Konvergenzsätze für Jacobi-Determinanten von n-dimensionalen quasikonformen Abbildungen

Autor(en): **Leschinger, Karl**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **51 (1976)**

PDF erstellt am: **01.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-39440

Comment. Math. Helvetici 51 (1976) 233–239 Birkhäuser Verlag, Basel

Konvergenzsätze für Jacobi-Determinanten von n-dimensionalen quasikonformen Abbildungen

KARL LESCHINGER

1. Sei $G \subseteq R^n$ ein Gebiet, $n \geq 2$. Wir betrachten Folgen (f_j) von K-quasikonformen Abbildungen $f_j: G \to R^n$, die in G lokal Gleichmäßig (d.h. gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von G) gegen eine endliche Abbildung f konvergieren. f ist dann bekanntlich entweder konstant oder K-quasikonform in G.

Natürlicherweise stellt sich die Frage, wie sich die Folge (Jf_j) der Jacobi-Determinanten verhält, ob sie in irgendeinem Sinne konvergiert, und wie im Falle der Konvergenz die Grenzfunktion beschaffen ist. Wir beweisen die folgenden drei Sätze:

SATZ 1. *Die Folge (Jf_j) konvergiert in G schwach gegen Jf, d.h. für jeden achsenparallelen Würfel Q, $\bar{Q} \subset G$, gilt*

$$\lim_{j\to\infty} \int_Q (Jf_j(x) - Jf(x))\, dx = 0. \tag{1}$$

Insbesondere ist wegen der Lokalsummierbarkeit von Jf die Folge der Integrale der Jf_j nach oben beschränkt. Falls f nicht konstant ist, besitzt sie auch eine positive untere Schranke. Diese Aussagen lassen sich folgendermaßen umkehren:

SATZ 2. *Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von K-quasikonformen Abbildungen $f: G \to \mathbb{R}^n$, $\|f(x_0)\| \leq C$ für ein $x_0 \in G$ und alle $f \in \mathcal{F}$. Es existiere eine Kugel $B = B(x_0, r)$ in G mit Mittelpunkt x_0 und Radius $r > 0$, so daß für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt*

$$\int_B Jf(x)\, dx \leq M < \infty. \tag{2}$$

Dann enthält jede Folge aus $\mathcal{F}$ eine in G lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Ist außerdem noch für alle $f \in \mathcal{F}$

$$0 < m \leq \int_B Jf(x)\, dx, \tag{3}$$

so sind alle Grenzabbildungen konvergenter Folgen aus $\mathcal{F}$ in G K-quasikonform.

KOROLLAR. *Sei* (f_j) *eine Folge von* K*-quasikonformen Abbildungen* $f_j : G \to R^n$, *so daß die Folge* (Jf_j) *in* G *schwach gegen eine fast überall positive lokalsummierbare Funktion* J *konvergiert. Dann existiert eine* K*-quasikonforme Abbildung* $f : G \to R^n$, *deren Jacobi-Determinante fast überall in* G *gleich* J *ist.*

Beweis. Es sei Q ein achsenparalleler Würfel, $\bar{Q} \subset G$. Dann gibt es Zahlen m, M mit

$$0 < m \leq \int_Q Jf_j(x)\, dx \leq M < \infty \tag{4}$$

für alle j. Wir können $f_j(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in Q$ und alle j annehmen. Aus Satz 2 ergibt sich die Existenz einer Teilfolge von (f_j), die in G lokal gleichmäßig gegen eine K-quasikonforme Abbildung f konvergiert. Wegen Satz 1 gilt $Jf = J$ fast überall in G.

SATZ 3. (i) *In* G *ist fast überall*

$$\liminf_{j \to \infty} Jf_j(x) \leq Jf(x) \leq \limsup_{j \to \infty} Jf_j(x). \tag{5}$$

(ii) *Gilt für alle* x *aus einer meßbaren Menge* $A \subseteq G$ *an einer Stelle der Doppelungleichung* (5) *Gleichheit, so existiert eine Teilfolge von* (Jf_j), *die fast überall in* A *gegen* Jf *konvergiert.*

Für den Fall $n = 2$ wurden diese Ergebnisse in [3] hergeleitet. Die Beweise der Sätze 1 und 2 sind n-dimensionale Versionen der dort angegebenen Beweise. Für Satz 3 gilt dies jedoch nur teilweise. In [3] wird als wesentliches Hiltsmittel die Hilberttransformation benutzt, die für $n \geq 3$ nicht zur Verfügung steht. Eine von Gehring [2] bewiesene Ungleichung führt jedoch zu einer Abschätzung, die einen für alle $n \geq 2$ gültigen Beweis von Satz 3 ermöglicht.

In [3] werden (für $n = 2$) Beispiele angegeben, die zeigen, daß Satz 3 gewissermaßen bestmöglich ist: Es gibt Folgen (f_j), für die (Jf_j) keine Teilfolge enthält, die fast überall konvergiert. Damit ist auch die Frage nach der L^p-Konvergenz der Jacobi-Determinanten negativ beantwortet.

Nach Fertigstellung des Manuskriptes erhielt ich die Nachricht, daß Satz 3 nahezu gleichzeitig von N. Bühlmann in Zürich ebenfalls mit Hilfe der Ungleichung von Gehring bewiesen wurde.

2. Der Beweis von Satz 1 ergibt sich unmittelbar aus dem folgenden Lemma:

LEMMA 1. *Sei* $G \subseteq R^n$ *ein Gebiet,* G_0 *ein Teilgebiet von* G, *dessen Rand* E *eine in* G *kompakte Lebesgue'sche Nullmenge ist. Ferner sei* (f_j) *eine in* G *lokal* *gleichmäßig konvergente Folge von Homöomorphismen $f_j: G \to R^n$, die ebenso wie die Grenzabbildung f in G die (N)-Bedingung erfüllen, d.h. Nullmengen auf Nullmengen abbilden. Dann gilt*

$$\lim_{j\to\infty} |f_j(G_0)| = |f(G_0)|.^{(1)} \tag{6}$$

Beweis. Die Mengen $E' = f(E)$, $E_j = f_j(E)$ sind kompakt und haben das Maß 0. Wir wählen ein $\delta > 0$ und j so groß, daß E_j ganz in

$$U_\delta(E') = \{x \in R^n \mid \operatorname{dist}(x, E') < \delta\}$$

liegt. Dann gilt

$$\| f_j(G_0)| - |f(G_0)\| \le |U_\delta(E')|.$$

Ist nun $\varepsilon > 0$, so kann δ so gewählt werden, daß $|U_\delta(E')| < \varepsilon$ ist. Es gibt nämlich eine offene Menge $\theta \subset R^n$, $E' \subset \theta$, mit $|\theta| < \varepsilon$. Der Rand von θ hat von der kompakten Menge E' einen positiven Abstand d. Wählt man $\delta = d/2$, so ist $U_\delta(E') \subset \theta$.

3. *Beweis von Satz* 2. Es sei (f_j) eine Folge von Abbildungen aus $\mathscr{F}$. Wir zeigen, daß $f_j(x)$ in $G - \{x_0\}$ nicht überall gegen ∞ konvergieren kann.

Würde nämlich $f_j(x)$ dort gegen ∞ konvergieren, so müßte diese Konvergenz lokal gleichmäßig sein (vgl. [5], Theorem 19.4 in Verbindung mit Theorem 20.3.) und deshalb für ein r_0, $0 < r_0 < r$, die Folge der Zahlen

$$r_j = \min_{\|x - x_0\| = r_0} \|f_j(x) - f_j(x_0)\|$$

gegen ∞ konvergieren.

Setz man $A = \{x \in R^n \mid r_0 < \|x - x_0\| < r\}$ und $A_j = f_j(A)$, so hat jede Hyperfläche S in A_j, die die beiden Randkomponenten von A_j trennt, ein $(n-1)$-dimensionales Hausdorff-Maß $H^{n-1}(S) \ge H^{n-1}(S^{n-1}(f_j(x_0), r_j) = s_j$, wo $S^{n-1}(f_j(x_0), r_j)$ die $(n-1)$-Sphäre mit Mittelpunkt $f_j(x_0)$ und Radius r_j ist.

Nach Caraman [1], S. 170, gilt für die Kapazität des Ringgebietes A_j

$$\operatorname{Cap} A_j \ge \frac{s_j}{|A_j|^{n-1}},$$

woraus wegen $\lim_{j\to\infty} s_j = \infty$ und $|A_j| \le M$ folgt

$$\lim_{j\to\infty} \operatorname{Cap} A_j = \infty.$$

---

(1) Für eine meßbare Menge $A \subseteq R^n$ bezeichne $|A|$ ihr n-dimensionales Lebesgue'sches Maß.

Dies steht aber im Widerspruch zur K-Quasikonformität der f_j, denn es ist (vgl. [1], S. 125)

$$\operatorname{Cap} A_j \leq K^{n-1} \cdot \operatorname{Cap} A < \infty.$$

Es gibt daher einen Punkt $x_1 \in G$, $x_1 \neq x_0$, mit $\|f_j(x_1)\| \leq C_1$ für alle j. Da alle f_j den Punkt ∞ auslassen, ergibt sich die Existenz einer lokal gleichmäßig konvergenten Teilfolge (vgl. [5], Theorem 19.4. in Verbindung mit Theorem 20.3.). Wegen (3) kann die Grenzabbildung nicht konstant sein, daher ist sie K-quasikonform.

4. Der Beweis von Satz 3 beruht auf dem folgenden Lemma (vgl. [3]):

LEMMA 2. *Es sei* (φ_j) *eine Folge von in* G *lokalsummierbaren Funktionen* $\varphi_j : G \to \bar{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$. *Die Integrale der* φ_j *seien in* G *gleichgradig absolut stetig, d.h. zu jedem* $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $\delta > 0$, *so daß für jede relativ kompakte meßbare Menge* $A \subseteq G$ *mit* $|A| < \delta$ *und alle* j *gilt*: $|\int_A \varphi_j(x)\,dx| < \varepsilon$.

(i) *Gilt für eine lokalsummierbare Funktion* $\varphi : G \to \bar{R}$ *und jeden achsenparallelen Würfel* Q, $\bar{Q} \subset G$,

$$\liminf_{j \to \infty} \int_Q (\varphi_j(x) - \varphi(x))\,dx \leq 0$$

beziehungsweise

$$\limsup_{j \to \infty} \int_Q (\varphi_j(x) - \varphi(x))\,dx \geq 0,$$

so ist fast überall in G

$$\liminf_{j \to \infty} \varphi_j(x) \leq \varphi(x) \tag{7}$$

beziehungsweise

$$\limsup_{j \to \infty} \varphi_j(x) \geq \varphi(x). \tag{8}$$

(ii) *Gilt für alle* x *aus einer meßbaren Menge* $A \subseteq G$ *in* (7) *oder* (8) *Gleichheit, so existiert eine Teilfolge von* (φ_j), *die fast überall in* A *gegen* φ *konvergiert.*

Bemerkung. Man beachte, daß in Lemma 2 nicht die Lokalsummierbarkeit von $\inf \varphi_j(x)$ bzw. $\sup \varphi_j(x)$ vorausgesetzt wird. Mit dieser Voraussetzung an Stelle der schwächeren Forderung, daß die Integrale der φ_j gleichgradig absolut stetig sind, wäre das Lemma ein triviales Korollar zum Lemma von Fatou. Mir scheint, daß Lemma 2 sich unter den angegebenen Voraussetzungen nicht unmittelbar aus dem monotonen Konvergenzsatz oder dem Lemma von Fatou herleiten läßt. Beim Beweis von Satz 3 ließe sich der linke Teil der Ungleichung (5) leicht mit dem Fatou'schen Lemma beweisen. Für den rechten Teil von (5) ist dieses Verfahren jedoch nicht brauchbar, da man nicht die Lokalsummierbarkeit von sup $Jf_j(x)$ garantieren kann. Dort muß Lemma 2 in der angegebenen Form benutzt werden.

Beweis von Lemma 2. Wir beweisen die Behauptungen über den lim inf. Die Aussagen über den lim sup ergeben sich daraus durch Übergang zur Folge $(-\varphi_j)$.

(i) Zunächst zeigt man leicht unter Verwendung der gleichgradigen Absolutstetigkeit der Integrale, daß für jede relativ kompakte meßbare Menge $A \subseteq G$ gilt

$$\liminf_{j\to\infty} \int_A (\varphi_j(x) - \varphi(x))\, dx \leq 0. \tag{9}$$

Setzt man nun $\psi_j(x) = \inf_{h \geq j} \varphi_h(x)$, so folgt $\psi_j \leq \varphi_j$, und die Folge (ψ_j) ist monoton wachsend.

Wir zeigen nun, daß für $\psi(x) = \lim_{j\to\infty} \psi_j(x) = \liminf_{j\to\infty} \varphi_j(x)$ fast überall in G gilt: $\psi(x) < +\infty$.

Mit den φ_j besitzen auch die $|\varphi_j|$ in G gleichgradig absolut stetige Integrale. Zu $\varepsilon > 0$ kann man also ein $\delta > 0$ finden, so daß für alle relativ kompakten meßbaren Mengen $A \subseteq G$ mit $|A| < \delta$ und alle j gilt $\int_A |\varphi_j(x)|\, dx < \varepsilon$.

Wäre in G nicht fast überall $\psi(x) < +\infty$, so könnte man eine relativ kompakte meßbare Menge A mit $0 < |A| < \delta$ finden, auf der $\lim_{j\to\infty} \varphi_j(x) = \lim_{j\to\infty} |\varphi_j(x)| = +\infty$ gilt. Aus dem Lemma von Fatou ergibt sich $\lim_{j\to\infty} \int_A |\varphi_j(x)|\, dx = +\infty$, also ein Widerspruch.

Nehmen wir nun an, daß in einer relativ kompakten Menge von positivem Maß $\psi(x) > \varphi(x)$ gilt. Dann ist dort die Funktion ψ fast überall endlich. Aus dem Satz von Egorow (vgl. [4]) erhalten wir die Existenz einer Teilmenge B von positivem Maß, auf der (ψ_j) gleichmäßig gegen ψ konvergiert und für fast alle j gilt: $\psi_j \geq \varphi$. Die ψ_j sind also in B summierbar, und wegen $\psi_j \leq \varphi_j$ und (9) ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_B \psi(x)\, dx = \lim_{j\to\infty} \int_B \psi_j(x)\, dx &\leq \liminf_{j\to\infty} \int_B \varphi_j(x)\, dx \\ &\leq \int_B \varphi(x)\, dx,\end{aligned}$$

im Widerspruch zur Annahme $\psi(x) > \varphi(x)$. Damit ist (i) bewiesen.

(ii) In einer meßbaren Menge $A \subseteq G$ gelte $\varphi(x) = \liminf_{j \to \infty} \varphi_j(x)$. Wir nehmen zunächst A als relativ kompakt an und geben eine Nullfolge (ε_n), $\varepsilon_n > 0$, vor. Nach dem Satz von Egorow existiert eine Teilmenge A_1 von A mit $|A - A_1| < \varepsilon_1$, auf der (ψ_j) gleichmäßig gegen φ konvergiert. Wegen $\psi_j \leq \varphi_j$ ergibt sich daraus die Existenz einer Teilfolge von (φ_j), die in A_1 L^1-konvergent gegen φ ist, also eine Teilfolge $(\varphi_j^{(1)})$ enthält, die fast überall in A_1 gegen φ konvergiert.

Für diese Teilfolge gilt fast überall in A:

$$\liminf_{j \to \infty} \varphi_j^{(1)}(x) = \varphi(x),$$

woraus sich wie oben die Existenz einer Teilfolge $(\varphi_j^{(2)})$ von $(\varphi_j^{(1)})$ ergibt, die fast überall in einer Teilmenge $A_2 \subseteq A$ mit $|A - A_2| < \varepsilon_2$ gegen φ konvergiert.

Setzt man dieses Verfahren ad infinitum fort und bildet die Diagonalfolge $(\varphi_j^{(j)})$, so konvergiert diese fast überall in A gegen φ.

Ist $A \subseteq G$ eine beliebige meßbare Menge, so schöpft man diese durch abzählbar viele relativ kompakte meßbare Mengen aus und verwendet wieder das beschriebene Diagonalverfahren.

Beweis von Satz 3. Ist f konstant, so folgt aus dem Lemma von Fatou und Satz 1, daß für jeden achsenparallelen Würfel Q, $\bar{Q} \subset G$, gilt

$$\int_Q \liminf_{j \to \infty} Jf_j(x)\, dx \leq \lim_{j \to \infty} \int_Q Jf_j(x)\, dx = 0,$$

also $\liminf_{j \to \infty} Jf_j(x) = 0$ fast überall in G. In diesem Fall existiert stets eine fast überall konvergente Teilfolge von (Jf_j), da diese Folge in $L^1(Q)$ konvergiert. Ist f K-quasikonform, so kann man zu jedem $x_0 \in G$ einen achsenparallelen Würfel Q, $\bar{Q} \subset G$, mit Mittelpunkt x_0 finden, so daß für alle j gilt

$$\operatorname{dia}(f_j(Q)) < \operatorname{dist}(f_j(Q), \partial f_j(G)).$$

Nach Gehring [2] existiert ein $c > 0$, so daß für alle p, $n \leq p < n + c$, und alle j gilt:

$$\int_Q (Jf_j(x))^{p/n}\, dx \leq M_1 \left(\int_Q Jf_j(x)\, dx \right)^{p/n}$$

mit

$$M_1 = \frac{c}{n + c - p} \cdot K^{p/n} \cdot |Q|^{1 - p/n}.$$

Da die Folge der Integrale der Jf_j über Q beschränkt ist, existiert ein M_2, so daß für alle j gilt

$$\int_Q (Jf_j(x))^{p/n}\,dx \leq M_2. \tag{10}$$

Nach einem Kriterium von de la Valleé-Poussin (vgl. [4], S. 176) besitzen die Jf_j daher in Q gleichgradig absolut stetige Integrale (dabei ist wesentlich, daß (10) mit einem $p > n$ gilt). Wegen Lemma 2 folgt also die Behauptung von Satz 3 in Q. Schöpft man nun G durch abzählbar viele Q aus, so ist der Beweis vollständig.

LITERATUR

[1] Caraman, P., *Homeomorfisme cvasiconforme n-dimensionale*, Bukarest,1968.

[2] Gehring, F. W., *The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping*, Acta Math. 130 (1973), 265–277.

[3] Leschinger, K., *Untersuchungen über Jacobi-Determinanten von zweidimensionalen quasikonformen Abbildungen*, Bonner Math. Schr. 72 (1974).

[4] Natanson, I. P., *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen*, 2. Aufl., Berlin, 1961.

[5] Väisälä, J., *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings*, Springer Lecture Notes in Mathematics 229, 1971.

Eingegangen den 7. August/3. November 1975