Konforme Verheftung von Gebieten mit beschränkter Randdrehung.

Autor(en): **Huber, Alfred**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **50 (1975)**

PDF erstellt am: **11.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-38803

Comment. Math. Helvetici *50* (1975) 179–186 Birkhäuser Verlag, Basel

Konforme Verheftung von Gebieten mit beschränkter Randdrehung

ALFRED HUBER (Zürich)

Das Problem, wann eine vorgegebene Verheftungsvorschrift für die Ränder zweier ebener Jordanbereiche im Sinne von A. Pfluger [9] *zulässig* ist, d.h. wann sie eine Verheftung der beiden konformen Strukturen zur Folge hat, ist wohl heute noch als ungelöst zu betrachten. Immerhin ist man im Rahmen der Theorie der quasikonformen Abbildungen – im Anschluss an eine Entdeckung von Ahlfors und Beurling [3] über das Randverhalten – zu einem nützlichen hinreichenden Kriterium gelangt (O. Lehto und K. I. Virtanen [4], A. Pfluger [9]).

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir einen Fall von *isometrischer Verheftung*: Zwei von rektifizierbaren Jordankurven berandete Bereiche sollen derart miteinander verheftet werden, dass zugeordnete Randbogen stets dieselbe Länge aufweisen. Wir beschränken uns auf eine Teilklasse der rektifizierbaren Kurven, nämlich die Kurven von beschränkter Drehung (V. Paatero [7, 8]). Durch Anwendung eines Darstellungssatzes von Paatero und des oben erwähnten hinreichenden Kriteriums erhalten wir folgendes Resultat:

SATZ. *Längs Bogen, welche keine Nullwinkel enthalten, ist die isometrische Verheftung von Kurven beschränkter Drehung zulässig.*

Dieses Ergebnis steht in enger Beziehung zum Alexandrowschen Verheftungssatz für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung [1, 2]. Einerseits wird es durch diesen und Resultate von I. G. Reschetnjak [10] impliziert. (Es ist also bereits bewiesen, und zwar sogar ohne Annahme über die Abwesenheit von Nullwinkeln, allerdings – vom funktionentheoretischen Standpunkt aus gesehen – auf kolossalem Umweg). Anderseits aber bildet der obige Satz eine der Grundlagen für einen funktionentheoretischen Zugang zum Alexandrowschen Verheftungssatz. (Die interessanten Probleme eines solchen Zugangs sind von H. Leutwiler [6] eingehend diskutiert worden.)

Beweis des Satzes. Sei Ω ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet in der komplexen Ebene, dessen Rand Γ von beschränkter Drehung ist (Definition siehe V. Paatero [7, p. 6]). Sei f eine konforme Abbildung des Einheitskreises $\{\zeta \mid |\zeta|<1\}$ auf Ω. Nach Paatero [7, p. 45] existiert eine Funktion ψ, definiert und von beschränkter Schwankung auf $[0, 2\pi]$, derart dass

$$\log|f'(\zeta)| = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{i\vartheta} - \zeta| \, d\psi(\vartheta). \tag{1}$$

Wir übertragen diese Darstellung vom Einheitskreis auf die obere Halbebene $\{z \mid \mathrm{Im}>0\}$. Die Funktion

$$g = f \circ h, \quad \text{wobei} \quad h(z) = \frac{z-i}{z+i},$$

bildet diese Halbebene konform auf Ω ab. Dabei ist

$$\log|g'(z)| = \log\left|f'\left(\frac{z-i}{z+i}\right)\right| + \log 2 - 2\log|z+i|. \tag{2}$$

Es bezeichne μ' die durch h^{-1} auf die reelle Achse verpflanzte Funktion ψ, $\mu'(t) = \psi[h(t)]$. Wir nehmen an, dass $f(1) = g(\infty)$ innerer Punkt eines geradlinigen Randstücks ist. (Diese Annahme ist für das Folgende ohne Belang, da die zu beweisende Zulässigkeit einer Verheftung eine lokale Eigenschaft ist). Dann besitzt das durch μ' erzeugte Mass kompakten Träger, und es ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\mu'(t) = 2\pi.$$

Aus (1) und (2) erhält man nach kurzer Rechnung die Darstellung

$$\log|g'(z)| = -\log 2 - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \log\frac{|z-t|}{\sqrt{1+t^2}} \, d\mu'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \log|z-t| \, d\mu(t) + \text{const.}, \tag{3}$$

wobei

$$\mu = -\frac{\mu'}{\pi}.$$

Kurven von beschränkter Drehung sind rektifizierbar (V. Paatero [8, p. 6]). Es bezeichne γ denjenigen Teilbogen von Γ, welchem bei der Abbildung f^{-1} das zwischen $e^{i\alpha}$ und $e^{i\beta}$ $(\alpha < \beta)$ liegende Kreisbogenstück entspricht. Nach bekannten Resultaten über das Randverhalten bei konformer Abbildung (F. Riesz [11], W. Seidel [12]) besitzt γ die Länge

$$L=\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(e^{i\Theta})\, d\Theta, \tag{4}$$

wobei

$$\varphi(e^{i\Theta})=\lim_{r\to 1}|f'(re^{i\Theta})|.$$

(Dieser Limes existiert für fast alle Θ, da die Randkurve Γ rektifizierbar ist). Durch Anwendung des Lebesgueschen Konvergenzsatzes erhält man in unserm speziellen Fall

$$\varphi(e^{i\Theta})=\exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{i\vartheta}-e^{i\Theta}|\, d\psi(\vartheta)\right\}.$$

Aus (4) folgt damit

$$L=\int_{\alpha}^{\beta} \exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{i\vartheta}-e^{i\Theta}|\, d\psi(\vartheta)\right\} d\Theta.$$

Die Verpflanzung auf die Halbebene ergibt

$$L=C\int_a^b \exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \log|\xi-\eta|\, d\mu(\eta)\right\} d\xi. \tag{5}$$

Dabei ist $[a, b]$ das dem Bogen γ bei der Abbildung g^{-1} entsprechende Intervall auf der reellen Achse.

Seien nun Ω_1 und Ω_2 einfach zusammenhängende, beschränkte Gebiete von beschränkter Randdrehung mit (gleich langen) Rändern Γ_1 und Γ_2, welche isometrisch verheftet werden sollen. Zur Beurteilung der Zulässigkeit der Verheftung führen wir das Problem auf die Verheftung von Halbebenen zurück: Sei g_1 eine konforme Abbildung der obern Halbebene auf Ω_1, und sei g_2 eine konforme Abbildung der untern Halbebene auf Ω_2; diese Abbildungen können stetig auf die Gebietsränder ausgedehnt werden. Dabei seien $g_1(0)$ und $g_2(0)$ Punkte, welche bei der Verheftung miteinander identifiziert werden. Da die Zulässigkeit einer Verheftung eine lokale Eigenschaft ist, dürfen wir ohne Verlust an Allgemeinheit annehmen, dass $g_1(\infty)$ und

$g_2(\infty)$ innere Punkte eines geradlinigen Randstückes sind. Wir definieren

$\alpha(x) :=$ Länge des Bogens $g_1([0, x])$,
$\beta(x) :=$ Länge des Bogens $g_2([0, x])$.

Die isometrische Verheftungsvorschrift für Γ_1 und Γ_2 induziert auf der reellen Achse die Verheftung $x \mapsto \beta^{-1}[\alpha(x)]$. Zum Beweis von Satz 1 ist nun noch nachzuweisen, dass die Funktion $\beta^{-1} \circ \alpha$ auf jedem endlichen Intervall quasisymmetrisch ist. (Für die hier verwendeten Begriffe und Resultate siehe Lehto und Virtanen [5], insbesondere p. 91/92). Hiefür genügt es zu verifizieren, dass α (und somit auch β auf jedem endlichen Intervall quasisymmetrisch ist.

BEHAUPTUNG. Es gibt positive Zahlen M und t_0 mit der Eigenschaft, dass

$$\frac{1}{M} \leqq \frac{\alpha(x+t)-\alpha(x)}{\alpha(x)-\alpha(x-t)} \leqq M \tag{6}$$

für alle reellen x und alle $t \in (0, t_0)$.

Beweis. Da

$$\alpha(x) = C \int_0^x \exp\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \log|\xi-\eta| \, d\mu(\eta) \right\} d\xi,$$

ist (6) aequivalent mit

$$\frac{1}{M} \leqq \frac{\int_x^{x+t} \exp\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \log|\xi-\eta| \, d\mu(\eta)\} \, d\xi}{\int_{x-t}^{x} \exp\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \log|\xi-\eta| \, d\mu(\eta)\} \, d\xi} \leqq M. \tag{7}$$

Das Mass μ besitzt folgende Eigenschaften:

(a) μ hat kompakten Träger,

(b) $\mu(\mathbf{R}) = -2$,

(c) Für alle $\eta \in \mathbf{R}$ ist $\mu^+(\{\eta\}) < 1$ und $\mu^-(\{\eta\}) < 1$, wobei $\mu = \mu^+ - \mu^-$ die Jordansche Zerlegung des Masses μ bezeichnet. (Diese Eigenschaft ist eine Folge des Ausschlusses von Nullwinkeln).

Sei nun t_0 eine positive Zahl mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine Zahl $\lambda < 1$ so, dass

$$\mu^+(I) \leqq \lambda \quad \text{und} \quad \mu^-(I) \leqq \lambda$$

für jedes abgeschlossene Intervall I, dessen Länge $4\,t_0$ nicht übersteigt.

Seien nun $x \in \mathbf{R}$ und $t \in (0, t_0)$ vorgegeben. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}
p_0 &= \mu^+([x-2t, x+2t]),\\
p_1 &= \mu^+((-\infty, x-2t)),\\
p_2 &= \mu^+((x+2t, +\infty)),\\
q_0 &= \mu^-([x-2t, x+2t]),\\
q_1 &= \mu^-((-\infty, x-2t)),\\
q_2 &= \mu^-((x+2t, +\infty)).
\end{aligned}$$

Abschätzung des Zählers im mittleren Term von Ungleichung (7) *nach oben: Für* $\xi \in [x, x+t]$ und $\eta \in (-\infty, x-2t)$ gilt

$$|x-\eta| \leqq |\xi-\eta| \leqq |x+t-\eta|.$$

Für $\xi \in [x, x+t]$ und $\eta \in (x+2t, +\infty)$ gilt

$$|x+t-\eta| \leqq |\xi-\eta| \leqq |x-\eta|.$$

Daraus schliessen wir, dass für $\xi \in [x, x+t]$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \log|\xi-\eta| \, d\mu(\eta) \leqq I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + p_0 \log(3t) - \int_{[x-2t, x+2t]} \log|\xi-\eta| \, d\mu^-(\eta), \tag{8}$$

wobei

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{(-\infty, x-2t)} \log|x+t-\eta| \, d\mu^+(\eta),\\
I_2 &= \int_{(-\infty, x-2t)} \log|x-\eta| \, d\mu^-(\eta),\\
I_3 &= \int_{(x+2t, +\infty)} \log|x-\eta| \, d\mu^+(\eta),\\
I_4 &= \int_{(x+2t, +\infty)} \log|x+t-\eta| \, d\mu^-(\eta).
\end{aligned}$$

Aus (8) folgt

$$\int_x^{x+t} \exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \log|\xi-\eta| \, d\mu(\eta)\right\} d\xi$$

$$\leqq \exp\{I_1 - I_2 + I_3 - I_4\} \cdot (3t)^{p_0} \cdot \int_x^{x+t} \exp\left\{-\int_{[x-2t, x+2t]} \log|\xi-\eta| \, d\mu^-(\eta)\right\} d\xi.$$

Zur Abschätzung des letzten Integrals nehmen wir zunächst an, auf $[x-2t, x+2t]$ bestehe das Mass μ^- aus einer einzigen Punktmasse q_0. Das in Frage stehende Integral nimmt in diesem Falle dann seinen grössten Wert an, wenn sich die Masse q_0 im Punkt $x+(t/2)$ befindet:

$$\int_x^{x+t} \exp\left\{-\int_{[x-2t,\,x+2t]} \log|\xi-\eta|\, d\mu^-(\eta)\right\} d\xi$$
$$\leqq \int_x^{x+t} \exp\left\{-q_0 \log\left|\xi-\left(x+\frac{t}{2}\right)\right|\right\} d\xi = 2\int_0^{t/2} s^{-q_0}\, ds \leqq \frac{2}{1-\lambda}\cdot t^{1-q_0}.$$

Besteht das Mass μ^- auf $[x-2t, x+2t]$ aus endlich vielen Punktmassen, nämlich $\alpha_1 q_0$ in η_1, $\alpha_2 q_0$ in $\eta_2, \ldots, \alpha_m q_0$ in η_m $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=1$, alle $\alpha_j>0)$, so führt uns eine Anwendung der Hölderschen Ungleichung auf den eben behandelten Spezialfall zurück:

$$\int_x^{x+t} \exp\left\{-\int_{[x-2t,\,x+2t]} \log|\xi-\eta|\, d\mu^-(\eta)\right\} d\xi$$
$$= \int_x^{x+t} \left(\prod_{j=1}^m |\xi-\eta_j|^{-\alpha_j q_0}\right) d\xi \leqq \prod_{j=1}^m \left(\int_x^{x+t} |\xi-\eta_j|^{-q_0}\, d\xi\right)^{\alpha_j} \leqq \frac{2}{1-\lambda}\cdot t^{1-q_0}.$$

Durch Verschmieren der Punktmassen ergibt sich die Gültigkeit derselben Abschätzung für ein beliebiges Mass μ^-. Damit ist gezeigt, dass

$$\int_x^{x+t} \exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \log|\xi-\eta|\, \mathrm{d}\mu(\eta)\right\} d\xi \leqq \exp\{I_1-I_2+I_3-I_4\}\cdot\frac{6}{1-\lambda}\cdot t^{1+p_0-q_0}. \tag{9}$$

Abschätzung des Nenners im mittleren Glied von Ungleichung (7) *nach unten*: Durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung erhalten wir

$$t^2 = \left(\int_{x-t}^{x} 1\cdot d\xi\right)^2$$
$$= \left(\int_{x-t}^{x} \exp\left\{\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \log|\xi-\eta|\, d\mu(\eta)\right\} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \log|\xi-\eta|\, d\mu(\eta)\right\} d\xi\right)^2$$
$$\leqq \int_{x-t}^{x} \exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \log|\xi-\eta|\, d\mu(\eta)\right\} d\xi\cdot \int_{x-t}^{x} \exp\left\{-\int_{-\infty}^{+\infty} \log|\xi-\eta|\, d\mu(\eta)\right\} \mathrm{d}\xi.$$

Unser Ziel ist eine Abschätzung des zweitletzten Integrals nach unten. Zu diesem Zweck suchen wir zunächst eine obere Schranke für das letzte Integral. Dies geschieht nach der beim Beweis von (9) benützten Methode. Wir stützen uns dabei auf folgende Ungleichungen:

Für $\xi \in [x-t, x]$ und $\eta \in (-\infty, x-2t)$ gilt

$$|x-t-\eta| \leqq |\xi-\eta| \leqq |x-\eta|.$$

Für $\xi \in [x-t, x]$ und $\eta \in (x+2t, +\infty)$ gilt

$$|x-\eta| \leqq |\xi-\eta| \leqq |x-t-\eta|.$$

Daraus schliessen wir, dass für $\xi \in [x-t, x]$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \log|\xi-\eta| \, d\mu(\eta) \leqq K_2 - K_1 + K_4 - K_3$$
$$+ q_0 \log(3t) - \int_{[x-2t, x+2t]} \log|\xi-\eta| \, d\mu^+(\eta), \tag{10}$$

wobei

$$K_2 = \int_{(-\infty, x-2t)} \log|x-\eta| \, d\mu^-(\eta) = I_2, \qquad K_1 = \int_{(-\infty, x-2t)} \log|x-t-\eta| \, d\mu^+(\eta),$$

$$K_4 = \int_{(x+2t, +\infty)} \log|x-t-\eta| \, d\mu^-(\eta), \qquad K_3 = \int_{(x+2t, +\infty)} \log|x-\eta| \, d\mu^+(\eta) = I_3.$$

Indem wir das rechte Integral in (10) nach derselben Methode abschätzen wie das rechte Integral in (8), erhalten wir

$$\int_{x-t}^{x} \exp\left\{-\int_{-\infty}^{+\infty} \log|\xi-\eta| \, d\mu(\eta)\right\} d\xi \leqq \exp\{K_2 - K_1 + K_4 - K_3\} \cdot \frac{6}{1-\lambda} \, t^{1+q_0-p_0}.$$

Daraus folgt

$$\int_{x-t}^{x} \exp\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \log|\xi-\eta| \, d\mu(\eta)\right\} d\xi \geqq \exp\{K_1 - K_2 + K_3 - K_4\} \cdot \frac{1-\lambda}{6} \cdot t^{1+p_0-q_0}. \tag{11}$$

Beweis der rechten Hälfte von Ungleichung (7): Aus (9) und (11) erhalten wir für das mittlere Glied von Ungleichung (7) die *obere Schranke*

$$\exp\{(I_1 - K_1) - (I_4 - K_4)\} \cdot \frac{36}{(1-\lambda)^2}. \tag{12}$$

Dabei ist

$$I_1 - K_1 = \int\limits_{(-\infty, x-2t)} \log \left| \frac{x+t-\eta}{x-t-\eta} \right| d\mu^+ (\eta) \leqq p_1 \log 3. \tag{13}$$

(Die obere Grenze des Integranden ist $\log 3$).

Analog gilt

$$I_4 - K_4 = \int\limits_{(x+2t, +\infty)} \log \left| \frac{x+t-\eta}{x-t-\eta} \right| d\mu^- (\eta) \geqq -q_2 \log 3. \tag{14}$$

(Die untere Grenze des Integranden ist $-\log 3$). Da $p_1 + p_2 \leqq \mu^+(\mathbf{R}) + \mu^-(\mathbf{R}) = \|\mu\|$, schliessen wir aus (12), (13) und (14), dass die rechte Hälfte von Ungleichung (7) gültig ist, falls wir

$$M = \frac{36}{(1-\lambda)^2} \cdot 3^{\|\mu\|}$$

setzen. Mit derselben Zahl M gilt auch die *linke Hälfte von Ungleichung* (7). Der Beweis verläuft ganz analog.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] ALEXANDROW, A. D., *Die innere Geometrie der konvexen Flächen*, Akademie-Verlag, Berlin 1955.

[2] ALEKSANDROV, A. D. und ZALGALLER, V. A., *Zweidimensionale Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung* (Russisch), Trudy Mat. Inst. Steklov *63* (1962). Englische Übersetzung: *Intrinsic geometry of surfaces*, Trans. Math. Monographs *15*, Amer. Math. Soc., Providence R.I. 1967.

[3] BEURLING, A. and AHLFORS, L., *The boundary correspondence under quasiconformal mapping*, Acta. Math. *96* (1956), 125–142.

[4] LEHTO, O. and VIRTANEN, K. I., *On the existence of quasi-conformal mappings with prescribed complex dilatation*, Ann. Acad. Sci. Fenn. A I *274* (1960).

[5] ——, *Quasikonforme Abbildungen*, Springer-Verlag 1965.

[6] LEUTWILER, H., *Beiträge zum potentialtheoretischen Aspekt des Verheftungssatzes von A. D. Alexandrow*, Comment. Math. Helv. *45* (1970), 83-109.

[7] PAATERO, V., *Ueber die konforme Abbildung von Gebieten deren Ränder von beschränkter Drehung sind*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Serie A, *33*, Nr. 9, Helsinki 1931.

[8] ——, *Ueber Gebiete von beschränkter Randdrehung*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Serie A, *37*, Nr. 9, Helsinki 1933.

[9] PFLUGER, A., *Ueber die Konstruktion Riemannscher Flächen durch Verheftung*, J. Indian Math. Soc. *24* (Golden Jubilee Commemoration Volume 1960), 401–412.

[10] RESCHETNJAK, I. G., *Die Schwenkung einer Kurve auf einer Mannigfaltigkeit beschränkter Krümmung mit isothermem Linienelement* (Russisch), Sibirskii Mat. J. *4* (1963), 879–910.

[11] RIESZ, F., *Ueber die Randwerte der analytischen Funktionen*, Math. Z. *18* (1923), 87–95.

[12] SEIDEL, W., *Ueber die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung*, Math. Ann. *104* (1931), 182–243.

Eingegangen den 31. Oktober 1974