Comment. Math. Helvetici *39*(**51**) 597–599 Birkhäuser Verlag, Basel

Bemerkungen über zwei Beweise von Herrn A. Ostrowski

BRIAN B. MURPHY

In [1] wurde folgender Entwicklungssatz bewiesen.

SATZ. *Es sei* $A=(a_{ij})$ *eine quadratische Matrix n-ter Ordnung. Dann ist* A_{ij}, *das algebraische Komplement von* a_{ij} *in der Entwicklung von* $|A|$, *gleich*

$$\sum_{\gamma}(-a_{jk})(-a_{kl})\cdots(-a_{mi})D^{\{\gamma\}}$$

wobei $\gamma=(ijkl\cdots m)$ *einen beliebigen Zyklus von der symmetrischen Gruppe* $S_{\{1,2,\ldots,n\}}$ *darstellt, und* $D^{\{\gamma\}}$ *die koaxiale Unterdeterminante von A, welche die Reihen und Kolonnen i, j, k, l, . . . , m nicht enthält, ist.*[1]

Dieser Satz erlaubt eine neue Formulierung vom Beweis von Satz IX und einen neuen Beweis von Satz *X* von Herrn A. Ostrowski ([2], s204, 207). Dieses geschieht in den folgenden Paragraphen.

SATZ IX. *Sei A eine Determinante vom Typus*

$$A=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \cdots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & -\alpha_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

wo sämtliche $\alpha_{\mu\nu}\geqslant 0$ *und sämtliche koaxiale Unterdeterminanten, ebenso wie die Determinante A, selbst nicht negativ sind. Ist dann eines der Diagonalelemente* $\alpha_{\nu\nu}=0$, *so verschwindet A und zugleich verschwindet jeder der n! Terme in der Entwicklung der Determinante A.*

---

(1) Für die genauere Symbolik verweisen wir auf [1].

Beweis. Da die Behauptung für $n=1$ trivial ist, dürfen wir beim Beweis annehmen, dass der Satz für kleinere Werte von n bereits bewiesen ist.

Unbeschadet der Allgemeinheit können wir annehmec, dass $\alpha_{11}=0$ ist. Entwicklung der Determinante nach der ersten Reihe ergibt

$$A=\alpha_{11}A_{11}-\alpha_{12}A_{12}-\cdots-\alpha_{1n}A_{1n},$$

wobei das erste Glied rechts verschwindet. Nach Anwendung des Entwicklungssatzes bekommen wir

$$A=-\alpha_{12}\sum_{\gamma}\alpha_{2k}\alpha_{kl}\cdots\alpha_{m1}D^{\{\gamma\}}-\cdots-\alpha_{1n}\sum_{\gamma}\alpha_{nk}\alpha_{kl}\cdots\alpha_{m1}D^{\{\gamma\}}.$$

In dieser Darstellung ist jeder Term auf der rechten Seite nicht positiv, während A selbst nicht negativ ist. Daher müssen sowohl A, als auch die einzelnen Terme rechts, verschwinden.

Es sei l die Länge des Zyklus γ. Dann ist das algebraische Komplement von $D^{\{\gamma\}}$ eine koaxiale Unterdeterminante von A von der Ordnung l. Im Falle $l=n$, ist $D^{\{\gamma\}}=1$ und daher muss der entsprechende Vorfaktor in der obigen Entwicklung verschwinden, da sonst $A=0$ unmöglich wäre. Im Falle $l<n$ ist das erwähnte Komplement eine koaxiale Unterdeterminante von A von einer ordnung $<n$, mit α_{11} auf der Hauptdiagonale. Der Satz IX darf also auf diese Unterdeterminante angewandt werden. Daraus schliesst man wieder, dass der Vorfaktor von $D^{\{\gamma\}}$ verschwindet. Damit ist der Satz IX völlig bewiesen.

Im nächsten Satz bedeutet E die Einheitsmatrix n-ter Ordnung, und 'eigentliche M-matrix' eine Matrix mit positiven Diagonalelementen, positiver Determinante, nicht negativen Hauptminoren, und lauter nicht positiven Elementen ausserhalb der Hauptdiagonale.

SATZ X. *Es sei A eine reelle $(n\times n)$-Matrix mit der Eigenschaft, dass sowohl A^{-1} als auch $(A+\lambda E)^{-1}$ für alle hinreichend grossen λ lauter nicht negative Elemente hat. Dann ist A eine eigentliche M-matrix.*

Beweis. Nach dem Hilfssatz H von Herrn Ostrowski [2, s206], genügt es zu beweisen, dass alle Elemente von A ausserhalb der Hauptdiagonale $\leqslant 0$ sind. Das ist der eigentliche Zweck der folgenden Überlegungen.

Es sei λ_0 mindestens so gross, dass $|A+\lambda E|$ und alle koaxialen Unterdeterminanten von $A+\lambda E$ positiv für $\lambda\geqslant\lambda_0$ sind. Um zu zeigen, z.B., dass $\alpha_{12}\leqslant 0$ ist, beachte man, dass das algebraische Komplement von α_{21} in $|A+\lambda E|$ nicht negativ sein kann. Anwendung vom Entwicklungssatz auf die Matrix $A+\lambda E$ ergibt[2]

$$(A+\lambda E)_{2,1}=-a_{12}D^{\{1,2\}}+O(\lambda^{n-3})$$

wobei der erste Term rechts $O(\lambda^{n-2})$ ist. Diese Gleichung liefert für $\lambda\to\infty$

$$-a_{12}D^{\{1,2\}}\geqslant 0$$

woraus $a_{12}\leqslant 0$ folgt, weil $D^{\{1,2\}}>0$ für $\lambda\geqslant\lambda_0$ ist. Damit ist der Satz X auch bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] MURPHY, B.: *Expansion of* $(n-1)$*-Rowed Subdeterminants.* Math. Z. *147* (1976) 205.
[2] OSTROWSKI, A.: *Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale und die absolute Konvergenz von linearen Iterationsprozessen.* Commentarii math. Helvet. *30* (1956) 175–210.

Corporate Research Unit
Mail Code 1804
Blue Cross Blue Shield of Michigan
600 *East Lafayette*
Detroit, Mich. 48226
U.S.A.

Eingegangen den 28. Mai 1976

[2] Diese Formel folgt auch wenn man den Kofaktor $(A+\lambda E)_{j,i}$ nach der i-ten Reihe entwickelt.