Ueber die Eigenwerte des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen

Autor(en): **Huber, Heinz**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **51 (1976)**

PDF erstellt am: **01.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-39439

Comment. Math. Helvetici *51* (1976) 215–231 Birkhäuser Verlag, Basel

Ueber die Eigenwerte des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen

HEINZ HUBER (BASEL)

Herrn C. L. Siegel zum 80. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

Auf jeder kompakten Riemannschen Fläche $\mathcal{F}$ vom Geschlecht $g_{\mathcal{F}}>1$ gibt es genau eine Riemannsche Metrik mit konstanter Krümmung -1, welche mit der konformen Struktur von $\mathcal{F}$ verträglich ist. Es sei $\mu_{\mathcal{F}}$ die Länge der kürzesten geschlossenen Geodätischen und $\Delta_{\mathcal{F}}$ der Laplace-Beltrami-Operator bezüglich dieser Metrik. Das Spektrum von $-\Delta_{\mathcal{F}}$ ist diskret; 0 ist ein einfacher Eigenwert, alle übrigen Eigenwerte sind positiv. Es sei $A_{\mathcal{F}}(x)$ die Anzahl der mit ihrer Multiplizität gezählten Eigenwerte im Intervall $[0, x]$ und

$$Q_{\mathcal{F}}(x)=A_{\mathcal{F}}(x)/(g_{\mathcal{F}}-1)x.$$

Da der Inhalt von $\mathcal{F}$ gleich $4\pi(g_{\mathcal{F}}-1)$ ist, so konvergiert nach H. Weyl $Q_{\mathcal{F}}(x)\to 1$ für $x\to+\infty$. Natürlich kann nicht erwartet werden, dass dies gleichmässig in $\mathcal{F}$ gilt! In der vorliegenden Arbeit soll aber gezeigt werden:

(A) Für alle Flächen $\mathcal{F}$ mit $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}}\geq 1+\delta$, $\delta>0$, gilt

$$Q_{\mathcal{F}}(x)\leq 4/j^2J_1^2(j)=2{,}56\ldots \text{ für } x\geq \operatorname{Max}(3, 3/\delta).$$

(Darin bedeutet j die kleinste positive Nullstelle der Besselschen Funktion J_0). Daraus ergibt sich andererseits mit Hilfe der Selbergschen Spurformel [6]:

(B) Für alle Flächen mit $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}}\geq 1+\delta$ gilt

$$Q_{\mathcal{F}}(x)\geq q(x,\delta)\quad \text{für } x>1/4.$$

Dabei ist $q(x, \delta)$ eine für $x>\frac{1}{4}$, $\delta>0$ positive und in beiden Variabeln monoton wachsende Funktion:

$$q(x,\delta)=p(x,y),\qquad y=\min(1, x/3, \delta x/3),$$

$$p(x,y)=\max_{t>0}\left[\frac{\pi}{t}f\left(\frac{t}{x}\right)e^{-t/4x}-\kappa\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{t}\right)e^{-t}\right]>0\quad \text{für } x>\tfrac{1}{4},\ y>0,$$

$$\kappa=4/j^2J_1^2(j),\qquad f(s)=\int_0^\infty \frac{e^{-sr^2}}{\operatorname{Cos}^2\pi r}\,dr.$$

(Wegen $f(0)=1/\pi$ und $f(s)\sim(\sqrt{\pi}/2\sqrt{s})$ für $s\to+\infty$ sieht man sofort, dass die eckige Klammer, als Funktion von $t>0$ betrachtet, für $t\to 0$ gegen $-\infty$, für $t\to+\infty$ gegen 0 strebt und von einem gewissen t an positiv ist; sie besitzt daher in der Tat ein positives Maximum $p(x, y)$. Offensichtlich ist $p(x, y)$ monoton wachsend in beiden Variabeln und somit $q(x, \delta)$ ebenfalls.)

Aus (B) folgt insbesondere, dass $A_{\mathcal{F}}(x)$ für festes $x>\frac{1}{4}$ gross ist, wenn $g_{\mathcal{F}}$ gross und $\mu_{\mathcal{F}}$ nicht zu klein ist. Von besonderem Interesse ist nun $A_{\mathcal{F}}(1/4)$, die Anzahl der "kleinen" Eigenwerte. Diese sind wichtig u.a. für das asymptotische Verhalten des Längenspektrums von $\mathcal{F}$ [3] und für die Selbergsche Zetafunktion [6]. Nachdem H. P. McKean [4] behauptet hatte, dass ausser dem trivialen Eigenwert 0 keine kleinen Eigenwerte auftreten können, hat B. Randol [5] kürzlich gezeigt, dass es Flächen mit beliebig grossem $A_{\mathcal{F}}(1/4)$ geben muss. Wir zeigen nun andererseits:

$$(C_1)\quad A_{\mathcal{F}}(1/4)\leqslant\frac{3\pi^2}{8}(g_{\mathcal{F}}-1)(\log \operatorname{Cos}\tfrac{1}{4}\mu_{\mathcal{F}})^{-3}$$

$$(C_2)\quad A_{\mathcal{F}}(1/4)\leqslant\frac{1}{2}(g_{\mathcal{F}}-1)(\log \operatorname{Cos}\tfrac{1}{4}\mu_{\mathcal{F}})^{-1}.$$

(Offenbar ist (C_1) für grosse, (C_2) für kleine $\mu_{\mathcal{F}}$ interessant.)

Aus (B) und (C_1) ergibt sich: Für $\varepsilon>0$, $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}}\geqslant 2$ gilt

$$\frac{A_{\mathcal{F}}(\frac{1}{4})}{A_{\mathcal{F}}(\frac{1}{4}+\varepsilon)}\leqslant\frac{3\pi^2}{2p(\frac{1}{4}+\varepsilon,\frac{1}{12})}(\log \operatorname{Cos}\tfrac{1}{4}\mu_{\mathcal{F}})^{-3}.$$

Wenn also $\mu_{\mathcal{F}}$ sehr gross ist, dann konzentrieren sich die Eigenwerte des Intervalles $[0,\frac{1}{4}+\varepsilon]$ im kleinen Teilintervall $(\frac{1}{4},\frac{1}{4}+\varepsilon]$ und McKean hat in diesem Falle doch ein wenig recht! Dagegen folgt aus (A) und (B) für $x>\frac{1}{4}$, $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}}\geqslant 2$:

$$\frac{A_{\mathcal{F}}(x)}{A_{\mathcal{F}}(x+\varepsilon)}\geqslant\tfrac{1}{4}j^2J_1^2(j)\frac{xq(x,1)}{\max(3,x+\varepsilon)}.$$

Dass es tatsächlich Flächen mit beliebig grossem $\mu_{\mathcal{F}}$ gibt, scheint nicht selbstverständlich zu sein; im letzten Abschnitt wird deshalb die Existenz solcher Flächen nachgewiesen.

2. Hilfssätze über Legendre-Funktionen

1. Die Differentialgleichung

$$(t^2-1)y''(t)+2ty'(t)+\lambda y(t)=0,\quad \lambda\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

hat in $t=1$ eine reguläre Singularität mit den Exponenten 0, 0. Sie besitzt daher genau eine Lösung

$$F_\lambda \in C^2(-1,+\infty) \quad F_\lambda(1)=1. \tag{2}$$

Aus (1), (2) ergibt sich

$$F'_\lambda(1)=-\lambda/2. \tag{3}$$

LEMMA 1. Ist $y\in C^2(1,b)$, $1<b\leqslant+\infty$, *eine Lösung von* (1) *mit*

$$\lim_{t\downarrow 1} y(t)=\alpha, \tag{4}$$

so gilt: $y=\alpha F_\lambda$.

Beweis: Die Wronskische Determinante

$$W=yF'_\lambda-y'F_\lambda \tag{5}$$

erfüllt in $(1,b)$ die Differentialgleichung $(t^2-1)W'+2tW=0$. Daraus ergibt sich:

$$W(t)=\gamma/t^2-1. \tag{6}$$

Aus (2) und (4)–(6) folgt: $\lim_{t\downarrow 1}(t-1)y'(t)=-\gamma/2$. Wegen (4) muss daher $\gamma=0$ sein. Dann verschwindet aber W im ganzen Intervall $(1,b)$ und y, F_λ sind dort linear abhängig. Daraus folgt wegen (2), (4) die Behauptung.

2. F_λ ist eine Legendresche Funktion erster Art:

$$F_\lambda=P_\nu \quad \text{mit} \quad \nu(\nu+1)=-\lambda. \tag{7}$$

Daraus ergeben sich nach [2] pag. 188 (11) und pag. 262 (122) folgende Darstellungen:

$$F_\lambda(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}R_n(\lambda)\left(\frac{t-1}{2}\right)^n, \quad |t-1|<2, \tag{8}$$

$$R_n(\lambda)=\prod_{k=0}^{n-1}(\lambda+k^2+k), \tag{9}$$

$$F_{1/4}(t)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty\frac{d\tau}{\sqrt{\operatorname{Cos}\tau+t}}. \tag{10}$$

3. Aus (7) folgt nach [2] pag. 402, dass F_λ für $\lambda>\frac{1}{4}$ unendlich viele Nullstellen im Intervall $(1,+\infty)$ besitzt. Wir bezeichnen die kleinste dieser Nullstellen mit $a(\lambda)$. Nach [2] pag. 388–389 besitzt F_λ keine Nullstellen in $(1,+\infty)$ für $\lambda\leqslant\frac{1}{4}$.

Demgemäss setzen wir

$$a(\lambda)=+\infty \quad \text{für} \quad \lambda\leq\tfrac{1}{4}. \tag{11}$$

4. *LEMMA 2. Für* $\lambda\geq 3$ *gilt*

$$a(\lambda)\geq 1+j^2/2\lambda, \qquad \int_1^{1+j^2/2\lambda} F_\lambda^2(t)\,dt\geq j^2J_1^2(j)/2\lambda.$$

Dabei bedeutet j *die erste positive Nullstelle der Besselfunktion* J_0.

Beweis: Wir setzen

$$c=j^2/4=1,44\ldots. \tag{12}$$

Nach (8) gilt für

$$\lambda\geq 3, \quad 0<u\leq 1: \tag{13}$$

$$\begin{aligned} F_\lambda(1+2cu/\lambda)&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\frac{R_n(\lambda)}{\lambda^n}c^nu^n=\\ &=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}c^nu^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{R_n(\lambda)}{\lambda^n}-1\right)c^nu^n= \qquad (14)\\ &=J_0(j\sqrt{u})+A+B \end{aligned}$$

$$A=\sum_{n=1}^{3}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{R_n(\lambda)}{\lambda^n}-1\right)c^nu^n=\frac{c^2u^2}{2\lambda}\left[1-\frac{2}{9}cu\left(2+\frac{3}{\lambda}\right)\right] \tag{15}$$

$$B=\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^nb_n, \qquad b_n=\frac{c^nu^n}{(n!)^2}\left(\frac{R_n(\lambda)}{\lambda^n}-1\right). \tag{16}$$

Nun ist $\frac{2}{9}cu\left(2+\frac{3}{\lambda}\right)\leq\frac{2}{3}c=0,96\ldots$ und somit

$$A>0. \tag{17}$$

Wegen (9) ergibt sich leicht:

$$b_{n+1}/b_n=cu\left(\frac{1}{\lambda}\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+1}\frac{\lambda^{n-1}}{R_n(\lambda)-\lambda^n}+\frac{1}{(n+1)^2}\right),$$

$$R_n(\lambda)\geq\lambda^n+\left(\sum_{k=0}^{n-1}(k^2+k)\right)\lambda^{n-1}=\lambda^n+\tfrac{1}{3}n(n-1)(n+1)\lambda^{n-1}.$$

Somit gilt für $n \geq 4$:

$$b_{n+1}/b_n \leq cu\left(\frac{1}{\lambda}\frac{n}{n+1} + \frac{3}{(n-1)(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) \leq$$
$$\leq c(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{25}) = \tfrac{31}{75}c < 1.$$

Daher folgt aus (16), dass auch $B > 0$. Somit ist nach (14), (17)

$$F_\lambda(1 + 2cu/\lambda) > J_0(j\sqrt{u}) \geq 0 \quad \text{für} \quad \lambda \geq 3,\ 0 < u \leq 1.$$

Daraus folgt aber

$$a(\lambda) \geq 1 + 2c/\lambda = 1 + j^2/2\lambda,$$

$$\int_1^{1+j^2/2\lambda} F_\lambda^2(t)\,dt = \frac{2c}{\lambda}\int_0^1 F_\lambda^2(1+2cu/\lambda)\,du \geq \frac{2c}{\lambda}\int_0^1 J_0^2(j\sqrt{u})\,du =$$
$$= \frac{j^2}{\lambda}\int_0^1 xJ_0^2(jx)\,dx = j^2 J_1^2(j)/2\lambda.$$

LEMMA 3. Für $y \geq 1$ gilt

$$\int_1^y F_{1/4}^2(t)\,dt \geq 2\log\frac{y+1}{2} \tag{18}$$

$$\int_1^y F_{1/4}^2(t)\,dt \geq \frac{2}{3\pi^2}\left(\log\frac{y+1}{2}\right)^3. \tag{19}$$

(Die erste Ungleichung kann für $y \to 1$, die zweite für $y \to +\infty$ asymptotisch nicht verbessert werden.)

Beweis: Aus (10) ergibt sich durch die Substitution

$$u = \arcsin(\mathrm{Tg}\,\tau/2)$$

$$F_{1/4}(t) = \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t+1}}\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-h\sin^2 u}}, \qquad 0 \leq h = \frac{t-1}{t+1} < 1,\ t \geq 1. \tag{20}$$

Da der Integrand ≥ 1 in $[0, \pi/2]$ ist, so folgt

$$F_{1/4}(t) \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t+1}}.$$

Daraus ergibt sich sofort (18). Etwas mehr Mühe bereitet (19). Zunächst folgt aus (20):

$$F_{1/4}(t) = \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}h^n\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}u\,du. \tag{21}$$

Setzen wir

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} u\, du, \tag{22}$$

so gilt:

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{2}{\pi} I_n, \qquad \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} u\, du = I_n.$$

Somit folgt aus (21):

$$F_{1/4}(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t+1}} \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 h^n. \tag{23}$$

Andererseits folgt aus (22) durch die Substitution $v = tg\, u$:

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{dv}{(1+v^2)^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(1+\dfrac{x^2}{n+1}\right)^{n+1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n+1}}.$$

Somit folgt aus (23)

$$F_{1/4}(t) \geqslant \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n+1} = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t+1}} \frac{1}{h} \log \frac{1}{1-h} \geqslant \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t+1}} \log \frac{t+1}{2}.$$

Daraus folgt aber (19) unmittelbar.

5. Wir betrachten nun im Intervall $[1, b]$, $1 < b < +\infty$, das Eigenwertproblem

$$(t^2-1)y'' + 2ty' + \mu y = 0, \qquad y \in C^2[1, b], \qquad y(b) = 0.$$

Nach Lemma 1 und nach 3 sind alle Eigenwerte dieses Problems grösser als $\frac{1}{4}$. Bezeichnen wir den kleinsten Eigenwert mit $\mu(b)$, so ist also

$$\mu(b) > \tfrac{1}{4} \quad \text{für} \quad b > 1, \tag{24}$$

und nach dem Rayleighschen Extremalprinzip gilt

$$\mu(b) = \inf_g \int_1^b (t^2-1)(g'(t))^2\, dt \Big/ \int_1^b g^2(t)\, dt, \qquad g \in C^1[1, b], \qquad g(b) = 0, \tag{25}$$

woraus sich auch ergibt, dass $\mu(b)$ eine monoton fallende Funktion ist. Für $x > \frac{1}{4}$ ist $F_x(t)$ eine Eigenfunktion des Intervalles $[1, a(x)]$, welche im Innern keine Nullstellen besitzt. Daher gilt

$$\mu(a(x)) = x \quad \text{für} \quad x > \tfrac{1}{4}. \tag{26}$$

Diese Bemerkungen ermöglichen uns nun den Beweis von

LEMMA 4. Für $\lambda \leqslant x$ und $1 \leqslant t \leqslant a(x)$ gilt

$$0 \leqslant F_x(t) \leqslant F_\lambda(t).$$

Beweis: Es sei

$$\lambda < x, \qquad g(t) = F_\lambda(t) - F_x(t). \tag{27}$$

Dann folgt aus (1)–(3):

$$g(1) = 0, \qquad g'(1) = \tfrac{1}{2}(x - \lambda) > 0, \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}((t^2 - 1)g') + \lambda g = (x - \lambda)F_x. \tag{29}$$

Wir haben zu zeigen, dass $g(t) \geqslant 0$ in $[1, a(x)]$. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es wegen (28) ein b derart, dass

$$1 < b < a(x) \tag{30}$$

$$g(b) = 0 \tag{31}$$

$$g(t) > 0 \quad \text{in} \quad (1, b). \tag{32}$$

Aus (29) und (31) ergibt sich:

$$(x - \lambda)\int_1^b F_x(t)g(t)\,dt = \lambda\int_1^b g^2(t)\,dt - \int_1^b (t^2 - 1)(g'(t))^2\,dt. \tag{33}$$

Nun ist wegen (32)

$$\int_1^b g^2(t)\,dt > 0$$

und wegen (27), (30), (32)

$$(x - \lambda)\int_1^b F_x(t)g(t)\,dt > 0.$$

Somit folgt aus (33)

$$\int_1^b (t^2 - 1)(g'(t))^2\,dt \Big/ \int_1^b g^2(t)\,dt < \lambda.$$

Wegen (31) folgt daraus nach (25)

$$\mu(b) < \lambda < x. \tag{34}$$

Für $x \leq \frac{1}{4}$ ist dies bereits ein Widerspruch zu (24). Für $x > \frac{1}{4}$ ist $a(x) < +\infty$ und daher folgt aus (30) und (26):

$$\mu(b) \geq \mu(a(x)) = x,$$

ein Widerspruch zu (34). Damit ist Lemma 4 bewiesen.

3. Beweis von (A) und (C)

1. Wir versehen den Einheitskreis $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ mit der hyperbolischen Metrik

$$ds^2 = 4 \frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}, \tag{1}$$

welche die konstante Krümmung -1 besitzt. Für die hyperbolische Distanz $\rho(0, z)$ ergibt sich dann:

$$\operatorname{Cos} \rho(0, z) = \frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}.$$

Wir bezeichnen mit $K(r)$ die Kreisscheibe $\{z \mid \rho(z, 0) \leq r\}$. Führen wir im Nullpunkt geodätische Polarkoordinaten

$$\rho = \rho(0, z), \qquad \vartheta = \arg z$$

ein, so wird

$$ds^2 = d\rho^2 + \operatorname{Sin}^2 \rho \, d\vartheta^2.$$

Daher erhält man für das Flächenelement und den Laplace-Beltrami-Operator der Metrik (1):

$$d\omega = \operatorname{Sin} \rho \, d\rho \, d\vartheta \tag{2}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \operatorname{Ctg} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\operatorname{Sin}^2 \rho} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}. \tag{3}$$

2. Nun sei $\mathcal{F}$ eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g_{\mathcal{F}} > 1$ und q ein beliebiger Punkt von $\mathcal{F}$. Dann gibt es eine konforme Ueberlagerungsabbildung $\gamma: E \to \mathcal{F}$ mit

$$\gamma(0) = q. \tag{4}$$

Mit Hilfe von γ kann die Differentialgeometrie (1) von E auf $\mathcal{F}$ verpflanzt werden; das ergibt gerade die in der Einleitung eindeutig charakterisierte Metrik von $\mathcal{F}$. Für jede Funktion $\varphi \in C^2(\mathcal{F})$ gilt dann:

$$(\Delta_{\mathcal{F}}\varphi)\circ\gamma = \Delta(\varphi\circ\gamma). \tag{5}$$

Es sei Γ die zur Ueberlagerungsabbildung γ gehörige Gruppe der Deckisometrien von E. Die Punktmenge

$$P = \{z \in E \mid \rho(z, 0) \leq \rho(z, T(0))\ \forall T \in \Gamma - \{id\}\} \tag{6}$$

ist ein Fundamentalbereich von Γ (Frickesches Normalpolygon) und deshalb gilt für jede auf $\mathcal{F}$ stetige Funktion φ:

$$\int_{\mathcal{F}} \varphi\, d\omega_{\mathcal{F}} = \int_P (\varphi\circ\gamma)\, d\omega. \tag{7}$$

Nach [3] I:1.1 und 2.6 gilt:

$$\mu_{\mathcal{F}} = \inf\{\rho(z, T(z)) \mid z \in E, T \in \Gamma - \{id\}\}$$

und daher $\forall z \in K(\tfrac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}})$, $T \in \Gamma - \{id\}$:

$$\begin{aligned}\mu_{\mathcal{F}} \leq \rho(z, T(z)) \leq \rho(z, T(0)) + \rho(T(0), T(z)) = \rho(z, T(0)) + \rho(0, z) \leq \\ \leq \rho(z, T(0)) + \tfrac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}}.\end{aligned}$$

Somit ist $\frac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}} \leq \rho(z, T(0))$ und daher erst recht $\rho(z, 0) \leq \rho(z, T(0))$, also nach (6):

$$K(\tfrac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}}) \subset P. \tag{8}$$

3. Jetzt sei $x > 0$ und es seien

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n, \qquad (n \geq 0),$$

die sämtlichen Eigenwerte von $-\Delta_{\mathcal{F}}$ in $[0, x]$, also

$$A_{\mathcal{F}}(x) = n + 1, \tag{9}$$

und $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ein zugehöriges Orthonormalsystem reeller Eigenfunktionen auf $\mathcal{F}$. Wir setzen

$$(\varphi_j\circ\gamma)(z) = \Phi_j(\rho, \vartheta) \tag{10}$$

und zeigen:

$$\int_0^{2\pi} \Phi_j(\rho, \vartheta)\, d\vartheta = 2\pi\varphi_j(q) F_{\lambda_j}(\operatorname{Cos}\rho), \qquad \rho > 0. \tag{11}$$

In der Tat: Da $\Delta_{\mathcal{F}}\varphi_j + \lambda_j\varphi_j = 0$, so folgt aus (10), (5) und (3):

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\Phi_j(\rho, \vartheta) + \operatorname{Ctg}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\Phi_j(\rho, \vartheta) + \frac{1}{\operatorname{Sin}^2\rho}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\Phi_j(\rho, \vartheta) + \lambda_j\Phi_j(\rho, \vartheta) = 0.$$

Daraus ergibt sich durch Integration nach ϑ:

$$\frac{d^2}{d\rho^2}\int_0^{2\pi}\Phi_j(\rho,\vartheta)\,d\vartheta+\operatorname{Ctg}\rho\,\frac{d}{d\rho}\int_0^{2\pi}\Phi_j(\rho,\vartheta)\,d\vartheta+\lambda_j\int_0^{2\pi}\Phi_j(\rho,\vartheta)\,d\vartheta=0. \tag{12}$$

Nun führen wir die neue Variable $t=\operatorname{Cos}\rho$ ein und setzen

$$\int_0^{2\pi}\Phi_j(\rho,\vartheta)\,d\vartheta=H_j(t).$$

Dann ist

$$H_j\in C^2(1,+\infty) \tag{13}$$

und wegen (10) und (4) gilt

$$\lim_{t\downarrow 1}H_j(t)=\lim_{\rho\downarrow 0}\int_0^{2\pi}\Phi_j(\rho,\vartheta)\,d\vartheta=2\pi\varphi_j(q). \tag{14}$$

Die Differentialgleichung (12) geht über in

$$(t^2-1)H_j''(t)+2tH_j'(t)+\lambda_jH_j(t)=0, \qquad t>1.$$

Daher folgt aus (13), (14) nach Lemma 1:

$$H_j(t)=2\pi\varphi_j(q)F_{\lambda_j}(t).$$

4. Aus (11) folgt nun für beliebige reelle Koeffizienten $c_0,\dots,c_n$:

$$2\pi\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(q)F_{\lambda_j}(\operatorname{Cos}\rho)=\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=0}^{n}c_j\Phi_j(\rho,\vartheta)\right)d\vartheta,$$

und daraus vermöge der Schwarzschen Ungleichung:

$$\left(\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(q)F_{\lambda_j}(\operatorname{Cos}\rho)\right)^2\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=0}^{n}c_j\Phi_j(\rho,\vartheta)\right)^2d\vartheta.$$

Multiplizieren wir diese Ungleichung mit $\operatorname{Sin}\rho$ und integrieren über π von 0 bis $r>0$, so ergibt sich wegen (10) und (2):

$$\int_0^{r}\left(\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(q)F_{\lambda_j}(\operatorname{Cos}\rho)\right)^2\operatorname{Sin}\rho\,d\rho\le\frac{1}{2\pi}\int_{K(r)}\left(\sum_{j=0}^{n}c_j(\varphi_j\circ\gamma)\right)^2d\omega \tag{15}$$

Nun definieren wir

$$m(x)=\min\left(\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}},\,a(x)\right) \tag{16}$$

und wählen in (15) $r>0$ gerade so, dass $\operatorname{Cos} r=m(x)$. Dann ist $r\le\frac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}}$ und daher nach (8) $K(r)\subset P$. Somit folgt aus (15) und (7):

$$\int_1^{m(x)}\Big(\sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j(q)F_{\lambda_j}(t)\Big)^2\,dt\leq\frac{1}{2\pi}\int_P\Big(\sum_{j=0}^{n} c_j(\varphi_j\circ\gamma)\Big)^2\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{F}}\Big(\sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j\Big)^2\,d\omega_{\mathcal{F}}=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n} c_j^2.$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass die φ_j ein Orthonormalsystem auf $\mathcal{F}$ bilden. Nun wählen wir speziell $c_j=\varphi_j(q)$ und erhalten:

$$\int_1^{m(x)}\Big(\sum_{j=0}^{n}\varphi_j^2(q)F_{\lambda_j}(t)\Big)^2\,dt\leq\frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n}\varphi_j^2(q). \tag{17}$$

Wegen $\lambda_j\leq x$ und $m(x)\leq a(x)$ gilt nach Lemma 4:

$$0\leq F_x(t)\leq F_{\lambda_j}(t)\quad\text{für}\quad 1\leq t\leq m(x),\qquad j=0,\dots,n.$$

Daraus folgt aber

$$\Big(\sum_{j=0}^{n}\varphi_j^2(q)\Big)^2\int_1^{m(x)}F_x^2(t)\,dt\leq\int_1^{m(x)}\Big(\sum_{j=0}^{n}\varphi_j^2(q)F_{\lambda_j}(t)\Big)^2\,dt.$$

Daraus und aus (17) ergibt sich:

$$\Big(\sum_{j=0}^{n}\varphi_j^2(q)\Big)\int_1^{m(x)}F_x^2(t)\,dt\leq\frac{1}{2\pi}. \tag{18}$$

Das gilt für alle $q\in\mathcal{F}$. Daraus folgt nun durch Integration über $\mathcal{F}$ wegen (9):

$$A_{\mathcal{F}}(x)\int_1^{m(x)}F_x^2(t)\,dt\leq\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{F}}d\omega_{\mathcal{F}}=2(g_{\mathcal{F}}-1). \tag{19}$$

5. Es sei jetzt die Voraussetzung von (A) erfüllt:

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}}\geq 1+\delta,\qquad x\geq\max(3,3/\delta). \tag{20}$$

Dann ist nach Lemma 2

$$a(x)\geq 1+j^2/2x. \tag{21}$$

Aus (20) folgt wegen $j^2/2=2{,}88\cdots<3$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}}\geq 1+3/x\geq 1+j^2/2x. \tag{22}$$

Aus (21), (22) und (16) folgt $m(x)\geq 1+j^2/2x$. Daher ist nach Lemma 2:

$$\int_1^{m(x)}F_x^2(t)\,dt\geq j^2J_1^2(j)/2x.$$

Daraus und aus (19) ergibt sich nun (A).

6. Nach (16) und 2.3 (11) ist $m(1/4) = \operatorname{Cos} \frac{1}{2}\mu_{\mathscr{F}}$. Somit folgt aus (19):

$$A_{\mathscr{F}}(1/4) \int_1^{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\mu_{\mathscr{F}}} F_{1/4}^2(t)\, dt \leq 2(g_{\mathscr{F}} - 1).$$

Daraus und aus Lemma 3 folgen unmittelbar die Ungleichungen (C_1) und (C_2).

4. Beweis von (B)

Es sei $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ die Folge aller Eigenwerte von $-\Delta_{\mathscr{F}}$, wobei jeder Eigenwert seiner Multiplizität entsprechend oft auftrete. Dann folgt aus der Selbergschen Spurformel (3.2) in [6] pag. 74 für $h(r) = e^{-sr^2}$, $s > 0$:

$$e^{s/4} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-s\lambda_n} > (g_{\mathscr{F}} - 1) \int_{-\infty}^{+\infty} r \operatorname{Tg} \pi r e^{-sr^2}\, dr = \pi(g_{\mathscr{F}} - 1) \frac{f(s)}{s}$$

$$f(s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-sr^2}}{\operatorname{Cos}^2 \pi r}\, dr. \tag{1}$$

Andererseits ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-s\lambda_n} = s \int_0^{\infty} A_{\mathscr{F}}(\lambda) e^{-s\lambda}\, d\lambda, \qquad s > 0.$$

Somit gilt:

$$\pi(g_{\mathscr{F}} - 1) \frac{f(s)}{s} e^{-s/4} < s \int_0^{\infty} A_{\mathscr{F}}(\lambda) e^{-s\lambda}\, d\lambda, \qquad s > 0. \tag{2}$$

Nun sei $\operatorname{Cos} \frac{1}{2}\mu_{\mathscr{F}} \geq 1 + \delta$, $\delta > 0$. Dann gilt nach (A):

$$A_{\mathscr{F}}(\lambda) \leq \kappa(g_{\mathscr{F}} - 1)\lambda \quad \text{für} \quad \lambda \geq x_\delta, \tag{3}$$

$$x_\delta = \max(3, 3/\delta), \qquad \kappa = 4/j^2 J_1^2(j). \tag{4}$$

Daher wird für $x \geq x_\delta$:

$$s \int_0^{\infty} A_{\mathscr{F}}(\lambda) e^{-s\lambda}\, d\lambda \leq A_{\mathscr{F}}(x) s \int_0^x e^{-s\lambda}\, d\lambda + \kappa(g_{\mathscr{F}} - 1) s \int_x^{\infty} \lambda e^{-s\lambda}\, d\lambda =$$

$$= A_{\mathscr{F}}(x)(1 - e^{-sx}) + \kappa(g_{\mathscr{F}} - 1)\left(x + \frac{1}{s}\right) e^{-sx}$$

und somit

$$s \int_0^{\infty} A_{\mathscr{F}}(\lambda) e^{-s\lambda}\, d\lambda \leq A_{\mathscr{F}}(x) + \kappa(g_{\mathscr{F}} - 1)\left(x + \frac{1}{s}\right) e^{-sx} \quad \text{für} \quad x \geq x_\delta. \tag{5}$$

Dagegen wird für $0 < x < x_\delta$ wegen (3):

$$s\int_0^\infty A_{\mathcal{F}}(\lambda)e^{-s\lambda}\,d\lambda \leq A_{\mathcal{F}}(x)+\kappa(g_{\mathcal{F}}-1)x_\delta s\int_x^{x_\delta} e^{-s\lambda}\,d\lambda+\kappa(g_{\mathcal{F}}-1)s\int_{x_\delta}^\infty \lambda e^{-s\lambda}\,d\lambda =$$

$$= A_{\mathcal{F}}(x)+\kappa(g_{\mathcal{F}}-1)\left(x_\delta e^{-sx}+\frac{1}{s}e^{-sx_\delta}\right)$$

und somit

$$s\int_0^\infty A_{\mathcal{F}}(\lambda)e^{-s\lambda}\,d\lambda \leq A_{\mathcal{F}}(x)+\kappa(g_{\mathcal{F}}-1)\left(x_\delta+\frac{1}{s}\right)e^{-sx} \quad \text{für} \quad 0<x<x_\delta. \tag{6}$$

Aus (5), (6) und (4) folgt jetzt für $x>0$, $s>0$:

$$s\int_0^\infty A_{\mathcal{F}}(\lambda)e^{-s\lambda}\,d\lambda \leq A_{\mathcal{F}}(x)+\kappa(g_{\mathcal{F}}-1)x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{sx}\right)e^{-sx}$$

mit

$$y=\min(1, x/x_\delta)=\min(1, x/3, \delta x/3). \tag{7}$$

Daraus und aus (2) ergibt sich:

$$A_{\mathcal{F}}(x) \geq (g_{\mathcal{F}}-1)\left[\pi\frac{f(s)}{s}e^{-s/4}-\kappa x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{sx}\right)e^{-sx}\right].$$

Daraus folgt für $s=t/x$, $t>0$:

$$Q_{\mathcal{F}}(x) \geq \frac{\pi}{t}f\left(\frac{t}{x}\right)e^{-t/4x}-\kappa\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{t}\right)e^{-t}.$$

Da dies für alle $t>0$ gilt, so ist damit wegen (1) und (7) auch (B) bewiesen.

5. Flächen mit beliebig grossem $\mu_{\mathcal{F}}$

1. Wir versehen die obere Halbebene

$$H=\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z>0\}$$

mit der Differentialgeometrie

$$ds=\frac{|dz|}{\operatorname{Im} z}, \tag{1}$$

welche die konstante Krümmung -1 besitzt, und betrachten eine diskrete Untergruppe $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{R})$. Jedes Element

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

erzeugt dann eine Isometrie γ^* von H,

$$\gamma^*(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

und die Gruppe Γ^* wirkt diskontinuierlich auf H. Der Kern des Homomorphismus $\Gamma \to \Gamma^*$ besteht aus den Elementen

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad -\varepsilon,$$

falls letzteres überhaupt in Γ vorkommt. Wir setzen nun voraus, dass Γ^* einen kompakten Fundamentalbereich in H besitzt und dass

$$|Sp\gamma| > 2 \ \forall \gamma \in \Gamma, \ \gamma \neq \pm\varepsilon. \tag{2}$$

Dann wirkt Γ^* bekanntlich fixpunktfrei auf H und der Quotient $\mathcal{F} = H/\Gamma^*$ ist eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g > 1$. Die mit der kanonischen Abbildung auf $\mathcal{F} = H/\Gamma^*$ verpflanzte Differentialgeometrie (1) ergibt dann gerade die in der Einleitung charakterisierte Metrik von $\mathcal{F}$ und es gilt:

$$\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}} = \inf \{\tfrac{1}{2} |Sp\gamma| \mid \gamma \in \Gamma, \ \gamma \neq \pm\varepsilon\}. \tag{3}$$

In der Tat: Nach [3] I:1.1 und 2.6 gilt:

$$\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}} = \inf \{\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} d(z, \gamma^*(z)) \mid z \in H, \gamma \in \Gamma, \gamma \neq \pm\varepsilon\}. \tag{4}$$

Dabei bedeutet d die zur Metrik (1) gehörige Distanz. Wegen (2) gibt es zu jedem $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq \pm\varepsilon$, ein $\nu \in SL(2, \mathbb{R})$ derart, dass

$$\nu^{-1}\gamma\nu = \pm\rho, \qquad \rho = \begin{pmatrix} a^{1/2} & 0 \\ 0 & a^{-1/2} \end{pmatrix}, \qquad a > 1.$$

Dann ist

$$|Sp\gamma| = a^{1/2} + a^{-1/2} \tag{5}$$

$$\gamma^*\nu^* = \nu^*\rho^*, \qquad \rho^*(z) = az,$$

und somit

$$d(\nu^*(z), \gamma^*\nu^*(z)) = d(\nu^*(z), \nu^*\rho^*(z)) = d(z, \rho^*(z)) = d(z, az).$$

Daraus folgt nach [3] I:2.6

$$\inf_{z\in H} d(\nu^*(z), \gamma^*\nu^*(z)) = \log a.$$

Daraus ergibt sich aber wegen (5)

$$\inf_{z\in H} \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} d(z, \gamma^*(z)) = \inf_{z\in H} \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} d(\nu^*(z), \gamma^*\nu^*(z)) =$$
$$= \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} \log a = \tfrac{1}{2} |Sp\gamma|.$$

Hieraus und aus (4) folgt nun die Behauptung (3).

2. Es sei jetzt $p \equiv 3$ (4) eine Primzahl und I_p der Ring der ganzen Zahlen von $Q(\sqrt{p})$. Wir betrachten dann folgende Untergruppen von $SL(2, \mathbb{R})$:

$$\Phi_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \middle| a, b \in I_p, a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\} \tag{6}$$

($\bar{a}$ bedeutet die zu a konjugierte Zahl),

$$\Gamma_p = \{\gamma \in \Phi_p \mid \gamma \equiv \varepsilon \bmod 2\}. \tag{7}$$

Nach Fricke [1] pag. 501–565 besitzt Φ_p^* einen kompakten Fundamentalbereich in H, und da Γ_p von endlichem Index in Φ_p ist (er ist übrigens 4), so gilt dasselbe auch von Γ_p^*.

3. Wir setzen nun voraus:

(V) Es sei $n \geqslant 2$ und die Gleichung

$$u + u^2 + r^2 = p(v^2 + s^2)$$

für $u = 1, \ldots, n-1$ nicht lösbar in ganzen Zahlen $v, r, s \in \mathbb{Z}$. Wir zeigen: Dann ist

$$\tfrac{1}{2}|Sp\gamma| \geqslant 2n+1$$

und für die Fläche $\mathscr{F} = H/\Gamma_p^*$ gilt daher nach (3):

$$\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\mu_{\mathscr{F}} \geqslant 2n+1. \ \forall \gamma \in \Gamma_p,\ \gamma \neq \pm\varepsilon,$$

4. Beweis: Nach (6), (7) hat γ die Gestalt

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1+2(u+v\sqrt{p}) & 2(r+s\sqrt{p}) \\ 2(-r+s\sqrt{p}) & 1+2(u-v\sqrt{p}) \end{pmatrix} \tag{8}$$

mit $u, v, r, s \in \mathbb{Z}$ und

$$u + u^2 + r^2 = p(v^2 + s^2). \tag{9}$$

Darin ist $u \neq 0, -1$. Sonst wäre $r^2 = p(v^2 + s^2)$, also $r = pk$ und somit $pk^2 = v^2 + s^2$.

Da aber $p \equiv 3$ (4) eine Primzahl ist, so ist dies bekanntlich nur möglich, wenn $k = v = s = 0$. Dann wäre aber $\gamma = \pm\varepsilon$, entgegen unserer Annahme. Es ist also entweder $u \geqslant 1$ oder $u \leqslant -2$. Im ersten Falle folgt aus (9) und Voraussetzung (V) sogar $u \geqslant n$, also $u + u^2 \geqslant n + n^2$. Im zweiten Falle ist $u' = -(u+1) \geqslant 1$ und daher folgt wegen $u' + (u')^2 = u + u^2$ aus (9) und (V) sogar $u' \geqslant n$, also $u + u^2 = u' + (u')^2 \geqslant n + n^2$ auch im zweiten Falle. Nun ist aber nach (8)

$$\tfrac{1}{4}(Sp\,\gamma)^2 = 1 + 4(u + u^2) \geqslant 1 + 4(n + n^2) = (2n+1)^2.$$

5. Nach 3. gibt es also sicher dann Flächen mit beliebig grossem $\mu_{\mathscr{F}}$, wenn es zu jedem $n \geqslant 2$ eine solche Primzahl $p \equiv 3$ (4) gibt, dass die Voraussetzung (V) erfüllt ist. Nun ist (V) gewiss erfüllt, wenn alle Zahlen

$$-(u + u^2), \qquad u = 1, \ldots, n-1$$

quadratische Nichtreste mod p sind. Wegen $p \equiv 3$ (4) ist aber -1 Nichtrest mod p. Also ist (V) sicher dann erfüllt, wenn alle Zahlen

$$u + u^2, \qquad u = 1, \ldots, n-1,$$

quadratische Reste mod p sind. Dazu genügt es, dass alle in diesen Zahlen aufgehenden Primfaktoren

$$2, q_1, \ldots, q_r$$

quadratische Reste mod p sind. Wir betrachten nun die $r+1$ simultanen Kongruenzen

$$p \equiv -1\ (8) \tag{10}$$

$$p \equiv 1(q_j), \quad \text{wenn} \quad q_j \equiv 1\ (4), \tag{11}$$

$$p \equiv -1(q_j), \quad \text{wenn} \quad q_j \equiv 3\ (4), \tag{12}$$

wobei die Unbekannte p vorerst nicht notwendig eine Primzahl bedeuten soll. Da die Moduln dieser Kongruenzen paarweise teilerfremd sind, bilden ihre gemeinsamen Lösungen eine volle Restklasse mod $2q_1 \cdots q_r$ und zwar offensichtlich eine zu diesem Modul teilerfremde. Dann gibt es nach Dirichlet auch eine Primzahl p, welche alle $r+1$ Kongruenzen erfüllt. Für dieses p gilt nun wegen (10):

$$\left(\frac{2}{p}\right) = 1.$$

Wenn $q_i \equiv 1$ (4), so folgt aus (11) und dem quadratischen Reziprozitätsgesetz:

$$1 = (-1)^{(q_j - 1/2)(p-1/2)} = \left(\frac{q_j}{p}\right)\left(\frac{p}{q_j}\right) = \left(\frac{q_j}{p}\right)\left(\frac{1}{q_j}\right) = \left(\frac{q_j}{p}\right).$$

Wenn dagegen $q_j \equiv 3$ (4), so folgt aus (12)

$$-1 = (-1)^{(q_j - 1/2)(p-1/2)} = \left(\frac{q_j}{p}\right)\left(\frac{p}{q_j}\right) = \left(\frac{q_j}{p}\right)\left(\frac{-1}{q_j}\right) = -\left(\frac{q_j}{p}\right).$$

Somit sind in der Tat alle Primzahlen $2, q_1, \ldots, q_r$ Reste mod p und daher gibt es eine Fläche $\mathcal{F}$ mit $\operatorname{Cos} \frac{1}{2}\mu_{\mathcal{F}} \geqslant 2n+1$.

LITERATUR

[1] Fricke, R. und Klein, F., *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen I*, (Teubner, Leipzig 1897).

[2] Hobson, E. W., *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, (Cambridge University Press 1931).

[3] Huber, H., *Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen*, I: Math. Annalen *138* (1959), 1–26, II: Math. Annalen *142* (1961), 385–398, III: Math. Annalen *143* (1961), 463–464.

[4] McKean, H. P., *Selberg's trace formula as applied to a compact Riemann surface*, Comm. Pure Appl. Math. XXV (1972), 225–246.

[5] Randol, B., *Small eigenvalues of the Laplace operator on compact Riemann surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. *80* (1974), 996–1000.

[6] Selberg, A., *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. *20* (1956), 47–87.

Eingegangen den 30. Oktober 1975