

Théorie de Galois pour une W^* -Algèbre

Autor(en): **Aubert, P.-L.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **51 (1976)**

PDF erstellt am: **01.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-39452>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Théorie de Galois pour une W^* -Algèbre

P.-L. AUBERT

Introduction

Soient M une W^* -algèbre et G un groupe d'automorphismes de M . Peut-on décrire la sous-algèbre M^G des points fixes de M par G ? Existe-t-il entre les sous-groupes de G et les sous-algèbres de M contenant M^G une correspondance galoisienne? M. Nakamura et Z. Takeda [1] ont obtenu une réponse affirmative lorsque M est un facteur de type II_1 et G un groupe fini d'automorphismes extérieurs. Nous avons cherché à étendre leurs résultats en assouplissant les conditions sur M et sur G .

Le produit croisé $W^*(M, G)$ joue ici un rôle important. Au chapitre I, nous en donnons une construction nouvelle, sans passer par une représentation de M comme algèbre de von Neumann dans un espace de Hilbert; à l'aide de la norme réduite sur $L^1(G, M)$, nous définissons directement le préduel de $W^*(M, G)$. L'étude des représentations de $W^*(M, G)$ permet alors de retrouver la définition classique.

Le résultat de Nakamura et Takeda repose sur le fait que le commutant de M^G peut s'identifier à un produit croisé. Pour généraliser ce résultat nous devons pouvoir prolonger aux W^* -algèbres un isomorphisme défini entre des sous-algèbres involutives σ -denses. Percy et Ringrose [1] ont obtenu, pour des W^* -algèbres finies, un résultat permettant de prolonger les isomorphismes qui conservent les applications \wr . Enomoto et Tamaki [1] ont généralisé ce résultat, mais ils gardent une condition de finitude. Au chapitre II, nous obtenons un résultat plus fort: on peut prolonger les isomorphismes qui conservent des projections positives normales fidèles. On peut alors utiliser ce théorème pour la correspondance galoisienne: il nous permet d'obtenir, sous certaines hypothèses, l'injectivité de l'application "sous-groupe \mapsto sous-algèbre".

En algèbre, S. U. Chase, D. K. Harrison et A. Rosenberg [1] ont obtenu une théorie de Galois pour les anneaux commutatifs. En essayant d'appliquer les méthodes algébriques à l'étude d'un groupe fini G d'automorphismes d'une W^* -algèbre M , nous avons vu que la notion importante était celle d'action presque libre de G sur M . Au chapitre III, sous cette seule hypothèse, nous démontrons le

“théorème fondamental de la théorie de Galois” qui établit une correspondance biunivoque entre les sous-groupes de G et certaines sous-algèbres, dites G -libres, de M . On peut considérer ce résultat comme complémentaire de celui de Nakamura et Takeda: leurs automorphismes sont extérieurs sur un facteur alors que les nôtres ont une action importante sur le centre de M .

Ce travail est extrait de la thèse que j’ai soutenue à l’Université de Neuchâtel.† Je tiens à remercier ici M. R. Bader qui m’a aidé et encouragé pendant son élaboration.

I. Une Construction Intrinsèque du W^* -Produit Croisé

I.1. *Produit croisé réduit* (cf. Zeller-Meier [1] §4)

Soient A une C^* -algèbre à élément unité, G un groupe discret et $\sigma: G \rightarrow \text{Aut}(A)$ un homomorphisme. Le produit croisé réduit $B = C_r^*(G, A)$ est le complété de l’algèbre normée involutive $L^1(G, A)$ des fonctions sommables f de G dans A , la structure algébrique étant donnée par

$$(fg)(s) = \sum_{t \in G} f(t) \sigma_t[g(t^{-1}s)]$$

$$f^*(s) = \sigma_s[f(s^{-1})^*]$$

et la norme $\|f\|$ étant la norme réduite. Il n’est pas difficile de voir que la norme réduite est la plus petite C^* -norme sur $L^1(G, A)$ qui rende continues les formes linéaires $\tilde{\varphi}: f \in L^1(G, A) \mapsto \varphi(f(e)) \in \mathbb{C}$ où φ parcourt A^* . B est une C^* -algèbre contenant A comme sous- C^* -algèbre et $K(G, A)$ (= l’ensemble des fonctions de G dans A à support fini) comme sous-algèbre involutive dense. B peut être considérée comme une algèbre de fonctions de G dans A , le produit et l’involutive étant définis comme dans $L^1(G, A)$; les applications $f \in B \mapsto f(s) \in A$ sont linéaires et diminuent les normes; de plus l’application

$$\phi: f \in B \mapsto f(e) \in A$$

est positive fidèle. Enfin pour $\varphi \in A^{**}$ et $f \in B$ on a $\tilde{\varphi}(f) = \varphi(f(e))$.

Pour tout $s \in G$ nous noterons u_s l’élément de $K(G, A)$ défini par $u_s(t) = 0$ si $s \neq t$ et $u_s(s) = 1$; on a $u_s a u_s^* = \sigma_s(a)$ pour tout $a \in A$. A toute représentation π de A dans un espace de Hilbert \mathcal{H} on associe une représentation $\tilde{\pi} = \text{Ind } \pi$ de B

† photocopié de l’Institut de mathématiques, Neuchâtel.

dans $\tilde{\mathcal{H}} = L^2(G, \mathcal{H})$ définie, pour $f \in B$, $\tilde{\xi} \in \tilde{\mathcal{H}}$ et $t \in G$, par

$$[\tilde{\pi}(f)\tilde{\xi}](t) = \sum_{s \in G} \pi[\sigma_{t^{-1}}(f(s))]\tilde{\xi}(s^{-1}t).$$

Pour $\xi \in \mathcal{H}$ et $s \in G$ nous noterons $\tilde{\xi}_s$ l'élément de $\tilde{\mathcal{H}}$ défini par $\tilde{\xi}_s(t) = 0$ si $t \neq s$, $\tilde{\xi}_s(s) = \xi$. Si $\xi \in \mathcal{H}$ est totalisateur pour π alors $\tilde{\xi}_e$ est totalisateur pour $\tilde{\pi}$; si π et ξ définissent la forme positive φ sur A alors $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\xi}_e$ définissent $\tilde{\varphi}$. Nous dirons que G opère *quasi librement* sur A si pour tout $s \in G$, $s \neq e$, on a l'implication suivante:

$$a \in A, ab = \sigma_s(b)a \text{ pour tout } b \in A \Rightarrow a = 0.$$

Si A est un facteur cela revient à dire que tout σ_s , $s \neq e$, est un automorphisme extérieur et si A est abélienne on retrouve la notion de "free action" de von Neumann (tout projecteur $\neq 0$ de A majore un projecteur $\neq 0$ de A qui est orthogonal à son image par σ_s). Notons que si G opère *presque librement* sur A (i.e. opère quasi librement sur $Z(A)$, voir Zeller-Meier [1], définition 1.13) alors G opère quasi librement sur A . L'intérêt de la notion d'action quasi libre est qu'elle englobe le cas des automorphismes extérieurs d'un facteur. Pour tout cela voir Kallman [1].

I.2. W^* -produit croisé.

Conservons les notations du paragraphe 1 mais supposons maintenant que A est une W^* -algèbre; nous noterons A_* [resp. A_*^+] son préduel [resp. la partie positive de son préduel].

Soit E la fermeture en norme dans B^* du sous-espace engendré par les formes linéaires

$$\omega_{g,\varphi} : f \in B \mapsto \tilde{\varphi}(g^*fg) \in \mathbb{C}$$

où $g \in K(G, A)$ et $\varphi \in A_*^+$. E est un espace de Banach.

Pour $h \in B$ et $\omega \in B^*$ les translatés à gauche et à droite $L_h\omega$ et $R_h\omega$ sont définis par

$$\langle L_h\omega, f \rangle = \langle \omega, hf \rangle \quad \text{et} \quad \langle R_h\omega, f \rangle = \langle \omega, fh \rangle$$

pour tout $f \in B$.

LEMME 1. E est stable par les translations à gauche et à droite.

Démonstration. Il faut voir que si $\omega \in E$ on a $L_h\omega \in E$, $R_h\omega \in E$, quel que soit $h \in B$. Par continuité (pour la norme) et linéarité des applications L_h et R_h , il suffit de le démontrer pour un ω de la forme $\omega_{g,\varphi}$ ($g \in K(G, A)$, $\varphi \in A_*^+$). Soient alors π et ξ la représentation de A et le vecteur de \mathcal{H}_π définis par φ ; on sait que $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\xi}_e$ sont définis (à isomorphisme près) par $\tilde{\varphi}$, donc pour tout $f \in B$

$$\begin{aligned} \langle L_h\omega_{g,\varphi}, f \rangle &= \langle \omega_{g,\varphi}, hf \rangle = \tilde{\varphi}(g^*hfg) \\ &= \tilde{\varphi}((h^*g)^*fg) = (\tilde{\pi}((h^*g)^*fg) \tilde{\xi}_e \mid \tilde{\xi}_e) \\ &= (\tilde{\pi}(f)\tilde{\pi}(g)\tilde{\xi}_e \mid \tilde{\pi}(h^*g)\tilde{\xi}_e). \end{aligned}$$

Posons $\tilde{\eta} = \tilde{\pi}(g)\tilde{\xi}_e$ et $\tilde{\zeta} = \tilde{\pi}(h^*g)\tilde{\xi}_e$; on a

$$\begin{aligned} \langle L_h\omega_{g,\varphi}, f \rangle &= (\tilde{\pi}(f)\tilde{\eta} \mid \tilde{\zeta}) \\ &= \frac{1}{4}\{(\tilde{\pi}(f)(\tilde{\eta} + \tilde{\zeta}) \mid \tilde{\eta} + \tilde{\zeta}) - (\tilde{\pi}(f)(\tilde{\eta} - \tilde{\zeta}) \mid \tilde{\eta} - \tilde{\zeta}) \\ &\quad + i(\tilde{\pi}(f)(\tilde{\eta} + i\tilde{\zeta}) \mid \tilde{\eta} + i\tilde{\zeta}) - i(\tilde{\pi}(f)(\tilde{\eta} - i\tilde{\zeta}) \mid \tilde{\eta} - i\tilde{\zeta})\}. \end{aligned}$$

Ainsi $L_h\omega_{g,\varphi}$ est combinaison linéaire de quatre formes associées à $\tilde{\pi}$; mais ces dernières sont toutes limites en norme de $\omega_{k,\varphi}$, $k \in K(G, A)$, (cf. Dixmier [1] Prop. 2.4.8.) donc appartiennent à E . Donc on a bien $L_h\omega_{g,\varphi} \in E$; de même pour $R_h\omega_{g,\varphi}$.

On sait que B^{**} est une W^* -algèbre; soit E^0 le polaire de E dans B^{**} i.e.

$$E^0 = \{x \in B^{**} \mid \langle \omega, x \rangle = 0, \forall \omega \in E\}.$$

LEMME 2. E^0 est un idéal bilatère $\sigma(B^{**}; B^*)$ -fermé de B^{**} .

Démonstration. Soit $x \in E^0$. Pour tout $h \in B$ et tout $\omega \in E$ on a vu que $L_h\omega \in E$ et $R_h\omega \in E$, donc

$$\langle hx, \omega \rangle = \langle x, L_h\omega \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle xh, \omega \rangle = \langle x, R_h\omega \rangle = 0,$$

d'où $hx \in E^0$ et $xh \in E^0$. Si maintenant $y \in B^{**}$ il existe une suite généralisée $\{h_\alpha\}$ d'éléments de B telle que $h_\alpha \rightarrow x$ pour la topologie $\sigma(B^{**}, B^*)$. Comme E^0 est $\sigma(B^{**}, B^*)$ -fermé et que la multiplication par un élément fixe dans B^{**} est $\sigma(B^{**}, B^*)$ -continue, on a

$$yx = \lim_{\alpha} h_\alpha x \in E^0 \quad \text{et} \quad xy = \lim_{\alpha} x h_\alpha \in E^0$$

d'où le résultat.

E^0 étant un idéal bilatère uniformément fermé de B^{**} , le quotient B^{**}/E^0 est une C^* -algèbre; comme $B^{**}/E^0 = E^*$ avec E espace de Banach, B^{**}/E^0 est une W^* -algèbre, de préduel E . Posons $M = B^{**}/E^0$ et $M_* = E$.

LEMME 3. B est une sous- C^* -algèbre $\sigma(M, M_*)$ -dense de M .

Démonstration. On a un homomorphisme (d'algèbres involutives) canonique $f \in B \mapsto [f] \in M$; il suffit de montrer qu'il est injectif (il sera alors isométrique et on pourra identifier B à son image dans M). Soit donc $f \in B$ tel que $[f] = 0$ i.e. $f \in E^0$; on a $\langle \omega, f \rangle = 0$ pour tout $\omega \in E$. Prenons en particulier $\omega = R_h \tilde{\varphi}$ où $\varphi \in A_*^+$ et $h = u_s \in B$; on a alors

$$0 = \langle \omega, f \rangle = \langle R_h \tilde{\varphi}, f \rangle = \langle \tilde{\varphi}, fu_s \rangle = \langle \varphi, (fu_s)(e) \rangle$$

Mais

$$(fu_s)(e) = \sum_{t \in G} f(t) \sigma_t[u_s(t^{-1}e)] = f(s^{-1}),$$

donc $\langle \varphi, f(s^{-1}) \rangle = 0$. Ceci étant vrai pour tout $\varphi \in A_*^+$ et tout $s \in G$ on a $f = 0$. La σ -densité de B dans M provient de la σ -densité de B dans B^{**} et de la σ -continuité de l'application canonique de B^{**} sur M .

DÉFINITION. La W^* -algèbre $M = B^{**}/E^0$ sera appelée W^* -produit croisé de A par G selon σ et notée $W^*(A, G, \sigma)$.

I.3. Représentations de $W^*(A, G, \sigma)$

Nous conservons les notations A, G, σ, B, E , et $M = W^*(A, G, \sigma)$ du paragraphe 2. Rappelons qu'une W^* -représentation π de A dans \mathcal{H} est une représentation de A dans \mathcal{H} continue pour les topologies $\sigma(A, A_*)$ et $\sigma(L(\mathcal{H}), L(\mathcal{H})_*)$.

THÉORÈME I.1. Soient π une W^* -représentation de A dans \mathcal{H} et $\tilde{\pi}$ la représentation de B dans $\tilde{\mathcal{H}}$ associée à π .

- (1) $\tilde{\pi}$ se prolonge de façon unique en une W^* -représentation (notée encore $\tilde{\pi}$) de M dans $\tilde{\mathcal{H}}$.
- (2) Si π est injective sur A alors $\tilde{\pi}$ est injective sur M .

Démonstration. (1) Nous supposerons d'abord que π possède un vecteur totalisateur $\xi \in \mathcal{H}$; la forme positive φ définie par π et ξ appartient à A_*^+ . On sait

alors que $\tilde{\xi}_e$ est totalisateur pour $\tilde{\pi}$ et que $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\xi}_e$ définissent $\tilde{\varphi}$, et on peut admettre que $\tilde{\pi}$ est la représentation définie par $\tilde{\varphi}$; les formes linéaires

$$f \in B \mapsto (\tilde{\pi}(f)\tilde{\eta} \mid \tilde{\zeta}) \in \mathbb{C} \quad \tilde{\eta}, \tilde{\zeta} \in \tilde{\mathcal{H}}$$

sont donc des limites en norme de combinaisons linéaires de $\omega_{g,\varphi}$, $g \in K(G, A)$, donc appartiennent à E . La représentation $\tilde{\pi}: B \rightarrow L(\tilde{\mathcal{H}})$ est continue (pour la norme); soit

$$\tilde{\pi}^*: L(\tilde{\mathcal{H}})^* \rightarrow B^*$$

son adjointe. Montrons que $\tilde{\pi}^*(L(\tilde{\mathcal{H}})_*) \subset E$: si $\omega \in L(\tilde{\mathcal{H}})_*$ il existe $\tilde{\eta}_i \in \mathcal{H}$, $\tilde{\zeta}_i \in \tilde{\mathcal{H}}$, $i = 1, 2, \dots$ avec

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\tilde{\eta}_i\|^2 < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \|\tilde{\zeta}_i\|^2 < \infty \quad \text{et} \quad \omega(T) = \sum_{i=1}^{\infty} (T\tilde{\eta}_i \mid \tilde{\zeta}_i),$$

pour tout $T \in L(\tilde{\mathcal{H}})$; on a donc

$$\langle \tilde{\pi}^*(\omega), f \rangle = \langle \omega \circ \tilde{\pi}, f \rangle = \langle \omega, \tilde{\pi}(f) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\pi}(f)\tilde{\eta}_i \mid \tilde{\zeta}_i),$$

pour tout $f \in B$. Par ce qui précède on voit donc que $\tilde{\pi}^*(\omega) \in E$. Notons $\hat{\pi}_0^*$ la restriction de $\tilde{\pi}^*$ à $L(\tilde{\mathcal{H}})_*$ et $\hat{\pi}$ l'adjoint de $\hat{\pi}_0^*$; $\hat{\pi}$ est donc une application linéaire continue (pour la norme) de $E^* = M$ dans $L(\tilde{\mathcal{H}})_* = L(\tilde{\mathcal{H}})$; $\hat{\pi}$ est également continue pour les topologies $\sigma(M, M_*)$ et $\sigma(L(\tilde{\mathcal{H}}), L(\tilde{\mathcal{H}})_*)$. Si $f \in B$, $\hat{\pi}(f)$ est défini par

$$\langle \hat{\pi}(f), \omega \rangle = \langle f, \hat{\pi}_0^*(\omega) \rangle = \langle \tilde{\pi}(f), \omega \rangle$$

pour tout $\omega \in L(\tilde{\mathcal{H}})_*$, donc $\hat{\pi} = \tilde{\pi}$ sur B i.e. $\hat{\pi}$ prolonge $\tilde{\pi}$. On en déduit alors que $\hat{\pi}$ est un homomorphisme (d'algèbres involutives) de M dans $L(\tilde{\mathcal{H}})$, donc une W^* -représentation. En effet si $x, y \in M$ il existe deux suites généralisées $\{f_\alpha\}$ et $\{g_\beta\}$ d'éléments de B telles que $f_\alpha \rightarrow x$ et $g_\beta \rightarrow y$ pour la topologie $\sigma(M, M_*)$; on a donc

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(xy) &= \hat{\pi}\left(x \lim_{\beta} g_{\beta}\right) = \hat{\pi}\left(\lim_{\beta} x g_{\beta}\right) = \lim_{\beta} \hat{\pi}(x g_{\beta}) \\ &= \lim_{\beta} \hat{\pi}\left(\left(\lim_{\alpha} f_{\alpha}\right) g_{\beta}\right) = \lim_{\beta} \hat{\pi}\left(\lim_{\alpha} f_{\alpha} g_{\beta}\right) \\ &= \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \tilde{\pi}(f_{\alpha} g_{\beta}) = \lim_{\alpha} \tilde{\pi}(f_{\alpha}) \lim_{\beta} \tilde{\pi}(g_{\beta}) \\ &= \hat{\pi}(x) \hat{\pi}(y) \end{aligned}$$

et de même pour $\hat{\pi}(x^*) = \hat{\pi}(x)^*$.

Le cas d'une W^* -représentation quelconque π se ramène au cas précédent; on peut supposer π non dégénérée et alors $\pi = \bigoplus \pi_i$ où chaque π_i est une W^* -représentation possédant un vecteur totalisateur; on a $\tilde{\pi} = \bigoplus \tilde{\pi}_i$ et en posant $\hat{\pi} = \bigoplus \hat{\pi}_i$ on obtient la W^* -représentation de M dans $\tilde{\mathcal{H}}$ cherchée.

L'unicité de prolongement $\hat{\pi}$ provient de la σ -densité de B dans M et de la σ -continuité de $\hat{\pi}$. Dans la suite, nous noterons simplement $\tilde{\pi}$ pour $\hat{\pi}$.

(2) Soit π une W^* -représentation injective de A . On peut supposer π non dégénérée; $\pi(A)$ est alors une algèbre de von Neumann dans \mathcal{H} . Soit $\varphi \in A_*^+$; comme π^{-1} est σ -continu on a $\varphi \circ \pi^{-1} \in \pi(A)_*^+$: il existe alors $\xi_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2, \dots$ tel que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\|^2 < \infty \quad \text{et} \quad \varphi \circ \pi^{-1}(T) = \sum_{i=1}^{\infty} (T\xi_i \mid \xi_i)$$

pour tout $T \in \pi(A)$, donc

$$\varphi(a) = \sum_{i=1}^{\infty} (\pi(a)\xi_i \mid \xi_i)$$

pour tout $a \in A$. Passons à $\tilde{\varphi}$; on a $\tilde{\varphi} \in E = M_*$ et, pour tout $f \in B$,

$$\tilde{\varphi}(f) = \varphi(f(e)) = \sum_{i=1}^{\infty} (\pi(f(e))\xi_i \mid \xi_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\pi}(f)(\tilde{\xi}_i)_e \mid (\tilde{\xi}_i)_e),$$

la dernière égalité provenant de

$$(\tilde{\pi}(f)\tilde{\xi}_e \mid \tilde{\xi}_e) = \sum_{t \in G} ([\tilde{\pi}(f)\tilde{\xi}_e](t) \mid \tilde{\xi}_e(t)) = ([\tilde{\pi}(f)\tilde{\xi}_e](e) \mid \xi)$$

et de

$$[\tilde{\pi}(f)\tilde{\xi}_e](e) = \sum_{s \in G} \pi[\sigma_{e^{-1}}(f(s))]\tilde{\xi}_e(s^{-1}e) = \pi(f(e))\xi.$$

Quel que soit $g \in K(G, A)$, on a, pour tout $f \in B$,

$$\begin{aligned}\omega_{g,\varphi}(f) &= \tilde{\varphi}(g^*fg) = \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\pi}(g^*fg)(\tilde{\xi}_i)_e | (\tilde{\xi}_i)_e) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\pi}(f)\tilde{\pi}(g)(\tilde{\xi}_i)_e | \tilde{\pi}(g)(\tilde{\xi}_i)_e) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\pi}(f)\tilde{\eta}_i | \tilde{\eta}_i)\end{aligned}$$

en posant $\tilde{\eta}_i = \tilde{\pi}(g)(\tilde{\xi}_i)_e$; on a $\sum_{i=1}^{\infty} \|\tilde{\eta}_i\|^2 < \infty$. Par σ -continuité on en déduit

$$\omega_{g,\varphi}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\pi}(x)\tilde{\eta}_i | \tilde{\eta}_i)$$

pour tout $x \in M$. L'injectivité de $\tilde{\pi}$ en découle: si $\tilde{\pi}(x) = 0$ on a $\omega_{g,\varphi}(x) = 0$ pour tout $g \in K(G, A)$ et tout $\varphi \in A_*^+$, donc $\omega(x) = 0$ pour tout $\omega \in E = M_*$, d'où $x = 0$. Le théorème est ainsi démontré.

Remarque 1.1. Ce résultat montre que notre définition du produit croisé coïncide avec la définition classique lorsque A est une algèbre de von Neumann dans un espace de Hilbert \mathcal{H} et $s \mapsto U_s$ une représentation unitaire de G dans \mathcal{H} , telle que $\sigma_s(a) = U_s a U_s^*$ pour tout $s \in G$ et tout $a \in A$. En effet désignons par π la représentation identité de A dans \mathcal{H} ; alors $M = W^*(A, G, \sigma)$ est isomorphe à $\tilde{\pi}(M)$, qui est l'algèbre de von Neumann dans $\tilde{\mathcal{H}}$ engendrée par $\tilde{\pi}(K(G, A))$. Soit W l'opérateur unitaire sur $\tilde{\mathcal{H}}$ défini par

$$(W\tilde{\xi})(s) = U_s \tilde{\xi}(s)$$

pour tout $\tilde{\xi} \in \tilde{\mathcal{H}}$ et tout $s \in G$. Par un simple calcul on obtient alors

$$\begin{aligned}[W\tilde{\pi}(a)W^*\tilde{\xi}](s) &= a\tilde{\xi}(s), \\ [WV_t W^*\tilde{\xi}](s) &= u_t \cdot \tilde{\xi}(t^{-1}s),\end{aligned}$$

ce qui montre que le produit croisé (classique) de A par G (selon la représentation U) est l'algèbre de von Neumann engendrée par $W\tilde{\pi}(K(G, A))W^*$ (Dixmier [2] p. 130, Suzuki [1]), donc $W\tilde{\pi}(M)W^*$, qui est bien isomorphe à M .

I.4. Structure A -préhilbertienne sur $W^*(A, G, \sigma)$

La représentation matricielle des éléments de $M = W^*(A, G, \sigma)$ (identifié au produit croisé habituel) est bien connue. On obtient un résultat plus intrinsèque, du même type que celui de Suzuki [1] (voir aussi Zeller–Meier [1], Remarque 8.17), en introduisant une topologie adéquate sur M . Les démonstrations sont laissées au lecteur.

On montre tout d'abord que l'application $\phi: B \rightarrow A$ se prolonge en une projection (toujours notée ϕ) de M sur A , σ et s -continue, positive et fidèle. Pour $x, y \in M$ on pose $(x | y) = \phi(xy^*)$; les propriétés de ce "produit scalaire à valeurs dans A " découlent des propriétés de ϕ :

- (1) sesquilinearité;
- (2) $(ax | y) = a(x | y)$ et $(x | ay) = (x | y)a^*$ pour $x, y \in M, a \in A$;
- (3) $(y | x) = (x | y)^*$ pour $x, y \in M$;
- (4) $(x | x) \geq 0$ pour tout $x \in M$ et $(x | x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Pour tout $\varphi \in A_*^+$, nous noterons β_φ la semi-norme sur M définie par $\beta_\varphi(x) = \varphi(\phi(xx^*))^{1/2} = \tilde{\varphi}(xx^*)^{1/2}$ pour tout $x \in M$ (β_φ est la semi-norme α_φ^* de Sakai [1], page 20), puis τ la topologie d'espace localement convexe séparé définie sur M par les $\beta_\varphi, \varphi \in A_*^+$ (cf. D. Bures [1]). On montre facilement que pour tout $y \in M$, tout $a \in A$ et tout $s \in G$ les applications $x \in M \mapsto xy \in M, x \in M \mapsto ax \in M$ et $x \in M \mapsto u_s x \in M$ sont continues pour τ ; l'application $(x, y) \in M \times M \mapsto (x | y) \in A$ est continue si M est muni de la topologie τ et A de la topologie $\sigma(A, A_*)$. Puis on obtient:

THÉORÈME I.2. (1) Pour tout $x \in M$, la famille $\{(x | u_s)u_s\}_{s \in G}$ est sommable pour la topologie τ et $x = \sum_{s \in G} (x | u_s)u_s$.

(2) Si $x = \sum_{s \in G} a_s u_s$ avec $a_s \in A$ et sommabilité pour τ , alors $a_s = (x | u_s)$ pour tout $s \in G$.

Identifiant alors x à l'application $s \in G \mapsto (x | u_s) \in A$ on voit que l'adjoint et le produit sont donnés par les mêmes égalités que dans $L^1(G, A)$ (dans l'égalité définissant le produit, la somme converge pour la topologie $\sigma(A, A_*)$).

II. Un Théorème de Prolongement et ses Applications

II.1. Prolongement de certains isomorphismes.

Soient M [resp. \tilde{M}] une W^* -algèbre, N [resp. \tilde{N}] une sous- W^* -algèbre de M [resp. \tilde{M}] contenant l'élément unité de M [resp. \tilde{M}], et ϕ [resp. $\tilde{\phi}$] une projection

positive normale et fidèle de M sur N [resp. de \tilde{M} sur \tilde{N}]. Soient M_0 [resp. \tilde{M}_0] une sous-algèbre involutive de M [resp. \tilde{M}], contenant N [resp. \tilde{N}] et σ -dense dans M [resp. \tilde{M}] et Λ_0 un isomorphisme (d'algèbres involutives) de M_0 sur \tilde{M}_0 qui vérifie les deux conditions suivantes:

- (1) $\Lambda_0(N) = \tilde{N}$; on notera Λ la restriction de Λ_0 à N ;
- (2) $\tilde{\phi} \circ \Lambda_0 = \Lambda \circ (\phi |_{M_0})$.

On peut illustrer cette situation par le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 M & & \tilde{M} \\
 \cup & & \cup \\
 M_0 & \xrightarrow{\Lambda_0} & \tilde{M}_0 \\
 \phi \downarrow & & \downarrow \tilde{\phi} \\
 N & \xrightarrow{\Lambda} & \tilde{N}
 \end{array}$$

THÉORÈME II.1. *Dans ces conditions Λ_0 se prolonge de manière unique en un isomorphisme $\bar{\Lambda}$ de M sur \tilde{M} , qui vérifie*

$$\tilde{\phi} \circ \bar{\Lambda} = \Lambda \circ \phi$$

Démonstration.

(a) Soit $\omega \in N_*^+$; on a $\omega \circ \phi \in M_*^+$. L'ensemble $I_\omega = \{x \in M \mid \omega \circ \phi(x^*x) = 0\}$ est un idéal à gauche fermé pour la norme et M/I_ω est un espace préhilbertien pour le produit scalaire $(x_\omega \mid y_\omega)_\omega = \omega \circ \phi(y^*x)$ [x_ω désigne la classe de $x \in M$ dans M/I_ω]. Soit \mathcal{H}_ω l'espace de Hilbert complété de M/I_ω .

Montrons que $M_0/M_0 \cap I_\omega$ est dense dans \mathcal{H}_ω . Pour cela il suffit de voir que $M_0/M_0 \cap I_\omega$ est dense dans M/I_ω ; soient $x \in M$ et $\varepsilon > 0$; comme M_0 est $s(M, M_*)$ -dense dans M , il existe un $x_0 \in M_0$ tel que $\omega \circ \phi[(x - x_0)^*(x - x_0)] \leq \varepsilon$; mais $\omega \circ \phi[(x - x_0)^*(x - x_0)] = \|x_\omega - (x_0)_\omega\|_\omega^2$ d'où l'affirmation.

D'autre part à ω correspond un $\tilde{\omega} \in \tilde{N}_*^+$ unique par la relation $\omega = \tilde{\omega} \circ \Lambda$ [$\Lambda: N \rightarrow \tilde{N}$ étant un isomorphisme est σ -bicontinu]. On construit comme ci-dessus les objets $\tilde{\omega} \circ \tilde{\phi}$, $\tilde{I}_{\tilde{\omega}}$, $\tilde{M}/\tilde{I}_{\tilde{\omega}}$ et $\mathcal{H}_{\tilde{\omega}}$. Montrons que $\Lambda_0(M_0 \cap I_\omega) = \tilde{M}_0 \cap \tilde{I}_{\tilde{\omega}}$. Pour tout $x \in M_0$ on a

$$\begin{aligned}
 \tilde{\omega} \circ \tilde{\phi}[\Lambda_0(x)^* \Lambda_0(x)] &= \tilde{\omega} \circ \tilde{\phi} \circ \Lambda_0(x^*x) \\
 &= \omega \circ \Lambda^{-1} \circ \Lambda \circ \phi(x^*x) \\
 &= \omega \circ \phi(x^*x)
 \end{aligned}$$

d'où l'affirmation.

Donc Λ_0 induit une application linéaire biunivoque

$$u_\omega : M_0/M_0 \cap I_\omega \rightarrow \tilde{M}_0/\tilde{M}_0 \cap \tilde{I}_\omega$$

définie par $u_\omega(x_\omega) = (\Lambda_0(x))_\omega$. L'égalité ci-dessus s'écrit encore

$$\|u_\omega(x_\omega)\|_\omega^2 = \|x_\omega\|_\omega^2$$

donc u_ω se prolonge en une isométrie, notée encore u_ω , entre \mathcal{H}_ω et $\tilde{\mathcal{H}}_\omega$.

(b) Soit maintenant $\pi_\omega : M \rightarrow L(\mathcal{H}_\omega)$ la représentation associée à $\omega \circ \phi$ [i.e. pour tout $x \in M$, $\pi_\omega(x)$ est le prolongé à \mathcal{H}_ω de l'opérateur $y_\omega \mapsto (xy)_\omega$]; on construit de même $\tilde{\pi}_\omega : \tilde{M} \rightarrow L(\tilde{\mathcal{H}}_\omega)$. Montrons que, pour tout $x \in M_0$, on a

$$u_\omega \circ \pi_\omega(x) = \tilde{\pi}_\omega(\Lambda_0(x)) \circ u_\omega$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_\omega & \xrightarrow{u_\omega} & \tilde{\mathcal{H}}_\omega \\ \pi_\omega(x) \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi}_\omega(\Lambda_0(x)) \\ \mathcal{H}_\omega & \xrightarrow{u_\omega} & \tilde{\mathcal{H}}_\omega \end{array}$$

Il suffit de vérifier cette égalité sur $M_0/M_0 \cap I_\omega$; or, pour tout $y_\omega \in M_0/M_0 \cap I_\omega$, on a

$$[u_\omega \circ \pi_\omega(x)]y_\omega = u_\omega(xy)_\omega = (\Lambda_0(xy))_\omega$$

et

$$[\tilde{\pi}_\omega(\Lambda_0(x))u_\omega]y_\omega = \tilde{\pi}_\omega(\Lambda_0(x))(\Lambda_0(y))_\omega = (\Lambda_0(x)\Lambda_0(y))_\omega$$

d'où l'égalité cherchée.

Donc l'isomorphisme spatial

$$T \in L(\mathcal{H}_\omega) \mapsto u_\omega \circ T \circ u_\omega^{-1} \in L(\tilde{\mathcal{H}}_\omega)$$

envoie $\pi_\omega(M_0)$ sur $\tilde{\pi}_\omega(\tilde{M}_0)$. Comme π_ω et $\tilde{\pi}_\omega$ sont des W^* -représentations, $\pi_\omega(M_0)$ et $\tilde{\pi}_\omega(\tilde{M}_0)$ sont ultrafaiblement denses dans $\pi_\omega(M)$ et $\tilde{\pi}_\omega(\tilde{M})$ respectivement, et l'isomorphisme ci-dessus envoie $\pi_\omega(M)$ sur $\tilde{\pi}_\omega(\tilde{M})$.

(c) Considérons enfin l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \bigoplus \mathcal{H}_\omega (\omega \in N_*^+)$ et la W^* -représentation $\pi = \bigoplus \pi_\omega (\omega \in N_*^+)$ de M dans $L(\mathcal{H})$; $\pi(M)$ est une W^* -algèbre et comme ϕ est fidèle, π est un isomorphisme de M sur $\pi(M)$. On construit de même $\tilde{\mathcal{H}} = \bigoplus \tilde{\mathcal{H}}_\omega (\omega \in N_*^+)$ et $\tilde{\pi} = \bigoplus \tilde{\pi}_\omega (\omega \in N_*^+)$ et on a le même résultat. Soit u l'isométrie de \mathcal{H} sur $\tilde{\mathcal{H}}$ définie par $u(\xi_\omega) = (u_\omega \xi_\omega)$; il est clair que l'isomorphisme

spatial

$$T \in L(\mathcal{H}) \mapsto u \circ T \circ u^{-1} \in L(\tilde{\mathcal{H}})$$

envoie $\pi(M)$ sur $\tilde{\pi}(\tilde{M})$. Alors en posant, pour tout $x \in M$,

$$\bar{\Lambda}(x) = \tilde{\pi}^{-1}(u\pi(x)u^{-1})$$

on a défini le prolongement cherché. L'unicité étant évidente, le théorème est démontré.

Le corollaire suivant est une généralisation d'un théorème de C. Pearcy et J. R. Ringrose [1] ainsi que de son extension par M. Enomoto et K. Tamaki [1].

COROLLAIRE. Soient M une W^* -algèbre, N une sous- W^* -algèbre de M contenant l'élément unité de M et ϕ une projection positive normale et fidèle de M sur N . Soient A et B deux sous-algèbres involutives de M dont les éléments commutent avec ceux de N . Notons \hat{A} et \hat{B} les W^* -algèbres engendrées par A et N , B et N respectivement. Si un isomorphisme Ψ de A sur B vérifie la condition $\phi(\Psi(x)) = \phi(x)$ pour tout $x \in A$, il se prolonge en un isomorphisme $\hat{\Psi}$ de \hat{A} sur \hat{B} tel que

- (1) $\hat{\Psi}(a) = \Psi(a)$ pour tout $a \in A$,
- (2) $\hat{\Psi}(x) = x$ pour tout $x \in N$,
- (3) $\phi(\hat{\Psi}(x)) = \phi(x)$ pour tout $x \in \hat{A}$,
- (4) $\hat{\Psi}(\bar{A}) = \bar{B}$ [\bar{A}, \bar{B} : σ -fermetures de A, B].

Démonstration. Notons A_0 [resp. B_0] les sous-algèbres involutives de M engendrées par A et N [resp. B et N]. Comme les éléments de A et N commutent, A_0 est l'ensemble des sommes finies $x_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i$ avec $a_i \in A$ et $x_i \in N$. De même pour B_0 . On aimerait prolonger Ψ à A_0 en posant

$$\Psi_0\left(x_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i\right) = x_0 + \sum_{i=1}^n \Psi(a_i) x_i.$$

Pour que cette relation définisse Ψ_0 il suffit que

$$x_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$$

soit équivalent à

$$x_0 + \sum_{i=1}^n \Psi(a_i)x_i = 0.$$

Or en utilisant les propriétés algébriques de ϕ , on voit facilement que

$$\phi[(x_0 + \sum a_i x_i)^*(x_0 + \sum a_i x_i)] = \phi[(x_0 + \sum \Psi(a_i)x_i)^*(x_0 + \sum \Psi(a_i)x_i)]$$

ce qui, compte tenu de la fidélité de ϕ , établit l'équivalence ci-dessus; Ψ_0 est donc bien défini. Il est alors facile de voir que Ψ_0 est un isomorphisme d'algèbres involutives de A_0 sur B_0 , que $\Psi_0(a) = \Psi(a)$ pour tout $a \in A$, $\Psi_0(x) = x$ pour tout $x \in N$ et $\phi \circ \Psi_0(x) = \phi(x)$ pour tout $x \in A_0$. Le théorème II.1. affirme alors qu'on peut prolonger Ψ_0 en un isomorphisme de \hat{A} ($= \sigma$ -fermeture de A_0) sur \hat{B} ($= \sigma$ -fermeture de B_0) qui vérifie (1) (2) (3) et (4).

Remarque II.1. Ajoutons aux hypothèses du théorème II.1. les conditions $N = \tilde{N}$ et $\Lambda = id_N$ et considérons sur M [resp. \tilde{M}] la structure "N-préhilbertienne" définie par ϕ [resp. $\tilde{\phi}$] (voir §I.4.). Λ_0 est alors un homomorphisme de N -modules et la condition $\tilde{\phi} \circ \Lambda_0 = \phi \mid M_0$ est équivalente à

$$(\Lambda_0(x) \mid \Lambda_0(y)) = (x \mid y)$$

pour $x, y \in M_0$ i.e. Λ_0 conserve le "produit scalaire".

II.2. Application 1: Compléments sur le produit croisé.

(1) Soit $M = W^*(A, G, \sigma)$ le produit croisé d'une W^* -algèbre A par un groupe G selon la représentation σ . Si H est un sous-groupe de G on peut considérer l'homomorphisme σ_H , restriction de σ à H , et le produit croisé $W^*(A, H, \sigma_H)$.

PROPOSITION II.1. $W^*(A, H, \sigma_H)$ est canoniquement isomorphe à la sous- W^* -algèbre N de $M = W^*(A, G, \sigma)$ formée des $x \in M$ tels que $(x \mid u_s) = 0$ pour tout $s \in G \setminus H$.

Démonstration. On voit facilement que N est une algèbre involutive (pour le produit et l'involution voir le § I.4.); elle est σ -fermée dans M car égale à l'intersection des ensembles σ -fermés $\{x \in M \mid (x \mid u_s) = 0\}$ pour $s \in G \setminus H$. D'autre

part la sous-algèbre involutive N_0 des sommes finies $\sum_{s \in H} a_s u_s$, $a_s \in A$, est σ -dense dans N car si $x \in N$ et J est une partie finie de G , on a

$$\sum_{s \in J} (x | u_s) u_s = \sum_{s \in J \cap H} (x | u_s) u_s \in N_0$$

Soit maintenant, pour tout $s \in H$, $v_s: H \rightarrow A$ la fonction caractéristique de s . On sait, par construction du produit croisé, que l'algèbre involutive P_0 des sommes finies $\sum_{s \in H} a_s v_s$ est σ -dense dans $W^*(A, H, \sigma_H)$. L'application $\Lambda_0: \sum a_s v_s \in P_0 \mapsto \sum a_s u_s \in N_0$ est un isomorphisme d'algèbres involutives tels que $\Lambda_0 | A = id_A$. Les projections canoniques $\phi: W^*(A, G, \sigma) \rightarrow A$ et $\Psi: W^*(A, H, \sigma_H) \rightarrow A$ vérifient $\phi \circ \Lambda_0 = \Psi | P_0$. Par le théorème II.1. Λ_0 se prolonge de manière unique en un isomorphisme Λ de $W^*(A, H, \sigma_H)$ sur N .

(2) Notons M_0 l'algèbre involutive des sommes finies $\sum_{s \in G} a_s u_s$, $a_s \in A$; M_0 est σ -dense dans M . Soit α un automorphisme de G . L'application $\Lambda_0: \sum a_s u_s \mapsto \sum a_s u_{\alpha(s)}$ est un automorphisme de M_0 (pour la structure d'algèbre involutive); on a $\Lambda_0 | A = id_A$ et $\phi \circ \Lambda_0 = \phi | M_0$, donc par le théorème II.1. Λ_0 se prolonge en un automorphisme Λ_α de M . Kallman [1] a étudié certaines propriétés de ces automorphismes dans le cas où $A = \mathbb{C}$ et G est un groupe ICC (i.e. les classes d'éléments conjugués des éléments $\neq e$ sont infinies). Nous généralisons ici un de ses résultats:

PROPOSITION II.2. *Supposons que A soit G -finie. Une condition suffisante pour que Λ_α opère quasi librement sur M est que, pour tout $s \in G$, l'ensemble $\{\alpha(t)^{-1} st \mid t \in G\}$ soit infini.*

Démonstration. Soit $x \in M$ tel que $xy = \Lambda_\alpha(y)x$ pour tout $y \in M$. Posons $(x | u_s) = a_s$ pour tout $s \in G$; en égalant les coefficients de u_s dans l'égalité $xu_t = \Lambda_\alpha(u_t)x = u_{\alpha(t)}x$, on obtient $a_s = \sigma_{\alpha(t)}(a_{\alpha(t)^{-1}st})$, d'où

$$(*) \quad a_s a_s^* = \sigma_{\alpha(t)}[a_{\alpha(t)^{-1}st} a_{\alpha(t)^{-1}st}^*]$$

pour $s, t \in G$. Pour sommabilité pour la topologie $\sigma(A, A_*)$ de $\phi(xx^*) = \sum s_s a_s^*$ implique, pour tout $\varphi \in A_*^+$, la sommabilité de $\sum \varphi(a_s a_s^*)$. La condition " $\{\alpha(t)^{-1}st \mid t \in G\}$ est infini pour tout $s \in G$ " et la relation (*) impliquent alors que $\varphi(a_s a_s^*) = 0$ pour tout $s \in G$ et toute forme G -invariante $\varphi \in A_*^+$. Comme A est G -finie on a $a_s = 0$ pour tout $s \in G$, donc $x = 0$ et Λ_α opère quasi librement.

Il n'est pas difficile de trouver un exemple qui montre que l'hypothèse "A est G-finie" est essentielle. On peut étendre sans restriction un autre résultat de Kallman:

PROPOSITION II.2'. *Pour que Λ_α ne laisse que les éléments de A fixes il faut et il suffit que pour tout $s \in G$, $s \neq e$, l'ensemble $\{\alpha^n(s) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ soit infini.*

Démonstration. Soit $x \in M$; posons $a_s = (x \mid u_s)$ pour tout $s \in G$. Si $\Lambda_\alpha(x) = x$ on voit facilement que, pour tout $s \in G$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $a_s = a_{\alpha^n(s)}$, donc pour tout $\varphi \in A_*$, $\varphi[a_s a_s^*] = \varphi[a_{\alpha^n(s)} a_{\alpha^n(s)}^*]$; la sommabilité de $\sum \varphi(a_s a_s^*)$ montre alors que la condition est suffisante. Inversément s'il existe $s \neq e$ tel que $F = \{\alpha^n(s) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ soit fini, alors l'élément $x = \sum_{t \in F} u_t \in M$ vérifie $x \notin A$ et $\Lambda_\alpha(x) = x$.

II.3. Application 2: Sous-algèbre des invariants par un groupe d'automorphismes.

Soient M une W^* -algèbre, G un groupe discret et $\sigma: s \in G \mapsto \sigma_s \in \text{Aut } M$ un homomorphisme. En appliquant le théorème I.1. on voit qu'il existe un espace de Hilbert \mathcal{H} , une W^* -représentation (non dégénérée) fidèle π de M dans \mathcal{H} et une représentation unitaire V de G dans \mathcal{H} tels que, pour tout $s \in G$ et tout $x \in M$, on ait

$$\pi(\sigma_s(x)) = V_s \pi(x) V_s^*.$$

Dans ce paragraphe, pour simplifier les notations, nous identifierons M et $\pi(M)$ de sorte que nous sommes placés dans les conditions suivantes: M est une algèbre de von Neumann dans \mathcal{H} et V une représentation unitaire de G dans \mathcal{H} telle que pour tout $s \in G$, $V_s M V_s^* = M$; nous posons $\sigma_s(x) = V_s x V_s^*$ pour tout $s \in G$ et $V_G = \{V_s \mid s \in G\}$.

Soit $N = M^G$ la sous-algèbre de von Neumann de M formée des éléments $x \in M$ qui sont laissés fixes par G ; on a $N = M \cap V_G'$ (V_G' = commutant de V_G dans $L(\mathcal{H})$), donc N' est l'algèbre de von Neumann engendrée par M' et V_G . Constatons d'autre part que G opère par automorphismes dans M' ; en effet, si $x' \in M'$ et $s \in G$ on a, pour tout $x \in M$,

$$\begin{aligned} V_s x' V_s^* x &= V_s x' \sigma_{s^{-1}}(x) V_s^* = V_s \sigma_{s^{-1}}(x) x' V_s^* \\ &= x V_s x' V_s^*, \end{aligned}$$

donc $V_s x' V_s^* \in M'$. Posons $\sigma'_s(x') = V_s x' V_s^*$; σ' est un homomorphisme de G dans

Aut (M'). On voit donc que

$$(N')_0 = \left\{ \sum_{i=1}^n x'_i V_{s_i} \mid x'_i \in M' \right\}$$

est une algèbre involutive dont la fermeture faible est N' . Nous allons chercher à identifier N' et le produit croisé $W^*(M', G, \sigma')$. Nous aurons besoin de la remarque suivante:

LEMME. *Si l'action σ de G dans M est quasi libre, il en est de même de l'action σ' de G dans M' .*

Démonstration. Soient $s \neq e$ et $x' \in M'$ tel que $x'y' = \sigma'_s(y')x'$ pour tout $y' \in M'$; il faut voir que $x' = 0$. On a $x'y' = V_s y' V_s^* x'$, donc $V_s^* x' y' = y' V_s^* x'$, pour tout $y' \in M'$; d'où $V_s^* x' \in M$ et

$$V_s^* x' y = V_s^* y x' = \sigma_{s^{-1}}(y) V_s^* x'$$

pour tout $y \in M$. Comme l'action σ de G dans M est quasi libre on a $V_s^* x' = 0$, $x' = 0$.

Nous traiterons d'abord le cas particulier où G est un groupe fini.

1^{er} cas. G est un groupe fini.

Lorsque G est fini on a $W^*(M', G, \sigma') = K(G, M')$ et tout élément s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{s \in G} x'_s u_s$ (somme finie). On définit donc une application

$$\Lambda : W^*(M', G, \sigma') \rightarrow N'$$

en posant $\Lambda(\sum x'_s u_s) = \sum x'_s V_s$. Comme les relations qui lient l'action σ' de G dans M' et les représentations unitaires u et V sont les mêmes [i.e.

$$\sigma'_s(x') = u_s x' u_s^* = V_s x' V_s^*$$

pour tout $x' \in M'$ et tout $s \in G$] on voit que Λ est un homomorphisme d'algèbres involutives. Montrons que Λ est σ -continu: soient π la représentation identité de M' dans \mathcal{H} et $\tilde{\pi}$ la représentation de $W^*(M', G, \sigma')$ dans $\tilde{\mathcal{H}} = L^2(G, \mathcal{H})$ qui lui est associée; l'image $P = \tilde{\pi}(W^*(M', G, \sigma'))$ est une algèbre de von

Neumann et $\tilde{\pi}$ un isomorphisme (théorème I.1.); il nous suffit donc de démontrer que l'homomorphisme $\Lambda \circ \tilde{\pi}^{-1}: P \rightarrow N'$ est ultrafaiblement continu; étant donné $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, définissons $\tilde{\xi}, \hat{\eta} \in \tilde{\mathcal{H}}$ par

$$\tilde{\xi}(s) = \begin{cases} \xi & \text{si } s = e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \hat{\eta}(s) = V_s^* \eta \quad \text{pour tout } s \in G;$$

si $y = \sum x'_s u_s \in W^*(M', G, \sigma')$, on a, pour tout $t \in G$,

$$(\tilde{\pi}(y)\tilde{\xi})(t) = \sum_s \sigma'_{t^{-1}}(x'_s) \tilde{\xi}(s^{-1}t) = \sigma'_{t^{-1}}(x'_t) \xi$$

et

$$\begin{aligned} (\tilde{\pi}(y)\tilde{\xi} | \hat{\eta}) &= \sum_t (\sigma'_{t^{-1}}(x'_t) \xi | V_t^* \eta) \\ &= \sum_t (x'_t V_t \xi | \eta) \\ &= (\Lambda(y)\xi | \eta), \end{aligned}$$

d'où on déduit la continuité ultrafaible de Λ . On voit ainsi que Λ est surjectif ($\Lambda(P)$ est une algèbre de von Neumann qui contient $(N')_0$) et que son noyau est un idéal bilatère σ -fermé. On a démontré:

PROPOSITION II.3. *Λ est un homomorphisme σ -continu de $W^*(M', G, \sigma')$ sur N' ; il existe un projecteur p du centre de $W^*(M', G, \sigma')$ tel que Λ induise un isomorphisme de $pW^*(M', G, \sigma')$ sur N' .*

COROLLAIRE. *Soient M un facteur et G un groupe fini opérant par automorphismes extérieurs dans M . Alors $N = M^G$ est un facteur, $M \cap N' = \mathbb{C}1$ et toute sous- W^* -algèbre L telle que $N \subset L \subset M$ est un facteur. Si H_1 et H_2 sont deux sous-groupes de G tels que $M^{H_1} = M^{H_2}$ alors $H_1 = H_2$.*

Démonstration. En effet, dans ces conditions $W^*(M', G, \sigma')$ est un facteur et Λ un isomorphisme de $W^*(M', G, \sigma')$ sur N' ; les deux premières affirmations découlent alors de résultats connus. Enfin L est un facteur car $L \cap L' \subset M \cap N' = \mathbb{C}1$ et si H est un sous-groupe de G , $(M^H)'$ est l'image par Λ de la sous-algèbre $\{y \in W^*(M', G, \sigma') \mid (y | u_s) = 0 \text{ pour tout } s \notin H\}$ isomorphe à $W^*(M', H, \sigma'_H)$.

Remarque II.2. Lorsque M est un facteur II_1 , ce corollaire se trouve dans un article de M. Nakamura et Z. Takeda [1], dont nous avons ici quelque peu généralisé la méthode. En utilisant des propriétés attachées plus étroitement aux facteurs II_1 (la trace finie ou la simplicité algébrique) les auteurs montrent que toute sous-algèbre de M contenant N est de la forme M^H où H est un sous-groupe de G , établissant ainsi une correspondance galoisienne entre les sous-groupes de G et les sous-algèbres de M contenant N . Nous n'avons pas pu établir, pour un facteur quelconque, la surjectivité de l'application $H \mapsto M^H$.

Remarque II.3. Les hypothèses faites par Nakamura et Takeda [1] leur interdisait de considérer des groupes G infinis. Nous pouvons affaiblir ces hypothèses et établir un isomorphisme Λ entre N' et $W^*(M', G, \sigma')$ sans restriction sur G .

2^{ème} cas: G groupe quelconque.

Nous ne supposons plus que G est fini mais nous ferons les deux hypothèses suivantes:

(h₁): G opère quasi librement (par σ) dans M ;

(h₂): il existe une projection positive normale fidèle Ψ de N' sur M' .

Considérons sur $W^*(M', G, \sigma')$ et sur N' les structures " M' -préhilbertiennes" définies par ϕ et Ψ respectivement (ϕ désigne la projection positive normale fidèle de $W^*(M', G, \sigma')$ sur M' ; voir § I.4.); nous noterons τ_ϕ et τ_Ψ les topologies associées. Notons que $\{V_s\}$ est un système orthonormé dans N' ; en effet, pour tout $x' \in M'$ et tout $s \in G$, $s \neq e$, on a

$$\Psi(V_s)x' = \Psi(V_sx') = \Psi(\sigma_s(x')V_s) = \sigma_s(x')\Psi(V_s)$$

d'où $\Psi(V_s) = 0$ à cause de l'hypothèse (h₁); on a donc $(V_s | V_t) = \Psi(V_sV_t^*) = \Psi(V_{st^{-1}}) = 0$ si $s \neq t$ et $(V_s | V_s) = \Psi(1) = 1$. Considérons les sous-algèbres involutives σ -denses $K(G, M')$ et $(N')_0$ de $W^*(M', G, \sigma')$ et N' respectivement; on définit un homomorphisme d'algèbres involutives Λ_0 de $K(G, M')$ sur $(N')_0$ en posant

$$\Lambda_0\left(\sum_{s \in G} x'_s u_s\right) = \sum_{s \in G} x'_s V_s \quad (\text{somme finie})$$

on voit immédiatement que $\Lambda_0 | M' = id_{M'}$ et $\Psi \circ \Lambda_0 = \phi | K(G, M')$ d'où, pour $y_1, y_2 \in K(G, M')$, l'égalité

$$(\Lambda_0(y_1) | \Lambda_0(y_2)) = (y_1 | y_2);$$

Λ_0 est donc injectif et se prolonge de façon unique en un isomorphisme Λ de $W^*(M', G, \sigma')$ sur N' , qui vérifie $\Psi \circ \Lambda = \phi$. On a démontré:

PROPOSITION II.4. *Avec les hypothèses (h₁) et (h₂) ci-dessus il existe un isomorphisme*

$$\Lambda : W^*(M', G, \sigma') \rightarrow N'$$

tel que

$$\Lambda \left(\sum_{s \in G} x'_s u_s \right) = \sum_{s \in G} x'_s V_s$$

(les sommes convergent pour les topologies τ_ϕ et τ_ψ respectivement).

On en déduit, comme pour la proposition II.3., le corollaire suivant:

COROLLAIRE. *Dans les conditions ci-dessus on a $M \cap N' = Z(M)$, $Z(N) = Z(M)^G$ donc N est un facteur si et seulement si G opère ergodiquement dans $Z(M)$. Si H_1 et H_2 sont deux sous-groupes de G tels que $M^{H_1} = M^{H_2}$ alors $H_1 = H_2$.*

III. Une Correspondance Galoisienne

Dans toute la suite M désignera une W^* -algèbre, Z le centre de M et G un groupe fini d'automorphismes de M . Rappelons que G opère presque librement dans M si, pour tout $\sigma \in G$, $\sigma \neq 1$, et tout projecteur $p \in Z$, $p \neq 0$, il existe un projecteur $q \in Z$ tel que $0 < q \leq p$ et $\sigma(q)q = 0$.

DÉFINITION. Une sous- W^* -algèbre L de M sera dite G -libre si pour tout $\sigma \in G$, ou bien $\sigma|L = 1$, ou bien, pour tout projecteur $p \in Z \cap L$, $p \neq 0$, il existe un projecteur $q \in Z \cap L$ tel que $0 < q \leq p$ et $\sigma(q)q = 0$.

PROPOSITION III.1. *Soit L une sous- W^* -algèbre G -libre de M . Il existe une famille $\{q_i\}_{i \in I}$ de projecteurs de $Z \cap L$, orthogonaux deux à deux et de somme 1, telle que, si $\sigma \in G$ et $\sigma|L \neq 1$, on ait $\sigma(q_i)q_i = 0$ pour tout $i \in I$.*

Démonstration. Soient $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s$ les éléments de G dont la restriction à L n'est pas l'identité. Il suffit de voir que tout projecteur $p \neq 0$ de $Z \cap L$ majore un projecteur $q \neq 0$ de $Z \cap L$ tel que $\sigma_i(q)q = 0$ pour tout $i = 1, 2, \dots, s$. Or, L étant

G -libre, il existe une suite de projecteurs $\neq 0$ de $Z \cap L$ telle que $p \geq f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_s > 0$ et $\sigma_i(f_i)f_i = 0$ pour tout $i = 1, 2, \dots, s$. Le projecteur $q = f_s$ répond alors à la question car $\sigma_i(q)q = \sigma_i(f_i q)f_i q = \sigma_i(f_i)f_i \sigma_i(q)q = 0$.

COROLLAIRE. *Si G opère presque librement dans M , il existe une famille $\{p_i\}_{i \in I}$ de projecteurs de Z , orthogonaux deux à deux et de somme 1, telle que, pour tout $i \in I$ on ait*

$$\sigma(p_i)p_i = \begin{cases} p_i & \text{si } \sigma = 1 \\ 0 & \text{si } \sigma \neq 1 \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant démontrer le “théorème fondamental de la théorie de Galois”; nous noterons $N = M^G$ la sous- W^* -algèbre des points fixes de M par G .

THÉORÈME III.1. *Supposons que G opère presque librement dans M . Il y a correspondance biunivoque entre les sous-groupes H de G et les sous- W^* -algèbres G -libres L de M qui contiennent N . Cette correspondance est donnée par*

$$H \mapsto M^H = \{x \in M \mid \sigma(x) = x, \forall \sigma \in H\}$$

$$L \mapsto G_L = \{\sigma \in G \mid \sigma(x) = x, \forall x \in L\}.$$

Démonstration.

(a) Soit L une sous- W^* -algèbre G -libre de M , contenant N . Posons $H = G_L = \{\sigma \in G \mid \sigma(x) = x, \forall x \in L\}$; H est un sous-groupe de G . Montrons que $M^H = L$. Il est clair que $L \subset M^H$. Comme L est G -libre il existe (Proposition III.1.) une famille $\{q_j\}_{j \in J}$ de projecteurs de $Z \cap L$, orthogonaux deux à deux et de somme 1, telle que,

$$\sigma(q_j)q_j = \begin{cases} q_j & \text{si } \sigma \in H \\ 0 & \text{si } \sigma \notin H \end{cases}$$

pour tout $j \in J$. Soit $x \in M^H$, on a $x = 1/|H| \sum_{\tau \in H} \tau(x)$, où $|H|$ désigne le nombre d'éléments de H . Donc, pour tout $j \in J$, on a

$$\begin{aligned} xq_j &= \frac{1}{|H|} \sum_{\tau \in H} \tau(x)q_j = \frac{1}{|H|} \sum_{\tau \in H} \tau(x)\tau(q_j)q_j \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in G} \sigma(x)\sigma(q_j)q_j = \frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in G} \sigma(xq_j)q_j. \end{aligned}$$

Mais $1/|H|\sum_{\sigma \in G} \sigma(xq_j)$ appartient à $N = M^G$, donc $xq_j \in L$. Comme $x = \sum_{j \in J} xq_j$ on a $x \in L$. Donc $M^H \subset L$.

(b) Soit H un sous-groupe de G . Posons $L = M^H$ et $H' = G_L = \{\sigma \in G \mid \sigma(x) = x, \forall x \in L\}$. Montrons que $H = H'$ et que L est G -libre. Tout d'abord il est clair que $H \subset H'$ et que $M^{H'} = M^H = L$. Considérons les deux applications suivantes:

$$\phi: M \rightarrow M^H = L \text{ définie par } \phi(x) = \frac{1}{|H|} \sum_{\tau \in H} \tau(x)$$

et

$$\phi': M \rightarrow M^{H'} = L \text{ définie par } \phi'(x) = \frac{1}{|H'|} \sum_{\rho \in H'} \rho(x).$$

ϕ [resp. ϕ'] est une projection H -invariante [resp. H' -invariante] de M sur L . Comme $H \subset H'$, ϕ' est H -invariante et on a, pour tout $x \in M$,

$$\phi'(\phi(x)) = \phi' \left(\frac{1}{|H|} \sum_{\tau \in H} \tau(x) \right) = \phi'(x).$$

D'autre part $\phi'(\phi(x)) = \phi(x)$ car $\phi(x) \in L$, donc on a $\phi = \phi'$. Soit p un des projecteurs de la famille $\{p_i\}$ définie dans le corollaire de la proposition III.1; on a

$$\phi(p)p = \phi'(p)p;$$

mais d'autre part:

$$\phi(p)p = \frac{1}{|H|} \sum_{\tau \in H} \tau(p)p = \frac{1}{|H|} p,$$

$$\phi'(p)p = \frac{1}{|H'|} \sum_{\rho \in H'} \rho(p)p = \frac{1}{|H'|} p,$$

d'où $|H| = |H'|$ et donc $H = H'$.

Montrons maintenant que L est G -libre. Soit $\{p_i\}_{i \in I}$ la famille de projecteurs de Z définie dans le corollaire de la proposition III.1. Posons, pour tout $i \in I$,

$$p'_i = \sum_{\tau \in H} \tau(p_i);$$

p'_i appartient à $Z \cap M^H = Z \cap L$ et comme

$$\sigma_1(p_i)\sigma_2(p_i) = \sigma_2[\sigma_2^{-1}\sigma_1(p_i)p_i] = 0$$

si $\sigma_1, \sigma_2 \in G$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$, on voit que p'_i est un projecteur. Pour tout $\sigma \in G$, on a

$$\begin{aligned} \sigma(p'_i)p'_i &= \sum_{\tau \in H} \sigma\tau(p_i) \sum_{\rho \in H} \rho(p_i) \\ &= \sum_{\tau, \rho \in H} \sigma\tau(p_i)\rho(p_i); \end{aligned}$$

mais $\sigma\tau(p_i)\rho(p_i) = 0$ sauf si $\sigma\tau = \rho$. On voit donc que

$$\sigma(p'_i)p'_i = \begin{cases} p'_i & \text{si } \sigma \in H \\ 0 & \text{si } \sigma \notin H \end{cases}$$

Soient $\sigma \in G$ tel que $\sigma|L \neq 1$ et $e \in Z \cap L$ un projecteur non nul. Il faut trouver un projecteur $f \in Z \cap L$ tel que $0 < f \leq e$ et $\sigma(f)f = 0$. Comme $e \neq 0$, il existe $i \in I$ tel que $ep_i \neq 0$; on a aussi $ep'_i \neq 0$ car $p_i \leq p'_i$. Posons $f = ep'_i$; f est un projecteur de $Z \cap L$, $0 < f \leq e$ et

$$\sigma(f)f = \sigma(ep'_i)ep'_i = \sigma(e)e\sigma(p'_i)p'_i = 0$$

car $\sigma|L \neq 1$ est équivalent à $\sigma \notin H$. Ainsi L est G -libre et le théorème est démontré.

Le cas des sous-groupes distingués est réglé par la proposition suivante, dont la démonstration est facile:

PROPOSITION III.2. *Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème III.1. Pour qu'un sous-groupe H de G soit distingué il faut et il suffit que $L = M^H$ soit globalement fixe par G . Alors G/H peut être considéré comme un groupe d'automorphismes de L ; G/H opère presque librement sur L et $L^{G/H} = N$.*

Remarque. Les résultats de ce chapitre restent valables si on prend pour M une AW^* -algèbre.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BURES, D. *Abelian subalgebras of von Neumann algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. 110 (1971).
- [1] CHASE, S. U., HARRISON, D. K. and ROSENBERG, A. *Galois theory and Galois cohomology of commutative rings*, Mem. Amer. Math. Soc. 52 (1965).

- [1] ENOMOTO, M. and TAMAKI, K. *On a theorem of Percy and Ringrose*, Math. Japon. 18 (1973) 253–256.
- [1] DIXMIER, J. *Les C^* -algèbres et leurs représentations*. Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [2] — *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [1] GUICHARDET, A. *Systèmes dynamiques non commutatifs*. Collection astérisque No. 13–14, Paris, 1974.
- [1] KALLMAN, R. *A generalisation of free action*, Duke Math. J. 36 (1969) 781–789.
- [1] NAKAMURA, M. and TAKEDA, Z. *On the fundamental theorem of the Galois theory of finite factors*, Proc. Japan Acad. 36 (1960) 313–318.
- [2] — *On some elementary properties of the crossed products of von Neumann algebras*, Proc. Japan Acad. 34 (1958) 489–494.
- [1] PEARCY, C. and RINGROSE, J. R. *Trace-preserving isomorphisms in finite operator algebras*, Amer. J. Math. 90 (1968) 444–455.
- [1] SAKAI, S. *C^* -algebras and W^* -algebras*. Springer, Berlin, 1971.
- [1] SUZUKI, N. *Crossed products of rings of operators*. Tôhoku Math. J. 11 (1959), 113–124.
- [1] ZELLER-MEIER, G. *Produits croisés d'une C^* -algèbre par un groupe d'automorphismes*. J. Math. pures et appl. 47 (1968) 101–239.

*Institut de mathématiques
Université de Neuchâtel
Chantemerle 20
CH-2000 Neuchâtel*

Reçu en septembre 1975

