{\eta}^k$. Alors

$$\tau(\delta a^k + \check{\xi}) = \delta \bar{\eta}^k + \bar{\xi} \rightarrow 0,$$

et il existe donc $(b^k) \subset Z^{q+1}(\check{C}^\bullet(\varrho, S'))$ telle que

$$\tau(b^k - \delta a^k - \check{\xi}) = 0 \quad \text{et} \quad b^k \rightarrow 0.$$

Puisque τ est un quasi-isomorphisme, on a

$$b^k - \delta a^k - \check{\xi} \in \delta C^q(\varrho, S').$$

Soit $(c^k) \subset \check{C}^q(\varrho, S')$, $\delta c^k = b^k - \delta a^k - \check{\xi}$.

On pose $\check{\eta}^k = a^k + c^k$. Considérons la suite $((\check{\eta}^k, x)) \subset \check{K}^q(\varrho, S')$.

Affirmation. $\gamma(\check{\eta}^k, x) \rightarrow x$.

Pour voir cela, rappelons la définition de π_q (III.14):

$\pi_q = \beta - h \circ \partial$, β étant la restriction et $\partial(u, v) = (\delta u + \alpha v, -dv)$. Donc $\pi_q(\check{\eta}^k, x) = (\beta\check{\eta}^k, x) - h(\delta\check{\eta}^k + \xi, 0)$; comme $h(\delta\check{\eta}^k + \xi, 0) \rightarrow 0$, on en déduit l'affirmation.

(IV.6) COROLLAIRE. Avec les notations de (IV.3), on a: les espaces $H^{q+1}(\mathcal{M}^\bullet(S'))$ et $H^{q+1}(C^\bullet(c, S'))$ sont séparés (donc Fréchet) et

$$\alpha^*: H^{q+1}(\mathcal{M}^\bullet(S')) \rightarrow H^{q+1}(C^\bullet(c, S'))$$

est un isomorphisme (d'espaces de Fréchet).

En d'autres termes, l'hypothèse (sép) de (I.16) est donc toujours vérifiée.

Démonstration. Dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H^{q+1}(\mathcal{M}^\bullet(S')) & \xrightarrow{\alpha^*} & H^{q+1}(C^\bullet(c, S')) \\ \downarrow u & & \downarrow v \\ H^{q+1}(\mathcal{M}^\bullet(S'))_{\text{sép}} & \xrightarrow{\alpha^*_{\text{sép}}} & H^{q+1}(C^\bullet(c, S'))_{\text{sép}} \end{array}$$

u et $\alpha^*_{\text{sép}}$ sont des isomorphismes par (IV.1.2) et (IV.3), et α^* est un épimorphisme par (IV.3), d'où le résultat.

En fait, pour des ouverts $S' \subseteq S^*$, la démonstration du corollaire n'utilise que les résultats du théorème (IV.1) démontrés sous a).

(IV.7) COROLLAIRE. Soit $S_* \subseteq S$ un ouvert de Stein et $c < \gamma^*$. Alors il existe, au-dessus de S_* , un complexe

$$\mathcal{M} = \dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{M}^q \rightarrow \mathcal{M}^{q+1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{M}^N \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

de \mathcal{O}_S -modules libres de type fini et un morphisme (continu) de complexes

$$\alpha: \mathcal{M}^\bullet \rightarrow \mathcal{C}^\bullet(c)$$

tel que, pour $S' \subset S_*$ Stein,

$$\alpha^*: H^n(\mathcal{M}^\bullet(S')) \rightarrow H^n(C^\bullet(c, S'))$$

soit un isomorphisme (d'espaces de Fréchet) pour $n \geq q + 1$.

Compte tenu du corollaire précédent, c'est une conséquence immédiate de (IV.1.1).

Ces deux corollaires, (I.20), (II.15) et le théorème B impliquent maintenant trivialement le théorème principal.

(IV.8) THÉORÈME. Soit S un espace de Stein et $\pi: X \rightarrow S$ un morphisme q -convexe, φ une fonction d'épuisement de constante exceptionnelle γ , et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module cohérent. Alors

1) les \mathcal{O}_S -modules $R^n \pi_{c*} \mathcal{F}$ et $R^n \pi_* \mathcal{F}$ sont cohérents et la restriction

$$R^n \pi_* \mathcal{F} \rightarrow R^n \pi_{c*} \mathcal{F}$$

est un isomorphisme pour $n \geq q+1$ et $c > \gamma$ (avec $\pi_c = \pi \mid X_c \rightarrow S$).

2) pour tout ouvert de Stein $S' \Subset S$, $c > \gamma$ et $n \geq q+1$, les espaces $H^n(X(S'), \mathcal{F})$, $H^n(X_c(S'), \mathcal{F})$ sont Fréchet et les morphismes du diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^n(X(S'), \mathcal{F}) & \rightarrow & R^n \pi_* \mathcal{F}(S') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(X_c(S'), \mathcal{F}) & \rightarrow & R^n \pi_{c*} \mathcal{F}(S') \end{array}$$

sont des isomorphismes (d'espaces de Fréchet).

On notera que la démonstration du fait que les espaces $H^n(X(S'), \mathcal{F})$ sont Fréchet utilise de manière essentielle la définition globale de la fonction d'épuisement.

3. Un théorème d'approximation

(IV.9) THÉORÈME. Soit S un espace de Stein, $\pi: X \rightarrow S$ un morphisme q -convexe, φ une fonction d'épuisement de constante exceptionnelle γ , \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module cohérent et \mathcal{U} un recouvrement standard de X . Alors, pour $c > \gamma$ et pour (S_0, S_1) une paire de Runge d'ouverts de Stein $S_1 \subset S_0 \subset S$, la restriction

$$Z^q(\mathcal{U}(S_0), \mathcal{F}) \rightarrow Z^q(\mathcal{U}_c(S_1), \mathcal{F})$$

est d'image dense.

Démonstration. Compte tenu de (I.19), il suffit de considérer le cas où $S_0 \Subset S$, et par (I.17), il suffit donc de montrer que

$$Z^q(\mathcal{U}_c(S_0), \mathcal{F}) \rightarrow Z^q(\mathcal{U}_c(S_1), \mathcal{F})$$

soit d'image dense. Considérons les complexes \mathcal{M}^\bullet , $\mathcal{C}^\bullet(c)$ et $\alpha^\bullet: \mathcal{M}^\bullet \rightarrow \mathcal{C}^\bullet(c)$ de (IV.3) (avec $S_* = S_0$); par (I.2.3), il suffit de montrer que

$$Z^q(C^\bullet(c, S_0) \rightarrow Z^q(C^\bullet(c, S_1)) \tag{*}$$

soit d'image dense (le recouvrement standard utilisé pour définir $\mathcal{C}^\bullet(c)$ n'est pas le recouvrement \mathcal{U}).

(IV.10) LEMME. Le morphisme $\alpha^\bullet: \mathcal{M}^\bullet \rightarrow \mathcal{C}^\bullet(c)$ construit dans (IV.3) a la propriété: pour $S' \subset S_*$ ouvert de Stein,

$$\alpha^q: Z^q(\mathcal{M}^\bullet(S')) \rightarrow Z^q(C^\bullet(c, S'))$$

est d'image dense.

Ce lemme implique le théorème; en effet, comme dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z^q(\mathcal{M}^\bullet(S_0)) & \xrightarrow{\beta} & Z^q(\mathcal{M}^\bullet(S_1)) \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \\ Z^q(C^\bullet(c, S_0)) & \rightarrow & Z^q(C^\bullet(c, S_1)) \end{array}$$

β est d'image dense par (IV.1.3), on en déduit (*).

Démonstration de (IV.10). Comme pour la démonstration de (IV.3), reprenons les constructions de $A(q+1)$ (avec $c_0 = c$); par (I.17)

$$Z^q(C^\bullet(c_p, S')) \rightarrow Z^q(C^\bullet(c, S'))$$

est d'image dense. Cet homomorphisme se factorise par $Z^q(C^\bullet(\varrho, S'))$ (comme dans (II.10)), donc

$$Z^q(C^\bullet(\varrho, S')) \rightarrow Z^q(C^\bullet(c, S'))$$

est d'image dense. Par (I.2.2) et (II.8)

$$Z^q(\check{C}^\bullet(\varrho, S')) \rightarrow Z^q(C^\bullet(\varrho, S'))$$

est surjectif. Comme

$$Z^q(\check{C}^\bullet(\varrho, S')) \subset Z^q(\check{K}^\bullet(\varrho, S')) \subset \check{K}^q(\varrho, S') = \tilde{\mathcal{M}}^q(S')$$

et

$$p \circ \gamma(Z^q(\check{C}^\bullet(\varrho, S'))) = 0 \in \mathcal{M}^{q+1}(S')$$

(avec p et γ comme dans (IV.4)), on en déduit le résultat.

(IV.11) COROLLAIRE. *La deuxième partie du théorème (IV.8) est vraie pour tout ouvert de Stein $S' \subset S$.*

Pour la démonstration, utiliser (I.19).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANDREOTTI, A., *Théorèmes de dépendance algébrique sur les espaces complexes pseudo-concaves*, Bull. Soc. math. France, 91 (1963).
- [2] ANDREOTTI, A. et GRAUERT, H., *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bull. Soc. math. France, 90 (1962).
- [3] FORSTER, O. et KNORR, K., *Ein Beweis des Grauert'schen Bildgarbensatzes nach Ideen von B. Malgrange*, Manuscripta math. 5 (1971).
- [4] GRAUERT, H., *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen*, Publ. Math. I.H.E.S., nr. 5, Paris 1960.

- [5] HIRZEBRUCH, F., *Topological methods in algebraic geometry*, Springer, Berlin 1966.
- [6] KIEHL, R. et VERDIER, J.-L., *Ein einfacher Beweis des Kohärenzsatzes von Grauert*, Math. Ann. 195 (1971).
- [7] KNORR, K., *Noch ein Theorem der analytischen Garbentheorie*, Regensburg 1970.
- [8] KNORR, K. et SCHNEIDER, M., *Relativexzeptionelle analytische Mengen*, Math. Ann. 193 (1971).
- [9] MALGRANGE, B., *Analytic spaces*, Ens. math., Genève, 1968.
- [10] NARASIMHAN, R., *The Levi problem for complex spaces*, Math. Ann. 142 (1961).
- [11] REIFEN, H.-J., *Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen mit kompaktem Träger*, Math. Ann. 164 (1966).
- [12] SIEGFRIED, P., *Morphismes q -convexes et images directs*, C.R. Acad. Sc. Paris, tome 277 (1973).
- [13] SIU, Y.-T., *The 1-convex generalisation of Grauert's direct image theorem*, Math. Ann. 190 (1971).
- [14] —, *A pseudoconvex-pseudoconcave generalisation of Grauert's direct image theorem*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, XXVI (1972).

*Institut de Mathématiques,
2-4 Rue de Lièvre,
1211 Genève 24*

Reçu le 16 janvier 1974