

Zum Satz von Artin-Schreier über die Eindeutigkeit des reellen Abschlusses eines angeordneten Körpers.

Autor(en): **Becker, Eberhard / Spitzlay, Karl-Josef**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **50 (1975)**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-38794>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Zum Satz von Artin-Schreier über die Eindeutigkeit des reellen Abschlusses eines angeordneten Körpers

VON EBERHARD BECKER UND KARL-JOSEF SPITZLAY

1. Nach Artin und Schreier [1] besitzt ein angeordneter Körper K bis auf Anordnungsisomorphie nur einen reellen Abschluß. Für diesen Satz sind in jüngster Zeit zwei weitere Beweise veröffentlicht worden: von Gross und Hafner [3] sowie von Knebusch [5]. An zentraler Stelle in allen Beweisen wird nachgewiesen, daß ein Polynom $f(x) \in K[x]$, welches in einem reellen Abschluß eine Nullstelle besitzt, auch in anderen reellen Abschlüssen Nullstellen hat. Artin und Schreier gelingt dies mittels des Sturmischen Kriteriums, Gross und Hafner durch die Anwendung des Weierstraßschen Nullstellensatzes und des Satzes von Rolle. Völlig andersartig zieht dagegen Knebusch die Theorie quadratischer Formen heran. Er geht aus von der durch Harrison und Leicht und Lorenz entdeckten Korrespondenz zwischen den Anordnungen eines Körpers und seinen Signaturen, d.h. den Homomorphismen seines Witttringes auf \mathbf{Z} . Statt mit Körpern und ihren Anordnungen arbeitet Knebusch mit den zugehörigen Witttringen und deren Signaturen. Dieser Ansatz hat nicht nur zu einem neuen Beweis geführt, sondern es war Knebusch auch möglich, die Artin-Schreier-Theorie der reellen Hüllen auf Ringe zu übertragen [6].

Daß sich der Satz von Artin-Schreier mit Sätzen über quadratische Formen beweisen lassen soll, erscheint auf den ersten Blick völlig überraschend. In den Lemmata 4.1 und 4.3 von [5] wird – in anderer Formulierung – folgendes bewiesen: R sei reeller Abschluß von K , jedem irreduziblen Polynom $f(x) \in K[x]$ läßt sich eine quadratische Form zuordnen, deren Signatur genau dann positiv ist, wenn $f(x)$ eine Nullstelle in R besitzt. Derartige Kriterien über die Realität von Wurzeln einer algebraischen Gleichung gehen im Fall, daß R der Körper der reellen Zahlen ist, auf Sylvester und Hermite zurück. Man findet sie auch noch in älteren Lehrbüchern über Algebra [2], S. 186ff, [8], S. 1–7, [9], S. 281ff.

Wir werden zum Schluß der Arbeit skizzieren, wie die Sylvesterschen Untersuchungen über den Sturmischen Satz zu diesen Kriterien geführt haben. Daneben haben wir die Absicht, den Beweis von Knebusch so weit zu vereinfachen, daß aus der Theorie quadratischer Formen nur der Sylvestersche Trägheitssatz herangezogen wird. Dazu greifen wir einen alten Beweis wieder auf.

Wir möchten an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. H. Benz für seine Unterstützung bei der Abfassung dieser Arbeit danken.

2. Sei K ein angeordneter Körper und R ein reell-abgeschlossener Erweiterungskörper von K , dessen Anordnung die Anordnung von K fortsetze. Jede quadratische Form über K $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{r,s=1}^n a_{rs}x_r x_s$ läßt sich über K auf Diagonalgestalt $\varphi(y_1, \dots, y_n) = \sum_{r=1}^n a_r y_r^2$ transformieren. Nach dem Trägheitssatz von Sylvester ist die Anzahl der positiven bzw. negativen Koeffizienten für alle Diagonaldarstellungen diesselbe. Man nennt die ganze Zahl $\text{sgn } \varphi := \#\{a_r \mid a_r > 0\} - \#\{a_r \mid a_r < 0\}$ die Signatur von φ . Es ist $\text{sgn } \varphi = k$ äquivalent dazu, daß φ über R eine Diagonaldarstellung

$$\varphi(z_1, \dots, z_n) = \text{sgn}(k) \sum_{r=1}^{|k|} z_r^2 + \sum_{s=1}^l (z_{k+2s}^2 - z_{k+2s-1}^2)$$

besitzt.

Sei $f(x)$ ein Polynom über K vom Grade n , $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ seien die evtl. mehrfach gezählten Wurzeln von $f(x)$ in einem algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörper. Wir ordnen $f(x)$ die folgende quadratische Form zu, wobei wir uns in der Bezeichnung an [5] anlehnen:

$$\text{Tr}^{(f)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{r,s=1}^n \sigma_{r+s-2} x_r x_s \quad \text{mit} \quad \sigma_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Mittels dieser Form läßt sich die Anzahl der Nullstellen von $f(x)$ in K bestimmen, falls K reell-abgeschlossen ist. Den Beweis führen wir nach [2], [8], [9]. Zusätzlich zeigen wir, daß die universelle Anwendbarkeit dieses Kriteriums die reell-abgeschlossenen Körper kennzeichnet. Diese neue Kennzeichnung ist implizit in der Theorie der wechselseitigen Lage von Nullstellen zweier Polynome („theory of intercalation“) von Sylvester enthalten [7].

SATZ 1. i) $\text{Tr}^{(f)}$ ist eine quadratische Form über K , die genau dann nichtausgeartet ist, wenn f keine mehrfachen Nullstellen besitzt,

ii) ist K reell-abgeschlossen, so gilt:

$$\text{sgn } \text{Tr}^{(f)} = \#\{\alpha \in K \mid f(\alpha) = 0\},$$

iii) gilt umgekehrt für alle Polynome $f(x)$ über K die Beziehung in ii), so ist K reell-abgeschlossen.

Beweis. i) Die Potenzsummen σ_k sind bekanntlich ganz-rationale Funktionen der Koeffizienten von $f(x)$ und liegen daher in K .

Dem folgenden Beweis von ii) entnimmt man, daß $\text{Tr}^{(f)}$ über einem reell-abgeschlossenen Erweiterungskörper zu einer quadratischen Form äquivalent ist, deren Dimension mit der Anzahl der verschiedenen Nullstellen von f übereinstimmt. Das ergibt die noch fehlende Aussage von i).

ii) Die Wurzeln α_k liegen bereits im algebraischen Abschluß $K(i)$ von K . Für

$z = a + bi$, $a, b \in K$, sei $\bar{z} = a - bi$ die „konjugiertkomplexe“ Zahl. Seien β_1, \dots, β_k die verschiedenen Nullstellen von $f(x)$ in K , und sei $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ ein Vertretersystem der verschiedenen Paare konjugiert-komplexer Wurzeln; die jeweiligen Vielfachheiten seien n_1, \dots, n_k bzw. m_1, \dots, m_l . Damit folgt:

$$\begin{aligned} \text{Tr}^{(f)}(x) &= \sum_{r, s, t} \alpha_t^{r-1+s-1} x_r x_s = \sum_{t=1}^k \left(\sum_{r=1}^n \alpha_t^{r-1} x_r \right)^2 = \sum_{t=1}^k n_t \cdot \left(\sum_{r=1}^n \beta_t^{r-1} x_r \right)^2 + \\ &+ \sum_{s=1}^l m_s \left[\left(\sum_{r=1}^n \gamma_s^{r-1} x_r \right)^2 + \left(\sum_{r=1}^n \bar{\gamma}_s^{r-1} x_r \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Die reguläre Substitution

$$\begin{aligned} y_t &= x_1 + \beta_t x_2 + \dots + \beta_t^{n-1} x_n, & t &= 1, \dots, k \\ y_{k+2s-1} &= x_1 + \frac{\gamma_s + \bar{\gamma}_s}{2} x_2 + \frac{\gamma_s^2 + \bar{\gamma}_s^2}{2} x_3 + \dots + \frac{\gamma_s^{n-1} + \bar{\gamma}_s^{n-1}}{2} x_n, & s &= 1, \dots, l \\ y_{k+2s} &= \frac{\gamma_s - \bar{\gamma}_s}{2i} x_2 + \frac{\gamma_s^2 - \bar{\gamma}_s^2}{2i} x_3 + \dots + \frac{\gamma_s^{n-1} - \bar{\gamma}_s^{n-1}}{2i} x_n \\ y_v &= x_v, & v &= k + 2l + 1, \dots, n \end{aligned}$$

transformiert $\text{Tr}^{(f)}(x)$ über K auf die Gestalt:

$$\text{Tr}^{(f)}(y) = \sum_{t=1}^k n_t y_t^2 + \sum_{s=1}^l 2m_s (y_{k+2s-1}^2 - y_{k+2s}^2),$$

woraus man $\text{sgn Tr}^{(f)} = \# \{ \alpha \in K \mid f(\alpha) = 0 \}$ abliest.

iii) Es genügt nach [1], Satz 3a, zu zeigen, daß jedes positive Element von K eine Quadratwurzel in K und daß jedes irreduzible Polynom ungeraden Grades eine Nullstelle in K besitzt. Sei $a \in K$, $a > 0$; für das Polynom $f(x) = x^2 - a$ gilt $\text{Tr}^{(f)}(x, y) = 2(x^2 + ay^2)$; also hat $\text{sgn Tr}^{(f)} = 2$ die Existenz einer Wurzel in K zur Folge. Ein über K irreduzibles Polynom $f(x)$ vom ungeraden Grad hat keine mehrfachen Nullstellen, also ist $\text{Tr}^{(f)}$ eine nichtausgeartete Form ungerader Dimension. Daraus schließt man $\text{sgn Tr}^{(f)} \neq 0$, was n.V. die Existenz einer Nullstelle von $f(x)$ in K besagt.

Bemerkungen. 1) Ist der angeordnete Körper K nicht reell-abgeschlossen, so ist zwar $\text{Tr}^{(f)}(x)$ noch eine Form über K , aber $\text{sgn Tr}^{(f)}$ ist nicht mehr die Anzahl der Nullstellen von $f(x)$ in K , sondern die der Nullstellen in jedem reell-abgeschlossenen Oberkörper R , dessen Anordnung die Anordnung von K fortsetzt. In dieser Weise werden wir das Kriterium aus Satz 1 anwenden.

2) Sei L/K endliche Körpererweiterung, etwa $L = K(\alpha_1)$ und $f(x) = \text{Irr}(\alpha_1, K)$. Dann ist $\text{Tr}_{L/K}(\alpha_1^k) = \sigma_k$ und daher $\text{Tr}^{(f)}(x)$ die Darstellung der quadratischen Form $\text{Tr}^*(1)$ bzgl. der Basis $1, \alpha_1, \dots, \alpha_1^{n-1}$; vgl. [5].

SATZ 2. (vgl. [3]; [5], Prop. 4.4). *L sei angeordneter Körper und endlich über dem Körper K, der die induzierte Anordnung trage. Jeder anordnungstreue Monomorphismus $\sigma: K \rightarrow F$ in einen reell-abgeschlossenen Körper besitzt eine anordnungstreue Fortsetzung $\tau: L \rightarrow F$.*

Beweis. Sei R reelle Hülle von L , $L = K(\alpha_1)$ und $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ das irreduzible Polynom von α_1 über K . Wir beweisen zunächst, daß es überhaupt eine Fortsetzung $\tau: L \rightarrow F$ von $\sigma: K \rightarrow F$ gibt; dazu muß man zeigen, daß $f^\sigma(x) := x^n + \sigma(a_1) x^{n-1} + \dots + \sigma(a_n)$ eine Nullstelle in F besitzt. Nach Satz 1 gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \operatorname{Tr}^{(f)} &= \# \{ \alpha \in R \mid f(\alpha) = 0 \}, \\ \operatorname{sgn} \operatorname{Tr}^{(f^\sigma)} &= \# \{ \beta \in F \mid f^\sigma(\beta) = 0 \}. \end{aligned}$$

Einer quadratischen Form $\varphi(x) = \sum_{r,s} a_{rs} x_r x_s$ über K ordnen wir die Form $\varphi^\sigma(x) := \sum_{r,s} \sigma(a_{rs}) x_r x_s$ über $\sigma(K)$ zu. Dabei gehen isometrische Formen in isometrische Formen über, und da σ anordnungstreu ist, gilt ferner

$$\operatorname{sgn} \varphi^\sigma = \operatorname{sgn} \varphi.$$

Sei $\sigma': R(i) \rightarrow F(i)$ eine Fortsetzung von $\sigma: K \rightarrow F$; über $R(i)$ gilt:

$$f(x) = \prod_{t=1}^n (x - \alpha_t),$$

daher über $F(i)$:

$$f^\sigma(x) = f^{\sigma'}(x) = \prod_{t=1}^n (x - \sigma'(\alpha_t)) =: \prod_{t=1}^n (x - \beta_t).$$

Daraus leitet man ab

$$\sum_1^n \beta_t^k = \sum_1^n \sigma'(\alpha_t^k) = \sigma' \left(\sum_1^n \alpha_t^k \right) = \sigma \left(\sum_1^n \alpha_t^k \right),$$

was

$$\operatorname{Tr}^{(f^\sigma)} = (\operatorname{Tr}^{(f)})^\sigma, \quad \operatorname{sgn} \operatorname{Tr}^{(f^\sigma)} = \operatorname{sgn} \operatorname{Tr}^{(f)}$$

nach sich zieht. Nach Wahl von R ist aber $\operatorname{sgn} \operatorname{Tr}^{(f)} > 0$, und f^σ hat daher eine Nullstelle in F .

Um zu zeigen, daß auch eine anordnungstreue Fortsetzung existiert, geben wir das Argument von Knebusch aus [5] wieder. Seien $\tau_j: L \rightarrow F$, $j=1, \dots, r$, sämtliche Fortsetzungen von σ , und keine von ihnen sei anordnungstreu. Dann findet man $a_j > 0$ in L mit $\tau_j(a_j) < 0$ in F , $j=1, \dots, r$. In R ist jedes positive Element Quadrat, daher liegt auch $L' := L(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_r})$ in R , und es gibt nach dem Bewiesenen eine Fortsetzung

$\tau: L' \rightarrow F$ von σ . Daraus folgt $\tau(a_j) = \tau(\sqrt{a_j})^2 > 0$ im Widerspruch zu der Tatsache, daß τ auf L mit einem der Monomorphismen τ_j übereinstimmen muß.

Damit ist die Hauptarbeit für den Eindeutigkeitsbeweis geleistet.

SATZ 3. *R sei reeller Abschluß des angeordneten Körpers K. Jeder anordnungstreue Monomorphismus $\sigma: K \rightarrow F$ in einen reell-abgeschlossenen Körper F besitzt genau eine (notwendig anordnungstreue) Fortsetzung $\tau: R \rightarrow F$.*

Beweis. Satz 2 zeigt unter Anwendung des Zornschen Lemmas die Existenz einer anordnungstreuen Fortsetzung $\tau: R \rightarrow F$. Sei τ' eine weitere Fortsetzung; τ' ist anordnungstreu, da in reell-abgeschlossenen Körpern Quadrate und positive Elemente übereinstimmen. Sei $\alpha \in R$, und seien $\alpha_1 < \dots < \alpha_r = \alpha < \dots < \alpha_k$ alle Nullstellen des Minimalpolynoms $f(x) \in K[x]$ von α in R . Nach dem Beweis zu Satz 2 hat $f^\sigma(x)$ auch genau k Nullstellen in F , daher

$$\{\tau(\alpha_1), \dots, \tau(\alpha_k)\} = \{\tau'(\alpha_1), \dots, \tau'(\alpha_k)\}.$$

Aus

$$\tau(\alpha_1) < \dots < \tau(\alpha_k), \quad \tau'(\alpha_1) < \dots < \tau'(\alpha_k)$$

folgt

$$\tau(\alpha) = \tau(\alpha_r) = \tau'(\alpha_r) = \tau'(\alpha).$$

3. Zum Schluß wollen wir skizzieren, wie Sylvesters Untersuchungen über den Sturmschen Satz zu dem im vorliegenden Beweis verwendeten Kriterium geführt haben. Dabei legen wir seine große Arbeit [7] aus dem Jahre 1853 zugrunde.

Sei $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbf{R}[x]$ ein Polynom ohne mehrfache Nullstellen; für die Sturmsche Kette werden nach dem Euklidischen Algorithmus Hilfsfunktionen $R_0 = f'(x), R_1, \dots, R_m$ bestimmt. Sylvester führt eine Art „generischer“ Untersuchung durch, bei der er so rechnet, als ob die auftretenden rationalen Funktionen der Koeffizienten nicht verschwinden. Zunächst erhält man bei dieser Betrachtung eine Kette $(f, f', R_1, \dots, R_{n-1})$ der Länge $n+1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= M_0 f'(x) - R_1 & \text{grad } R_i &= n-1-i, \\ f' &= M_1 R_1 - R_2 & \text{grad } M_i &= 1, \\ R_1 &= M_2 R_2 - R_3 & R_{n-1} &= \text{const.} \neq 0, \\ &\dots\dots\dots \\ R_{n-3} &= M_{n-2} R_{n-2} - R_{n-1}. \end{aligned}$$

Die R_i, M_i sind Polynome in x über dem rationalen Funktionenkörper $\mathbf{Q}(a_1, \dots, a_n)$. Nach Abspalten des Inhaltes λ_i von R_i erhält man eine Zerlegung

$$R_i = \lambda_i \varrho_i,$$

mit

$$\lambda_i \in \mathbf{Q}(a_1, \dots, a_n), \quad \varrho_i \in \mathbf{Q}[a_1, \dots, a_n, x].$$

Die Faktoren λ_i , „the allotropic factors“, erweisen sich als Quadrate, so daß man für das Sturmsche Kriterium mit der Untersuchung der vereinfachten Sturmschen Reste ϱ_i auskommt. Bereits 1839 war es Sylvester gelungen, die Polynome ϱ_i durch die Wurzeln α_r von $f(x)$ auszudrücken, insbesondere ist der höchste Koeffizient von R_{i-1} ($R_0 = f'$) gleich

$$D_i := \begin{vmatrix} \sigma_0 & \cdots & \sigma_{i-1} \\ \sigma_1 & \cdots & \sigma_i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{i-1} & \cdots & \sigma_{2i-2} \end{vmatrix}, \quad i=1, \dots, n,$$

$$\sigma_k = \sum_{r=1}^n \alpha_r^k.$$

Die Vorzeichen in der Sturmschen Kette ($f(x), f'(x), R_1, \dots, R_{n-1}$) sind für Argumente x von genügend großem Betrage allein durch die höchsten Koeffizienten bestimmt. Bezeichnet t die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge

$$(1, D_1, \dots, D_n),$$

so hat $f(x)$ nach dem Sturmschen Satz genau $n - 2t$ reelle Nullstellen. Durch Cauchy war bereits bekannt, daß eine quadratische Form $\sum_{r,s} a_{rs} x_r x_s$ auf die Diagonalgestalt

$$D'_1 y_1^2 + \frac{D'_2}{D'_1} y_2^2 + \cdots + \frac{D'_n}{D'_{n-1}} y_n^2$$

transformiert werden kann, wenn D'_r die sukzessiven Hauptunterdeterminanten von (a_{rs}) sind. Im vorliegenden Fall besitzt daher $\text{Tr}^{(f)}$ eine Diagonaldarstellung mit t negativen und $n - t$ positiven Quadraten. Es ist interessant zu bemerken, daß Sylvester bei diesen Überlegungen den Trägheitssatz beweist [7], Art. 44. Nach diesem Satz ist die Zahl $n - 2t$ der Form $\text{Tr}^{(f)}$ invariant zugeordnet und kann aus jeder Diagonaldarstellung abgelesen werden. In Verbindung mit dem Sturmschen Satz erhält man weiterhin, daß die Signatur von $\text{Tr}^{(f)}$ mit der Anzahl reeller Nullstellen von $f(x)$ übereinstimmt.

Sylvester selbst hat diese letzte Aussage nicht explizit formuliert; er stellt vielmehr einen Zusammenhang her zwischen der Anzahl reeller Nullstellen und der Signatur der Bezoutiante, einer quadratischen Form, die in der Eliminationstheorie auftritt. Hermite dagegen arbeitet mit einer Form $\text{Tr}_\alpha^{(f)}$, die aus $\text{Tr}^{(f)}$ durch die Einführung eines reellen Parameters α entsteht und beweist ein Analogon zum Sturmschen Satz:

die Anzahl der reellen Nullstellen in einem Intervall (α, β) ist gleich $\frac{1}{2} (\operatorname{sgn} \operatorname{Tr}_\alpha^{(f)} - \operatorname{sgn} \operatorname{Tr}_\beta^{(f)})$, [4], auch [2], S. 217f [8], S. 5, [9], S. 313ff.

Wie auch Sylvester bemerkt hat, läßt sich dieses Ergebnis ohne Verwendung des Sturmschen Satzes direkt aus dem Trägheitssatz folgen; der Beweis von Sylvester ist die Vorstufe des Beweises von Satz 1, [7], Art. 46ff.

Wir haben den Beweis des Satzes von Artin-Schreier nach Satz 1 in der von Knebusch gewählten Weise fortgesetzt. Jedoch ließe sich auch der ursprüngliche Beweis von Artin und Schreier modifizieren, indem man das Sturmsche Kriterium durch das Kriterium von Satz 1 ersetzt.

LITERATUR

- [1] ARTIN, E. und SCHREIER, O., *Algebraische Konstruktion reeller Körper*, Abh. Math. Sem. Hamburg 5 (1926), 85–99.
- [2] FRICKE, R., *Lehrbuch der Algebra I*, Braunschweig 1924.
- [3] GROSS, H. und HAFNER, P., *Über die Eindeutigkeit des reellen Abschlusses eines angeordneten Körpers*, Comment. Math. Helv. 44 (1969), 491–494.
- [4] HERMITE, CH., *Remarques sur le théorème de M. Sturm*, C. R. Acad. Sci. Paris 36 (1853); siehe auch: *Oeuvres de Charles Hermite*, par É. Picard, Paris 1905.
- [5] KNEBUSCH, M., *On the uniqueness of real closures and the existence of real places*, Comment. Math. Helv. 47 (1972), 260–269.
- [6] ———, *Real closures of commutative rings*, J. reine angew. Math., demnächst.
- [7] SYLVESTER, J. J., *On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's functions, and that of the greatest algebraical common measure*, Philos. Trans. Roy. Soc. London, CXLIII (1853), 407–548; siehe auch: *The collected mathematical papers of James Joseph Sylvester, I* (1837–1853), New York 1973.
- [8] PERRON, O., *Algebra II*, Berlin und Leipzig 1933.
- [9] WEBER, H., *Lehrbuch der Algebra I*, 3. Auflage, New York.

D-5 Köln 41
Weyertal 89–90
F.R.G.

Eingegangen den 14. Januar 1974

